МАЛА ОЛИМПИЈАДА

Бечеј, 12.04.1998.

1. Из шпила карата за игру, четири *тројке*, четири *четворке* и четири *петице* су издвојене и поређане на сто са лицем на горе. Играчи A и B редом узимају карте једну по једну и стављају их на гомилу. Почиње играч A. Играч после чијег потеза је збир вредности карата на гомили

(а) већи од 34;

(б) већи од 37

губи. Који играч има победничку стратегију?

2. У конвексном четвороуглу $ABCD$, дијагонала AC сече дијагоналу BD у њеном средишту S. Полупречници уписаних кругова троуглова ABS, BCS, CDS, DAS су r_1, r_2, r_3, r_4, редом. Доказати неједнакост

$$|r_1 - r_2 + r_3 - r_4| \leqslant \frac{1}{8}|AB - BC + CD - DA|\,.$$

3. Доказати да не постоје природни бројеви n и $k \leqslant n$ такви да бројеви

$$\binom{n}{k}, \binom{n}{k+1}, \binom{n}{k+2}, \binom{n}{k+3}$$

тим редом чине аритметичку прогресију.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

РЕШЕЊА

1. (а) Први играч. Он у првом потезу одабере петицу, а у наредна три потеза, ако други играч одабере карту x, он бира карту $8-x$ (то очигледно може извести). Након четвртог потеза другог играча збир бројева карата на гомили је 32, 33 или 34. У следећем потезу први играч побеђује.

(б) Други играч. Кад год први играч одабере карту x, други узима карту $8-x$. Пре петог потеза другог играча збир бројева карата није већи од 37, а он својим потезом достиже збир 40 и побеђује.

2. Нека је $\sphericalangle ASB \geqslant 90^\circ$. Тада је $AB \geqslant AD$ и $CD \geqslant CB$. Површине троуглова ASB и ASD су једнаке; означимо их са P. Имамо

$$\begin{aligned} r_4 - r_1 = & \frac{2P}{AS+SD+AD} - \frac{2P}{AS+SB+AB} \\ = & \frac{2P\cdot(AB-AD)}{(AS+SD+AD)(AS+SB+AB)}\,. \end{aligned}$$

Знамо (нпр. на основу А-Г неједнакости) да је $12\sqrt{3}\cdot P \leqslant (AS+SD+AD)^2 \leqslant (AS+SD+AD)(AS+SB+AB)$, па следи да је $0 \leqslant r_4-r_1 \leqslant \frac{1}{6\sqrt{3}}(AB-AD)$. Аналогно је $0 \leqslant r_2-r_3 \leqslant \frac{1}{6\sqrt{3}}(CB-CD)$, па сабирањем добијамо неједнакост јачу од тражене, са константом $\frac{1}{8}$ замењеном са $\frac{1}{6\sqrt{3}}$.

3. Како је $\binom{n}{x} = \frac{x+1}{n-x}\binom{n}{x+1}$ и $\binom{n}{x+2} = \frac{n-x-1}{x+2}\binom{n}{x+1}$, бројеви $\binom{n}{x}$, $\binom{n}{x+1}$ и $\binom{n}{x+2}$ чине аритметичку прогресију ако и само ако важи $\frac{x+1}{n-x} + \frac{n-x-1}{x+2} = 2$, што је након сређивања еквивалентно са

$$(2x-n+2)^2 = n+2. \qquad (*)$$

По услову задатка, $x=k$ и $x=k+1$ су решења ове једначине, тј. $|2k-n+2| = |2(k+1)-n+2|$, па мора бити $2k-n+2=1$, али онда $(*)$ даје $n=-1$, контрадикција.