

15. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Никозија, Кипар – 5. мај 1998.

1. Посматрајмо чланове коначног низа

$$\left[\frac{k^2}{1998} \right], \quad k = 1, 2, \dots, 1997.$$

где $[x]$ означава цео део од x . Колико има различитих чланова у овом низу?
(Грчка)

2. Нека је n цео број, $n \geq 2$, и нека су $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{2n+1}$ реални бројеви. Доказати следећу неједнакост:

$$\sqrt[n]{a_1} - \sqrt[n]{a_2} + \dots - \sqrt[n]{a_{2n}} + \sqrt[n]{a_{2n+1}} < \sqrt[n]{a_1 - a_2 + \dots - a_{2n} + a_{2n+1}}.$$

(Румунија)

3. Означимо са \mathcal{S} скуп свих тачака троугла ABC без једне унутрашње тачке (треугао садржи своју ивицу). Показати да \mathcal{S} може да се представи као унија дисјунктних дужи (дуж садржи своје крајње тачке).
(Југославија)

4. Доказати да једначина $y^2 = x^5 - 4$ нема целобројних решења.
(Бугарска)

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

1. Суседни чланови низа $\frac{1^2}{1998}, \frac{2^2}{1998}, \dots, \frac{999^2}{1998}$ се разликују за мање од 1, тако да се међу њиховим целим деловима појављују сви цели бројеви од $\left\lceil \frac{1^2}{2014} \right\rceil = 0$ до $\left\lceil \frac{999^2}{1998} \right\rceil = 499$. С друге стране, међу 999 бројева $\frac{999^2}{1998}, \frac{1000^2}{1998}, \dots, \frac{1997^2}{1998}$ свака два се разликују за више од 1, па су њихови цели делови различити. Тако у датом низу имамо укупно $500 + 999 - 1 = 1498$ различитих чланова.

2. Сменом $a_i = x_i^n$ тражена неједнакост се своди на $x_1^n - x_2^n + x_3^n - \dots + x_{2n+1}^n > (x_1 - x_2 + x_3 - \dots + x_{2n+1})^n$. Доказаћемо индукцијом по $k \geq 1$ да важи

$$x_1^n - x_2^n + x_3^n - \dots + x_{2k+1}^n > (x_1 - x_2 + x_3 - \dots + x_{2k+1})^n \quad \text{ако је } 0 < x_1 < \dots < x_{2n+1}. \quad (*)$$

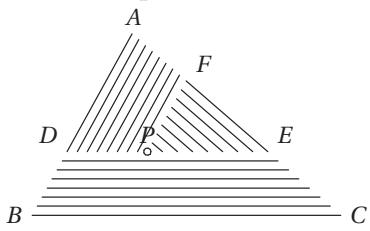
За $k=1$, $(*)$ је еквивалентно са $x_2^n - x_1^n < x_3^n - x_1^n$, где је $x = x_1 - x_2 + x_3$. Дељењем са $x_2 - x_1 > 0$ ова неједнакост постаје $x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \dots + x_1^{n-1} < x_3^{n-1} + x_3^{n-2}x + \dots + x^{n-1}$, а то је очигледно тачно јер је $x_2 < x_3$ и $x_1 < x$.

Нека је $k > 1$. На основу индуктивне претпоставке и случаја $k=1$ је $x_1^n - x_2^n + x_3^n - \dots + x_{2k+1}^n > x_1^n - x_2^n + (x_3 - \dots + x_{2k+1})^n > (x_1 - x_2 + x_3 - \dots + x_{2k+1})^n$ јер је $x_1 < x_2 < x_3 - \dots + x_{2k+1}$, и овим је индукција завршена.

Друго решење. Како је x_i^n запремина хиперкоцке $C_i = [0, x_i]^n$, лева страна $(*)$ је једнака запремини скупа $A = C_1 \cup (C_3 \setminus C_2) \cup \dots \cup (C_{2k+1} \setminus C_{2k})$, а то је скуп свих тачака $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ у којима је $\max_i x_i \in I$, где је $I = [0, x_1] \cup [x_2, x_3] \cup \dots \cup [x_{2k}, x_{2k+1}]$.

С друге стране, десна страна $(*)$ је једнака запремини скупа B свих тачака $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ са $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$. Јасно је да је $B \subset A$, па $(*)$ одмах следи.

3. Нека је P унутрашња тачка троугла ABC , D тачка на страници AB таква да је $PD \parallel BC$, и E и F тачке на AC такве да је $PE \parallel BC$ и $PF \parallel AB$. Трапез $BCED$ без дужи DE се може покрити дужима паралелним страници BC ; трапез $ADPF$ без дужи PF се може покрити дужима паралелним страници AD ; и најзад, троугао PEF без тачке P се може покрити дужима паралелним страници EF .



4. Једначина нема решења по модулу 11. Заиста, могући остаци y^2 при дељењу са 11 су 0, 1, 3, 4, 5, 9, док $x^5 - 4$ даје само остатке 6, 7, 8.

Напомена. Ово лако решење је промакло жирију. Дајемо и решење предлагача: Запишимо једначину као $y^2 + 6^2 = x^5 + 2^5$. Ако је x парно, онда је $y^2 = x^5 - 4 \equiv 28 \pmod{32}$, па је $(\frac{y}{2})^2 \equiv 7 \pmod{8}$, а то је немогуће.

Остaje случај $2 \nmid x$. Тада је $0 < A = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16 \equiv 3 \pmod{4}$, али $A \mid x^5 + 2^5 = y^2 + 6^2$, што је немогуће ако је $(A, 6) = 1$. Дакле, $3 \mid A \mid x^5 + 32 \equiv x + 2 \pmod{3}$, па је $x \equiv 1 \pmod{3}$, али тада је $A \equiv 2 \pmod{3}$, контрадикција.