38. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Ниш, 12.04.1997.

Први разред

1. Пешак се креће по тачкама са целим координатама у равни по следећим правилима:

(i) Пешак се у почетку налази у тачки (m, n).

(ii) Ако се пешак у неком тренутку налази у тачки (x, y), онда из ње прелази у тачку $(x+1, y)$, $(x, y+1)$, $(x-1, y)$ или $(x, y-1)$ редом, у зависности од тога да ли је остатак при дељењу $x+y$ са 4 једнак $0, 1, 2$ или 3.

Ако се пешак после пређених 1997 корака нашао у тачки $(0, 1997)$, одредити све могуће тачке (m, n).

2. Нека је O унутрашња тачка троугла ABC. Праве OA, OB, OC секу наспрамне странице редом у тачкама P, Q, R. Наћи минималну вредност производа

$$\frac{AO}{OP} \cdot \frac{BO}{OQ} \cdot \frac{CO}{OR}$$

и одредити тачку O за коју се та вредност достиже.

3. У троуглу ABC, CD је висина, E средиште странице AB, а P и Q подножја нормала из тачака A и B на симетралу угла ACB. Доказати да тачке D, E, P, Q леже на истом кругу.

4. Доказати да међу бројевима облика

$$\left[2^{k+\frac{1}{2}}\right], \quad \text{где је } k \text{ природан број},$$

има бесконачно много парних.
($[x]$ је највећи цео број не већи од x.)

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

38. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Ниш, 12.04.1997.

Други разред

1. У равни су дате права s и тачке A и B са исте стране праве s. Нека је M промењлива тачка праве s, а A_1 и B_1 нормалне пројекције тачака A и B на праве MB и MA, редом. Одредити положај тачке M тако да дужина A_1B_1 буде минимална.

2. Свака ивица конвексног полиедра је означена знаком $+$ или $-$. Доказати да постоји теме полиедра међу чијим ивичним угловима има мање од четири чији су краци различито означени.

3. Означимо са $S(n)$ збир цифара природног броја n. Да ли постоји n тако да важе једнакости $S(n) = 1997$ и $S(n^2) = 1997^2$?

4. У свакој од три школе има по n ученика. Сваки ученик познаје бар $n+1$ ученика из остале две школе. Доказати да постоје три ученика, по један из сваке школе, који се међусобно познају. (Познанство је симетрична релација.)

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

38. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Ниш, 12.04.1997.

Трећи и четврти разред

1. Постоји ли природан број n за који се скуп $\{n, n+1, \ldots, n+1997\}$ може представити у облику уније међусобно дисјунктних скупова $A_1, A_2, \ldots, A_k$ $(k \geqslant 2)$ тако да су производи бројева у свим скуповима $A_1, \ldots, A_n$ исти?

2. Дат је полином

$$P(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1.$$

Доказати да тачно четири корена полинома $P(x)$ имају модуле једнаке 1.

3. Дат је тетраедар $ABCD$ запремине V. На ивицама AD, BD, CD дате су редом тачке A_1, B_1, C_1 тако да раван $A_1B_1C_1$ садржи тежиште тетраедра. Означимо са V_1, V_2, V_3 запремине тетраедара $AA_1B_1C_1$, $BA_1B_1C_1$ и $CA_1B_1C_1$, редом. Наћи најмању могућу вредност збира $V_1 + V_2 + V_3$.

4. Пет ћупова означени су бројевима $0, 1, 2, 3, 4$. Ћуп означен бројем 0 је празан, а у сваком од преосталих налази се известан број златника. У ћупу означеном бројем i налази се r_i златника. Два играча, A и B, наизменично премештају златнике. Једним потезом играч може преместити произвољан број златника (бар један) из било ког ћупа у ћуп са редним бројем мањим за 1. Први игра A. Играч после чијег се потеза сви златници нађу у ћупу означеном са 0 добија све златнике. Који играч има добитну стратегију?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

РЕШЕЊА

1.1. Корак који пешак пређе из тачке (x, y) зваћемо "кораком i" ($i = 0, 1, 2, 3$) ако је $x + y \equiv i \pmod 4$.

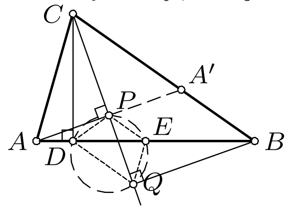
Како у сваком кораку збир $x + y$ мења парност, у полазној тачки мора бити $2 \mid m + n$, па је пешаков први корак 0 или 2. Након првог корака следе редом кораци $1, 2, 1, 2, \ldots$, па тако после 1997 корака пешак завршава у тачки $(m - 997, n + 998)$ ако је $m + n \equiv 0 \pmod 4$, односно у тачки $(m-999, n+998)$ ако је $m+n \equiv 2 \pmod 4$. Следи да су једине могуће полазне тачке $(997, 999)$ и $(999, 999)$, и оне заиста задовољавају претпоставке.

1.2. Означимо $x = \frac{OP}{AP} = \frac{P_{OBC}}{P_{ABC}}$, $y = \frac{OQ}{BQ} = \frac{P_{AOC}}{P_{ABC}}$ и $z = \frac{OR}{CR} = \frac{P_{ABO}}{P_{ABC}}$. Тада је $AP = \frac{1}{x} \cdot OP \Rightarrow AO = (\frac{1}{x} - 1)OP = \frac{1-x}{x} \cdot OP$, па је $\frac{AO}{OP} = \frac{1-x}{x} = \frac{y+z}{x}$ јер је $x + y + z = 1$. Слично је $\frac{BO}{OQ} = \frac{z+x}{y}$ и $\frac{CO}{OR} = \frac{x+y}{z}$. Сада је

$$\frac{AO}{OP} \cdot \frac{BO}{OQ} \cdot \frac{CO}{OR} = \frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{xyz} \geqslant \frac{2\sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{zx} \cdot 2\sqrt{xy}}{xyz} = 8$$

по А-Г неједнакости, при чему једнакост важи ако и само ако је $x = y = z = \frac{1}{3}$, тј. када је тачка O тежиште троугла ABC.

1.3. Ако је $AC = BC$, све четири тачке D, E, P, Q се поклапају. Нека је $AC < BC$. Лако се види да се дужи DE и PQ секу, те је четвороугао $DPEQ$ конвексан. Тачка A' симетрична тачки A у односу на симетралу угла ACB лежи на правој CB, при чему је тачка P средиште дужи AA'.



Како је PE средња линија у троуглу $AA'B$, важи $PE \parallel BC$. Сада из тетивности четвороугла $BCDQ$ добијамо $\sphericalangle QDE = \sphericalangle QCB = \sphericalangle QPE$, што значи да је четвороугао $DPEQ$ тетиван.

1.4. Претпоставимо да постоји n такво да је $[2^{k+\frac{1}{2}}] = [2^k\sqrt{2}]$ непарно за све $k \geqslant n$. Нека је $K = [2^n\sqrt{2}] + 1$ и m природан број такав да је $K - \frac{1}{2^{m-1}} \leqslant 2^n\sqrt{2} < K - \frac{1}{2^m}$. Множењем са 2^m добијамо

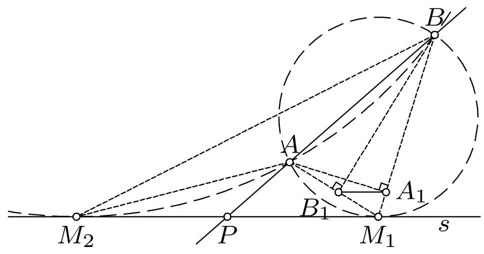
$$2^m K - 2 \leqslant 2^{n+m}\sqrt{2} < 2^m K - 1,$$

па је $[2^{n+m}\sqrt{2}] = 2^m K - 2$ парно, контрадикција.

2.1. Из сличности $\triangle MA_1B_1 \sim \triangle MAB$ следи $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{MA_1}{MA} = \cos\sphericalangle AMB$.

Дакле, треба наћи тачку M за коју се минимизује $\cos\sphericalangle AMB$.

Ако круг ω над пречником AB сече праву s, узимајући за M пресечну тачку $s\cap\omega$ добијамо $|A_1B_1|=0$.



Ако ω не сече s, задатак се своди на одређивање тачке M за коју је $\sphericalangle AMB$ максималан. Тада унутар круга k кроз тачке A, M, B нема тачака праве s, што значи да круг k додирује праву s.

(i) Ако је $AB \parallel s$, M је пресек симетрале дужи AB и праве s.

(ii) Ако је $AB\cap s=\{P\}$, онда је $PM^2 = PA\cdot PB$. Постоје две такве тачке M: означимо их са M_1 и M_2, при чему је без смањења општости $\sphericalangle M_1PA \leqslant 90°$. На основу синусне теореме је $\frac{\sin\sphericalangle AM_1B}{\sin\sphericalangle AM_2B} = \frac{AM_2}{AM_1}\cdot\frac{\sin\sphericalangle PBM_1}{\sin\sphericalangle PBM_2} = \frac{AM_2}{AM_1}\cdot\frac{BM_2}{BM_1} > 1$, дакле $\sphericalangle AM_1B > \sphericalangle AM_2B$, па је $M\equiv M_1$.

2.2. Нека полиедар има V темена, E ивица и $F = F_3+F_4+\cdots$ страна, где је F_k број k-тоугаоних страна. Свака k-тоугаона страна има k ивица, а свака ивица се рачуна двапут, па је $2E=\sum_{k\geqslant 3} kF_k$ и одатле по Ојлеровој теореми $2V = 2(E-F+2) = \sum_{k\geqslant 3}(k-2)F_k+4$.

На k-тоугаоној страни има највише $2[\frac{k}{2}]$ углова са различито означеним крацима. Укупан број таквих углова је онда

$$N \leqslant 2\sum_{k\geqslant 3}\left[\frac{k}{2}\right]F_k \leqslant 2\sum_{k\geqslant 3}(k-2)F_k = 4V-8,$$

па по Дирихлеовом принципу постоји теме са мање од 4 различито означена крака.

2.3. Постоји. Докажимо да број

$$n=\sum_{k=1}^{1997}10^{2^k}, \quad \text{за који је} \quad n^2=\sum_{k=1}^{1997}10^{2^{k+1}}+2\cdot\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant 1997}10^{2^k+2^\ell},$$

задовољава услове задатка. Јасно је да је $S(n)=1997$. Такође, како су сви експоненти 2^{k+1} и 2^k+2^l у запису n^2 међусобно различити, број n^2 у децималном запису има 1997 јединица, $\binom{1997}{2}$ двојки и неки број нула, па је $S(n^2)$ тачно једнако 1997^2.

2.4. Нека је a ученик школе S_1 који познаје k ученика школе S_2, такав да ниједан ученик из ма које школе нема више од k познаника ни у једној другој школи. Ученик a има бар $n+1-k$ познаника у трећој школи S_3. Нека је $c\in S_3$ један од тих познаника. Он познаје највише k ученика у S_1, и према томе бар $n+1-k$ ученика у S_2. По Дирихлеовом принципу, постоји ученик b школе S_2 који познаје и a и c. Ученици a, b, c се познају међусобно.

3.1. Бројеви 1997 и 1999 су прости. Скуп $A = \{n, n+1, \dots, n+1997\}$ садржи бар један број дељив са 1997, па је производ у сваком од скупова A_i дељив са 1997. Али како су највише два броја у скупу A дељива са 1997, мора бити $k \leqslant 2$, дакле $k = 2$.

Даље, скуп A не може да садржи број дељив са 1999, јер би у супротном тачно један од скупова A_1, A_2 имао производ елемената дељив са 1999. Следи да је $n \equiv 1 \pmod{1999}$, па је по Вилсоновој теореми производ елемената у A конгруентан са $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 1998 \equiv -1 \pmod{1999}$. Међутим, ако је x производ елемената у A_1, ово значи да је $x^2 \equiv -1 \pmod{1999}$, а ова конгруенција нема решења јер је $1999 \equiv 3 \pmod{4}$.

3.2. Ставимо $y = x + x^{-1}$. Тада је

$$\frac{P(x)}{x^3} = Q(y) = y^3 - 2y^2 - 2y + 2.$$

Приметимо да је x модула 1 ако и само ако је $x = \cos t + i \sin t$ за неко t, а тада је $y = 2\cos t$; обратно, из $y = 2\cos t$ следи $x = \cos t \pm i \sin t$. Другим речима, $|x| = 1$ ако и само ако је y реално и $-2 \leqslant y \leqslant 2$, при чему сваком таквом y одговарају две вредности x ако је $y \neq \pm 2$. Према томе, остаје само да покажемо да $Q(y)$ има тачно две реалне нуле у интервалу $(-2, 2)$. За то је довољно приметити да је $Q(-2) = -10$, $Q(0) = 2$, $Q(2) = -2$, па Q има по једну нулу у сваком од интервала $(-2, 0)$, $(0, 2)$ и $(2, \infty)$.

3.3. Означимо $\overrightarrow{DA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB_1} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{DC_1} = \vec{c}$. Нека је $\overrightarrow{DA} = x\vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = y\vec{b}$ и $\overrightarrow{DC} = z\vec{c}$, где су $x, y, z > 1$. Ако је T тежиште тетраедра $ABCD$, важи $\overrightarrow{DT} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) = \frac{x}{4}\vec{a} + \frac{y}{4}\vec{b} + \frac{z}{4}\vec{c}$. Тачка T је у равни $A_1B_1C_1$ ако и само ако је $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1$, тј. $x + y + z = 4$.

Даље је $V = xyz \cdot V_{A_1B_1C_1D}$ и $V_1 = \frac{AA_1}{DA_1} \cdot V_{A_1B_1C_1D} = \frac{x-1}{xyz} \cdot V$, и аналогно $V_2 = \frac{y-1}{xyz} \cdot V$ и $V_3 = \frac{z-1}{xyz} \cdot V$. Према томе,

$$V_1 + V_2 + V_3 = \frac{x+y+z-3}{xyz} \cdot V = \frac{1}{xyz} \cdot V \geqslant \left(\frac{3}{4}\right)^3 V$$

јер је по А-Г неједнакости $xyz \leqslant (\frac{x+y+z}{3})^3 = (\frac{4}{3})^3$.
Дакле, одговор је $\frac{27}{64}V$ и достиже се када је $x = y = z = \frac{4}{3}$, тј. када је раван $A_1B_1C_1$ паралелна равни ABC.

3.4. Јасно је да се игра мора завршити: сваки златник се из сваког ћупа може узети највише једном.

Ако је у почетној позицији $r_1 \neq r_3$, први играч може да игра тако да после сваког његовог потеза у ћуповима 1 и 3 има исти број златника, док други играч својим потезом обавезно нарушава ово својство. На овај начин први играч побеђује.

Ако је $r_1 = r_3$, после првог потеза првог играча бројеви златника у ћуповима 1 и 3 су различити, па други играч побеђује следећи горе описану стратегију.