МАЛА ОЛИМПИЈАДА

Ниш, 13.04.1997.

1. Дат је правилан n-угао $A_1A_2\ldots A_n$ површине S. У тачкама A_1, A_2, …, A_n конструисане су нормале $l_1, l_2, \ldots, l_n$ на раван n-угла и на њима су изабране тачке $B_1, B_2, \ldots, B_n$ редом тако да важи:

(i) тачке $B_1, B_2, \ldots, B_n$ су са исте стране равни n-угла;
(ii) тачке $B_1, B_2, \ldots, B_n$ припадају једној равни;
(iii) $A_1B_1 = h_1,\ A_2B_2 = h_2, \ldots,\ A_nB_n = h_n$.

Изразити запремину полиедра $A_1A_2\ldots A_nB_1B_2\ldots B_n$ у функцији $S, h_1,\ h_2, \ldots, h_n$.

2. Дат је природан број k. Одредити најмањи природан број C такав да је

$$\frac{C}{n+k+1}\binom{2n}{n+k}$$

цео број за сваки природан број $n \geqslant k$.

3. Бројеви $1, 2, \ldots, 1997^2$ су записани у пољима таблице 1997×1997. Дозвољено је вршити следеће трансформације таблице: заменити места било којим двема врстама или двема колонама, или обрнути било коју врсту или колону. (При обртању врсте или колоне мењају места први и последњи број, други и претпоследњи, итд.) Да ли се применом ових трансформација могу заменити места произвољна два броја у овој таблици, а да сви остали бројеви остану на својим местима?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

РЕШЕЊА

1. Тражена запремина V је збир запремина V_i тространих пирамида $A_iA_{i+1}A_nB_n$ и запремина W_i четвоространих пирамида $A_iA_{i+1}B_{i+1}B_iB_n$, $1 \leqslant i \leqslant n-2$.

Означимо са S_i и v_i редом површину троугла $A_nA_iA_{i+1}$ и његову висину из A_n. Како је

$$V_i = \tfrac{1}{3}S_i \cdot h_n \quad \text{и}$$
$$W_i = \tfrac{1}{3}P_{A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i} \cdot v_i = \tfrac{1}{3}A_iA_{i+1} \cdot \tfrac{h_i+h_{i+1}}{2} \cdot v_i = \tfrac{1}{3}S_i(h_i+h_{i+1}),$$

налазимо да је $V = \sum_{i=1}^{n-2} V_i = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{3}S_i(h_i+h_{i+1}+h_n)$.

Аналогно је $V = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{3}S_i(h_{k+i}+h_{k+i+1}+h_k)$. Сабирањем по свим $k=1,\dots,n$ добијамо $nV = \sum_{i=1}^{n-2} S_i(h_1+h_2+\cdots+h_n)$, дакле

$$V = S \cdot \frac{h_1+h_2+\cdots+h_n}{n}\,.$$

2. Заменом $n=k$ добија се да $2k+1 \mid C$. С друге стране, $C = 2k+1$ задовољава услове јер је $\frac{2k+1}{n+k+1}\binom{2n}{n+k} = 2\binom{2n}{n+k} - \binom{2n+1}{n+k+1}$ цео број.

3. Одговор је *да*. Доказ се састоји из неколико делова.

(1°) Посматрајмо произвољну врсту/колону. Низом операција

$$\begin{array}{ccccccc}
\begin{matrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \cdots & m & n & p \\ z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_4 & z_5 & z_6 \end{matrix} & \to & \begin{matrix} \boxed{c\ b\ a\ \cdots\ m\ n\ p} \\ z_3 z_2 z_1 \cdots z_4 z_5 z_6 \end{matrix} & \to & \begin{matrix} p & n & m & \cdots & a & b & c \\ z_3 & z_2 & z_1 & \cdots & z_4 & z_5 & z_6 \end{matrix} & \to \\
\begin{matrix} \boxed{p\ m\ n\ \cdots\ a\ b\ c} \\ z_3 z_1 z_2 \cdots z_4 z_5 z_6 \end{matrix} & \to & \begin{matrix} c & b & a & \cdots & n & m & p \\ z_3 & z_1 & z_2 & \cdots & z_4 & z_5 & z_6 \end{matrix} & \to & \begin{matrix} \boxed{b\ c\ a\ \cdots\ n\ m\ p} \\ z_1 z_3 z_2 \cdots z_4 z_5 z_6 \end{matrix} & \to \\
\begin{matrix} p & m & n & \cdots & a & c & b \\ z_1 & z_3 & z_2 & \cdots & z_4 & z_5 & z_6 \end{matrix} & \to & \begin{matrix} \boxed{p\ n\ m\ \cdots\ a\ c\ b} \\ z_1 z_2 z_3 \cdots z_4 z_5 z_6 \end{matrix} & \to & \begin{matrix} \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} & \cdots & m & n & p \\ z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_4 & z_5 & z_6 \end{matrix} &
\end{array}$$

можемо циклично пермутовати бројеве у прва три поља те врсте (колоне), не мењајући остатак таблице. Заменом колона (врста) по потреби можемо исто урадити са било која три броја a,b,c из исте врсте (колоне). Овај низ операција зовемо $K_{a,b,c}$.

(2°) Нека су бројеви a,b,d у истој врсти (или колони), а a,c,e у истој колони (врсти). Користећи (1°) можемо да применимо редом операције $K_{a,b,d}, K_{b,c,e}, K_{a,d,c}, K_{a,b,e}$. На овај начин циклично смо пермутовали бројеве a,b,c, не мењајући остатак таблице. И овај низ операција зовемо $K_{a,b,c}$.

(3°) Нека су (a,b) и (c,d) редом парови i-тог и j-тог броја у две различите врсте или колоне. Користећи (2°), применом $K_{a,b,c}$ и $K_{b,c,d}$ можемо да заменимо места паровима (a,b) и (c,d).

(4°) Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_{1997}$ и $b_1, b_2, \ldots, b_{1997}$ редом бројеви у првој и другој врсти. Заменимо места овим двема врстама. Потом, користећи (3°), замењујемо места паровима (a_2, a_3) и (b_2, b_3), па (a_4, a_5) и (b_4, b_5), итд, до (a_{1996}, a_{1997}) и (b_{1996}, b_{1997}), чиме постижемо да су само a_1 и b_1 заменили места. Ако још циклично испермутујемо a_1, b_1, b_2, постижемо да су a_1 и b_2 заменили места. На исти начин било која два броја могу да замене места.