14. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Калабака, Грчка – 30. април 1997.

1. Тачка O у унутрашњости конвексног четвороугла $ABCD$ је таква да је
$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 2 \cdot P(ABCD),$$
где $P(ABCD)$ означава површину четвороугла $ABCD$. Доказати да је $ABCD$ квадрат са центром O. *(Југославија)*

2. Нека је $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ колекција подскупова скупа S који има n ($n \geqslant 2$) елемената. Ако за свака два елемента $x, y \in S$ постоји подскуп $A_i \in \mathcal{A}$ такав да A_i садржи тачно један од елемената x, y, доказати да је $n \leqslant 2^k$. *(Југославија)*

3. Дате су кружнице Γ, C_1 и C_2 у равни. Кружнице C_1 и C_2 изнутра додирују кружницу Γ у тачкама B и C, редом, а саме се споља додирују у тачки D. Нека је A једна од тачака у којој заједничка унутрашња тангента кружница C_1 и C_2 сече Γ и нека су K и L друге тачке пресека правих AB и AC са кружницама C_1 и C_2 редом. Ако су M и N друге тачке пресека праве BC са кружницама C_1 и C_2 редом, доказати да се праве AD, KM и LN секу у једној тачки. *(Грчка)*

4. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи
$$f\left(xf(x) + f(y)\right) = \left(f(x)\right)^2 + y.$$
(Бугарска)

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.