37. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

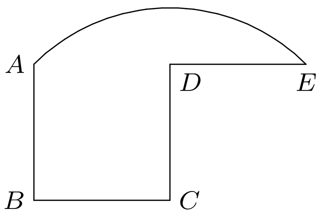
Бар, 13.04.1996.

Први разред

1. У граду квадратног облика има 22 улице. Уведен је координатни систем, при чему су улице на правим $x = n$ и $y = k$ $(n, k \in \{0, 1, \ldots, 10\})$. Пет бизнисмена имају канцеларије у тачкама $A(0, \frac{43}{5})$, $B(\frac{17}{5}, 2)$, $C(\frac{16}{5}, 9)$, $D(\frac{17}{2}, 0)$, $E(\frac{46}{5}, 8)$. Они треба да се нађу на некој раскрсници. Одредити раскрсницу тако да збир пређених путева бизнисмена до те раскрснице буде минималан. (Бизнисмени путују само улицама.)

2. На страницама BC и CD квадрата $ABCD$ узете су редом тачке P и Q тако да је права PQ тангента круга са центром A и полупречником AB. Дужи AP и AQ секу дијагоналу BD у тачкама R и S. Доказати да тачке C, P, Q, R, S припадају једном кругу.

3. Фигуру са слике поделити на две подударне фигуре линијом која са границом фигуре има тачно две заједничке тачке.



($ABCD$ је квадрат, троугао CDE је једнакокрако-правоугли, а лук AE припада кружници са центром C.)

4. Наћи 7 различитих простих бројева $p_1, p_2, \ldots, p_7$ који су мањи од 1000 и за које важи

$$p_2 - p_1 = p_3 - p_2 = p_4 - p_3 = p_5 - p_4 = p_6 - p_5 = p_7 - p_6.$$

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

37. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Бар, 13.04.1996.

Други разред

1. Показати да се у равни може нацртати 1996 кружница тако да сваке две имају највише једну заједничку тачку и да свака од њих додирује тачно пет других.

2. Одредити геометријско место тежишта свих једнакостраничних троуглова чија темена припадају страницама датог квадрата.

3. Решити једначину $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{1996}$ у скупу ненегативних целих бројева.

4. Наћи максималну вредност реалног броја a за коју неједнакост

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2 \geqslant a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5)$$

важи за сваких пет реалних бројева x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

37. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Бар, 13.04.1996.

Трећи и четврти разред

1. Нека су a, b, c ненегативни цели бројеви. Доказати да не постоји функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таква да је

$$f(x+y) + f(x) + f(y) = xy + ax + by + c \quad \text{за све } x, y \in \mathbb{N}.$$

2. Дијагонале конвексног четвороугла $ABCD$ секу се у тачку O. Означимо са P и Q редом центре описаних кругова троуглова ABO и CDO. Доказати да је

$$AB + CD \leqslant 4PQ.$$

3. Дат је природан број n. Наћи максималан природан број k за који скуп $S_n = \{1, 3, \ldots, 2n-1\}$ садржи k-елементни подскуп у коме не постоје два различита броја таква да је један дељив другим.

4. Међу 1996 наизглед једнаких куглица налазе се две неисправне које се по тежини разликују од исправних. Све исправне куглице су исте тежине. Две неисправне куглице су такође исте тежине, али не знамо да ли су оне лакше или теже од исправних. Доказати да се помоћу три мерења на теразијама без тегова може утврдити да ли су неисправне куглице лакше или теже од исправних. (Не захтева се да неисправне куглице буду идентификоване.)

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

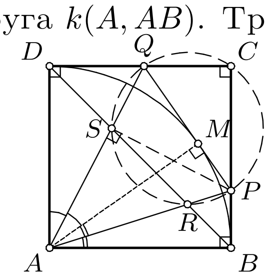
РЕШЕЊА

1.1. Пут који бизнисмен пређе од тачке (a, b) до тачке (x, y) је $|x-a|+|y-b|$. Зато је збир пређених путева једнак $X+Y$, где је

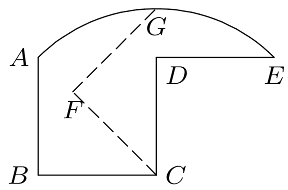
$$X = |x| + |x - \tfrac{17}{5}| + |x - \tfrac{16}{5}| + |x - \tfrac{17}{2}| + |x - \tfrac{46}{5}| \quad \text{и}$$
$$Y = |y - \tfrac{43}{5}| + |y-2| + |y-9| + |y| + |y-8|.$$

Директном провером по $x, y \in \{0, 1, \ldots, 10\}$ налазимо да је X најмање за $x = 4$, а Y је најмање за $y = 8$. Према томе, они треба да се нађу на раскрсници $(4, 8)$.

1.2. Нека је M додирна тачка праве PQ и круга $k(A, AB)$. Троуглови ADQ и AMQ су подударни, па је $\sphericalangle MAQ = \sphericalangle DAQ$; слично важи $\sphericalangle MAP = \sphericalangle BAP$, па сабирањем добијамо $\sphericalangle PAQ = \frac{1}{2}\sphericalangle BAD = 45^\circ = \sphericalangle PBS$. Следи да су тачке A, B, P и S на кругу. Одатле је $\sphericalangle QSP = \sphericalangle ABP = 90^\circ = \sphericalangle QCP$, што значи да тачка S лежи на кругу над пречником PQ. Аналогно и тачка R лежи на том кругу.



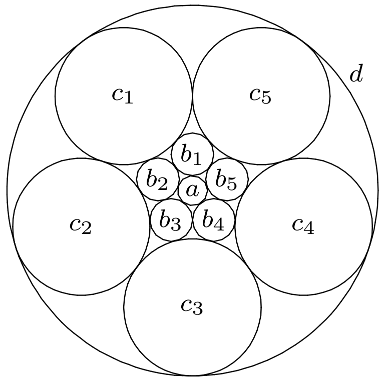
1.3. Ако је F тачка на дијагонали AC таква да је $CF = BC$, а G средиште лука AE, онда изломљена линија CFG дели фигуру на два подударна дела, од којих је један слика другог при ротацији око C за 45°.



1.4. Означимо $d = p_2 - p_1$. Ако d није дељиво са 2, 3 или 5, онда је бар један од бројева $p_2, \ldots, p_7$ дељив са 2, 3 или 5 и самим тим сложен; дакле, $30 \mid d$. Међутим, из $6d < p_7 < 1000$ следи $d \leqslant 166$, па d не може да буде дељиво са 7. Зато је један од бројева p_i дељив са 7, и он мора бити једнак 7: дакле, $p_1 = 7$. Провером вредности $d = 30, 60, 90, 120, 150$ добијамо једино решење за $d = 150$. Дакле, тражени бројеви су $7, 157, 307, 457, 607, 757, 907$.

2.1. Није тешко конструисати пример 12 кругова, од којих сваки додирује тачно пет других: поставимо пет једнаких кругова b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 у позитивном смеру тако да b_i додирује a, b_{i-1} и b_{i+1} за $1 \leqslant i \leqslant 5$ (индекси су по модулу 5), затим пет једнаких кругова c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 тако да c_i додирује c_{i-1}, c_{i+1}, b_i и b_{i+1}, и најзад круг d који споља додирује кругове $c_1, \ldots, c_5$.

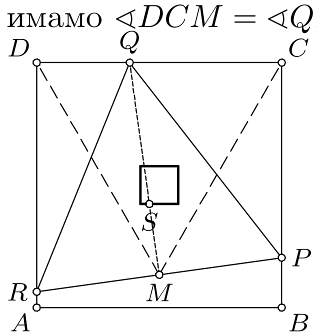
Применимо сада директну хомотетију која слика круг d у круг a и заротирајмо је око центра за угао од 36° у негативном смеру. Нека ова хомотетија слика x у x'. Сваки од кругова c_i' додирује круг b_i. Тако кругови a', b_i', c_i', b_i, c_i, d $(1 \leqslant i \leqslant 5)$ чине пример 22 круга, од којих сваки додирује по пет других.



Најзад, како је $1996 = 159 \cdot 12 + 4 \cdot 22$, пример са 1996 кругова можемо да добијемо постављањем 159 копија првог примера и 4 копије другог примера.

2.2. Нека су без смањења општости темена троугла P, Q и R на страницама BC, CD и DA, редом.

Посматрајмо средиште M дужи PR. Четвороугао $CPMQ$ је тетиван јер је $\sphericalangle QMP = \sphericalangle QCP = 90^\circ$, па сад имамо $\sphericalangle DCM = \sphericalangle QPM = 60^\circ$. Аналогно је $\sphericalangle CDM = 60^\circ$, па је $\triangle CDM$ једнакостраничан, тј. тачка M је фиксна.



Тачка Q на дужи CD задовољава $\sphericalangle MQC = \sphericalangle MRD \geqslant \sphericalangle MAD = 75^\circ$ и, слично, $\sphericalangle MQC \leqslant 105^\circ$. Следи да је геометријско место тачке Q дуж Q_1Q_2, где су Q_1 и Q_2 тачке на дужи CD такве да је $\sphericalangle MQ_1C = 75^\circ$ и $\sphericalangle MQ_2C = 105^\circ$. За центар S троугла PQR важи $\overrightarrow{MS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MQ}$, дакле, њено геометријско место је дуж S_1S_2, где је $\overrightarrow{MS_i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MQ_i}$, $i \in \{1, 2\}$. Лако се рачуна да су S_1 и S_2 тачке такве да је $\overrightarrow{OS_1} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OS_2} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\overrightarrow{OB}$, где је O центар квадрата $ABCD$.

Према томе, геометријско место тачке S су странице квадрата хомотетичног квадрату $ABCD$, са центром хомотетије у O и коефицијентом $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

2.3. Квадрирањем једнакости $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1996} - \sqrt{z}$ добијамо $2\sqrt{xy} = z + 1996 - x - y - 2\sqrt{1996z}$, а поновним квадрирањем

$$4(z + 1996 - x - y)\sqrt{1996z} = (z + 1996 - x - y)^2 + 4 \cdot 1996z - 4xy.$$

Како је $x + y < 1996$, одавде следи да је $\sqrt{1996z}$ рационално, па је $1996z$ потпун квадрат. Пошто је $1996 = 2^2 \cdot 499$ и 499 је прост број, z је облика $499w^2$. Аналогно је $x = 499u^2$ и $y = 499v^2$, па полазна једначина постаје $u + v + w = 2$ $(u, v, w \in \mathbb{N}_0)$. Закључујемо да су једина решења $(x, y, z) = (499, 499, 0)$ са пермутацијама.

2.4. Следеће неједнакости важе по неједнакости између средина:

$$\begin{aligned} x_1^2 + \tfrac{1}{3}x_2^2 &\geqslant \tfrac{2}{\sqrt{3}}x_1x_2, & \tfrac{2}{3}x_2^2 + \tfrac{1}{2}x_3^2 &\geqslant \tfrac{2}{\sqrt{3}}x_2x_3, \\ \tfrac{1}{2}x_3^2 + \tfrac{2}{3}x_4^2 &\geqslant \tfrac{2}{\sqrt{3}}x_3x_4, & \tfrac{1}{3}x_4^2 + x_5^2 &\geqslant \tfrac{2}{\sqrt{3}}x_4x_5. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Сабирањем добијамо тражену неједнакост за $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

С друге стране, за $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = 1 : \sqrt{3} : 2 : \sqrt{3} : 1$ све четири неједнакости у $(*)$ постају једнакости. Дакле, највећа вредност параметра a је $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

<u>*Напомена.*</u> Може да се постави и општије питање: за коју највећу константу неједнакост $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \geqslant a(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)$ важи за све реалне x_i, где је $n \in \mathbb{N}$ дато. У овом случају одговор је $a_{max} = \sec\frac{\pi}{n+1}$, а неједнакост се добија сабирањем неједнакости

$$\frac{\sin\frac{(k+1)\pi}{n+1}}{\sin\frac{k\pi}{n+1}}x_k^2 + \frac{\sin\frac{k\pi}{n+1}}{\sin\frac{(k+1)\pi}{n+1}}x_{k+1}^2 \geqslant 2x_kx_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

3.1. Заменом $x = t$ и $y = 1$ добијамо

$$f(t) < f(t+1) + f(t) + f(1) = (a+1)t + (b+c).$$

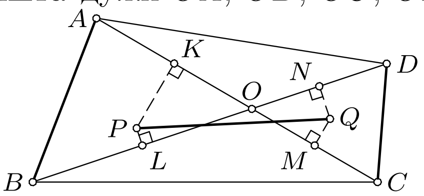
Одавде је $f(x+y) + f(x) + f(y) < 2(a+1)(x+y) + 3(b+c)$, тј.

$$xy + ax + by + c < 2(a+1)(x+y) + 3(b+c),$$

што не важи за довољно велике x и y.

<u>*Напомена.*</u> Задатак може да се уради и грубом силом, записивањем једначина за $x + y \leqslant 6$ и решавањем добијеног система.

3.2. Означимо са K, L, M, N редом средишта дужи OA, OB, OC, OD. Пројекција дужи PQ на праву AC је дуж KM, па је $PQ \geqslant KM = \frac{1}{2}AC$. Аналогно је $PQ \geqslant \frac{1}{2}BD$, па сабирањем добијамо $4PQ \geqslant AC + BD > AB + CD$.



<u>*Напомена.*</u> Константа 4 се не може побољшати. На пример, ако је $ABCD$ једнакокраки трапез са $AD \parallel BC$, $\sphericalangle AOB = x$ и $BC = k \cdot AD$, онда $\frac{AB+CD}{PQ} \to 4$ када $x, k \to 0$.

3.3. Нека скуп $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ има тражено својство. Напишимо свако $x_i \in S$ у облику $x_i = 3^{r_i}b_i$, где су $r_i \geqslant 0$ и $3 \nmid b_i$. Јасно је да свих k бројева b_i морају бити различити. Како непарних бројева мањих од $2n$ који нису дељиви са 3 има $[\frac{2n+1}{3}]$, следи да је $k \leqslant [\frac{2n+1}{3}]$.

С друге стране, скуп непарних бројева у интервалу $[\frac{2n}{3}, 2n]$ има тачно $[\frac{2n+1}{3}]$ елемената, и ниједан од њих није дељив другим.

3.4. Поделимо куглице у два подскупа A и B са по 500 куглица и подскуп C са 996 куглица. За почетак ћемо упоредити A и B.

Случај (1°) A и B су једнаке тежине. Онда је по једна лажна куглица у A и у B, или су обе у C. Поделимо A на подскупове A_1 и A_2 са по 250 куглице и упоредимо их.

(1°1) A_1 и A_2 су једнаке тежине. Тада све куглице у A (и у B) морају бити исправне, а обе лажне су у C. Упоређивањем скупа C са 996 куглица из $A \cup B$ сазнаћемо да ли су лажне лакше или теже.

(1°2) Нпр. A_1 је теже од A_2. Тада A и B садрже по једну лажну куглицу. Упоређивањем скупа A са 500 (исправних) куглица из C добићемо жељену информацију.

Случај (2°) Нпр. A је теже од B. Онда у тачно једном од скупова A и B има лажних куглица. Поделимо C на подскупове C_1 и C_2 са по 498 куглица и упоредимо их.

(2°1) C_1 и C_2 су једнаке тежине. Тада су у C све куглице исправне. Упоредимо A са 500 куглица из C: ако су исте тежине, онда су обе лажне куглице у B (и лакше су), у супротном су обе у A (и теже су).

(2°2) C_1 и C_2 нису исте тежине. Онда је тачно једна лажна куглица у $A \cup B$. Поделимо A на подскупове A_1 и A_2 са по 250 куглица и упоредимо их: ако су исте тежине, лажна куглица је у B (и лакша је), а у супротном, она је у A (и тежа је).