САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

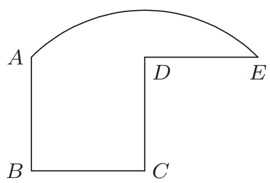
Бар, 13. април 1996.

Први разред

1. У граду квадратног облика има 22 улице. Уведен је координатни систем, при чему су улице на правим $x = n$ и $y = k$, $n, k \in \{0, 1, \ldots, 10\}$. Пет бизнисмена имају канцеларије у тачкама $A(0, \frac{43}{5})$, $B(\frac{17}{5}, 2)$, $C(\frac{16}{5}, 9)$, $D(\frac{17}{2}, 0)$, $E(\frac{46}{5}, 8)$. Они треба да се нађу на некој раскрсници. Одредити раскрсницу тако да збир пређених путева бизнисмена до те раскрснице буде минималан. (Бизнисмени путују само дуж улица.)

2. На страницама BC и CD квадрата $ABCD$ узете су редом тачке P и Q тако да је права PQ тангента круга са центром A и полупречником AB. Дужи AP и AQ секу дијагоналу BD у тачкама R и S. Доказати да тачке C, P, Q, R, S припадају једном кругу.

3. Фигуру са слике поделити на две подударне фигуре линијом која са границом фигуре има тачно две заједничке тачке.



($ABCD$ је квадрат, троугао CDE је једнакокрако-правоугли, а лук AE припада кружници са центром C.)

4. Наћи 7 различитих простих бројева $p_1, p_2, \ldots, p_7$ који су мањи од 1000 и за које важи

$$p_2 - p_1 = p_3 - p_2 = p_4 - p_3 = p_5 - p_4 = p_6 - p_5 = p_7 - p_6.$$

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Бар, 13. април 1996.

Други разред

1. Показати да се у равни може нацртати 1996 кружница тако да сваке две имају највише једну заједничку тачку и да свака од њих додирује тачно пет других.

2. Одредити геометријско место тежишта свих једнакостраничних троуглова чија темена припадају страницама датог квадрата.

3. Решити једначину $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{1996}$ у скупу ненегативних целих бројева.

4. Наћи максималну вредност реалног броја a за коју неједнакост

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2 \geqslant a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5)$$

важи за сваких пет реалних бројева x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Бар, 13. април 1996.

Трећи и четврти разред

1. Нека су a, b, c ненегативни цели бројеви. Доказати да не постоји функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таква да је

$$f(x+y) + f(x) + f(y) = xy + ax + by + c \quad \text{за све } x, y \in \mathbb{N}.$$

2. Дијагонале конвексног четвороугла $ABCD$ секу се у тачку O. Означимо са P и Q редом центре описаних кругова троуглова ABO и CDO. Доказати да је

$$AB + CD \leqslant 4PQ.$$

3. Дат је природан број n. Наћи максималан природни број за који скуп $S_n = \{1, 3, \ldots, 2n-1\}$ садржи k-елементни подскуп, у коме не постоје два различита броја таква да је један дељив другим.

4. Међу 1996 наизглед једнаких куглица налазе се две неисправне које се по тежини разликују од исправних. Све исправне куглице су исте тежине. Две неисправне куглице су такође исте тежине, али не знамо да ли су оне лакше или теже од исправних. Доказати да се помоћу три мерења на теразијама без тегова може утврдити да ли су неисправне куглице лакше или теже од исправних.
(Не захтева се да неисправне куглице буду идентификоване.)

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.