37. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Мумбај, Индија – среда, 10. јул 1996.

1. Нека је $ABCD$ правоугаона табла са $AB = 20$ и $BC = 12$. Табла је разложена на 20×12 јединичних квадрата. Нека је r природан број. Новчић може да се премести из једног квадрата у други ако и само ако је растојање њихових центара једнако $\sqrt{r}$. Задатак је да се нађе низ премештања који преводи новчић из квадрата коме је A једно теме у квадрат коме је B једно теме.

(а) Доказати да се задатак не може извршити ако је r дељиво са 2 или 3.

(б) Доказати да се задатак може извршити ако је $r = 73$.

(в) Може ли се задатак извршити ако је $r = 97$? *(Финска)*

2. Нека је P унутрашња тачка троугла ABC таква да је

$$\sphericalangle APB - \sphericalangle ACB = \sphericalangle APC - \sphericalangle ABC.$$

Нека су D и E центри кругова уписаних у троуглове APB и APC, редом. Доказати да се AP, BD и CE секу у једној тачки. *(Канада)*

3. Нека је $\mathbb{N}_0$ скуп свих ненегативних целих бројева. Наћи све функције $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ такве да је

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

за све $m, n \in \mathbb{N}_0$. *(Румунија)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

37. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Мумбај, Индија – четвртак, 11. јул 1996.

4. Природни бројеви a и b су такви да су бројеви $15a+16b$ и $16a-15b$ квадрати природних бројева. Наћи најмању могућу вредност коју може узети мањи од та два квадрата. *(Русија)*

5. Дат је конвексан шестоугао $ABCDEF$ такав да је AB паралелно са DE, BC паралелно са EF и CD паралелно са FA. Нека R_A, R_C и R_E означавају полупречнике кругова описаних око троуглова FAB, BCD и DEF, редом, и нека p означава обим шестоугла. Доказати да важи

$$R_A+R_C+R_E \geqslant \frac{p}{2}.$$

(Јерменија)

6. Дати су природни бројеви n, p, q такви да је $n > p+q$. Нека су $x_0, x_1, \ldots, x_n$ цели бројеви који задовољавају следеће услове:

(i) $x_0 = x_n = 0$;

(ii) за сваки цео број i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ важи $x_i - x_{i-1} = p$ или $x_i - x_{i-1} = -q$.

Доказати да постоји пар (i, j), где је $i < j$ и $(i, j) \neq (0, n)$, такав да је $x_i = x_j$. *(Француска)*

Language: Serbian

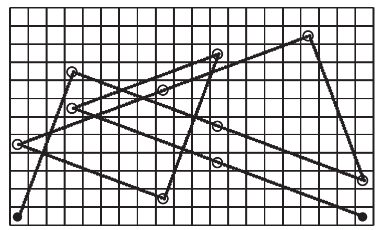
Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

РЕШЕЊА

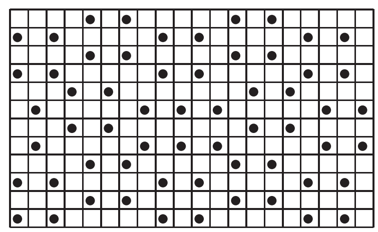
1. Радимо са решетком $\mathscr{A} = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 19,\ 0 \leqslant y \leqslant 11\}$. Сваки корак је облика $(x,y) \to (x+a, y+b)$, где су $a,b \in \mathbb{Z}$ и $a^2+b^2=r$, а циљ је да се оваквим корацима по решетки $\mathscr{A}$ стигне од тачке $(0,0)$ до $(19,0)$.

(а) Ако $2 \mid r$, онда $2 \mid a+b$ кад год је $a^2+b^2=r$ $(a,b \in \mathbb{Z})$, па парност збира $x+y$ остаје иста после сваког корака. Зато из $(0,0)$ не можемо стићи до $(19,0)$.

Ако $3 \mid r$, онда $3 \mid a,b$, па x и y остају дељиви са 3, и опет се не може доћи до тачке $(19,0)$.



слика 1



слика 2

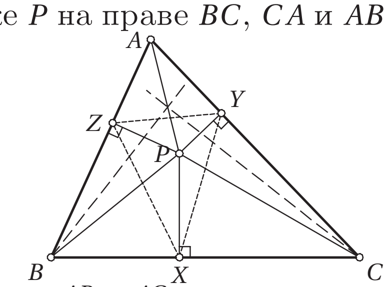
(б) Пошто је $r = 73 = 8^2+3^2$, сваки корак је облика $(x,y) \to (x \pm 8, y \pm 3)$ или $(x,y) \to (x \pm 3, y \pm 8)$. Слика 1 приказује једно решење.

(в) Сада је $97 = 9^2+4^2$. Разликујемо две врсте потеза: *водоравне* облика $(x,y) \to (x \pm 9, y \pm 4)$ и *усправне* облика $(x,y) \to (x \pm 4, y \pm 9)$.

Посматрајмо скупове $\mathscr{B} = \{(x,y) \in \mathscr{A} \mid 4 \leqslant y \leqslant 7\}$ и $\mathscr{C} = \{(x,y) \in \mathscr{A} \mid y < 4 \text{ или } y > 7\}$. При сваком водоравном потезу прелазимо из скупа $\mathscr{B}$ у скуп $\mathscr{C}$ или обрнуто, док су водоравни потези увек унутар скупа $\mathscr{C}$. С друге стране, водоравни потези мењају парност координате x, а усправни је не мењају. Према томе, да бисмо дошли из тачке $(0,0)$ у $(19,0)$, треба нам непаран број водоравних потеза, али на такав начин, почевши из скупа $\mathscr{C}$, завршићемо у скупу $\mathscr{B}$, а $(19,0) \notin \mathscr{B}$. Дакле, одговор је *не*.

Напомена. Слика 2 приказује сва поља до који се може стићи у делу **(в)**. Јасно је да се овај део задатка и овако може решити.

2. Нека су X, Y, Z редом подножја нормала из тачке P на праве BC, CA и AB. Из тетивних четвороуглова $AZPY$, $BXPZ$ и $CXPY$ следи



$$\begin{array}{lcl} \sphericalangle XZY = \sphericalangle APB - \sphericalangle C & & XY = PC \sin \sphericalangle C \\ \sphericalangle XYZ = \sphericalangle APC - \sphericalangle B & \text{и} & XZ = PB \sin \sphericalangle B. \end{array}$$

Из услова задатка следи да је троугао XYZ једнакокраки и $XY = XZ$, одакле следи $PB \sin \sphericalangle B = PC \sin \sphericalangle C$, тј. по синусној теореми $\frac{AB}{PB} = \frac{AC}{PC}$. Следи да симетрале углова ABP и ACP деле дуж AP у истом односу, тј. секу се на AP.

Друго решење. За ма коју тачку X, нека X' означава њену слику при инверзији $\Psi_{A,r}$. Услов задатка постаје $\sphericalangle B'C'P' = \sphericalangle C'B'P'$, тј. $B'P' = C'P'$. Како је $B'P' = \frac{r^2}{AP \cdot AB} BP$ и $C'P' = \frac{r^2}{AP \cdot AC} CP$ одатле следи $AC/AB = PC/PB$.

3. Заменом $m = n = 0$ добијамо $f(0) = 0$ и одатле $f(f(n)) = f(n)$ за све n.

Нула-функција је тривијално решење. Претпоставимо да је $f \not\equiv 0$. Посматрајмо најмање $a \in \mathbb{N}$ за које је $f(a) = a$ (такво a постоји јер је $f(f(n)) = f(n)$ за све $n \in \mathbb{N}$). Из (1) следи индукцијом да је $f(ka) = ka$ за све $k \in \mathbb{N}$. Шта више, како је $f(ka+i) = f(i + f(ka)) = ka + f(i) \neq ka + i$ за $0 < i < a$, једнакост $f(x) = x$ важи ако и само ако $a \mid x$. Између осталог, $a \mid f(n)$ за $n \in \mathbb{N}$. Ако сада означимо $f(i) = an_i$ за $i = 0, 1, \ldots, a-1$ (при чему је $n_0 = 0$ и $n_i \in \mathbb{N}_0$ за $1 \leqslant i < a$), добијамо

$$f(n) = (k + n_i)a, \quad \text{где је} \quad n = ka + i \quad \text{и} \quad 0 \leqslant i < a.$$

Осим нула-функције, и све овакве функције су решења: заиста, ако убацимо $m = ka + i$ и $n = la + j$, добијамо $f(m + f(n)) = f(ka + i + f(la + j)) = f((k + l + n_j)a + i) = (k + l + n_j + n_i)a = f(f(m)) + f(n)$.

4. Означимо $15a + 16b = x^2$ и $16a - 15b = y^2$, где су $x, y \in \mathbb{N}$. Тада је

$$x^4 + y^4 = (15a + 16b)^2 + (16a - 15b)^2 = (15^2 + 16^2)(a^2 + b^2) = 481(a^2 + b^2).$$

Дакле, $481 = 13 \cdot 37 \mid x^4 + y^4$. С друге стране, познато је следеће тврђење:

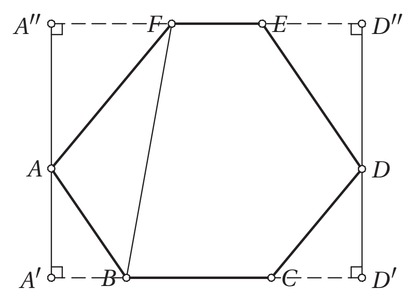
Лема. Ако је $p > 2$ прост број и $x, y \in \mathbb{Z}$ такви да $p \mid x^4 + y^4$ и $p \nmid xy$, онда $8 \mid p - 1$.

Доказ. Нека је $y_1 \in \mathbb{Z}$ такво да је $yy_1 \equiv 1 \pmod{p}$. Тада $p \mid (xy_1)^4 + 1 \mid (xy_1)^8 - 1$, тј. поредак броја xy_1 по модулу p је 8, одакле следи да $8 \mid p - 1$. $\square$

Како $13 \not\equiv 1$ и $37 \not\equiv 1 \pmod{8}$, следи да су x и y дељиви и са 13 и са 37, па $481 \mid x, y$. С друге стране, $x = y = 481$ се достиже за $a = 31 \cdot 481$ и $b = 481$.

Друго решење. Важи $15x^2 + 16y^2 = 481a^2$. Директно се проверава да је $15x^2 + 16y^2$ дељиво са 13 (или 37) ако и само ако су такви и x и y. Према томе $481 \mid x, y$.

5. Означимо $\sphericalangle FAB = \sphericalangle CDE = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF = \beta$ и $\sphericalangle BCD = \sphericalangle EFA = \gamma$. Имамо $2R_A = \frac{BF}{\sin\alpha}$. Нека су A' и A'' редом подножја нормала из тачке A на праве BC и EF, а D' и D'' подножја нормала из D на BC и EF. Како је $BF \geqslant A'A'' = FA\sin\gamma + AB\sin\beta$ и $BF \geqslant D'D'' = CD\sin\gamma + DE\sin\beta$, следи да је



$$4R_A \geqslant \frac{A'A'' + D'D''}{\sin\alpha} = (CD + FA)\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + (AB + DE)\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Сабирањем са аналогним неједнакостима за R_C и R_E добијамо

$$\begin{aligned}
&4(R_A + R_C + R_E) \geqslant \\
&(AB + DE)\left(\tfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} + \tfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right) + (BC + EF)\left(\tfrac{\sin\beta}{\sin\gamma} + \tfrac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right) + (CD + FA)\left(\tfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha} + \tfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right) \geqslant \\
&2(AB + DE) + 2(BC + EF) + 2(CD + FA) = 2p,
\end{aligned}$$

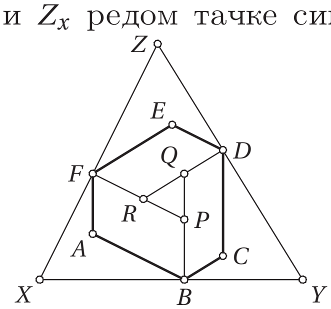
што смо и желели да докажемо. Једнакост важи ако и само ако је $\alpha = \beta = \gamma = 120^\circ$ и $BF \perp BC$ итд, што важи само у правилном шестоуглу.

Друго решење. Нека су P, Q и R тачке такве да су $FABP$, $BCDQ$ и $DEFR$ паралелограми, а X, Y, Z тачке такве да праве XY, YZ, ZX редом пролазе кроз B, D, F и нормалне су на BP, DQ, FR. Како је $2R_A = PX$, $2R_C = QY$ и $2R_E = RZ$, треба доказати да важи

$$PX + QY + RZ \geqslant PF + PB + QB + QD + RD + RF. \qquad (*)$$

Означимо $YZ = x$, $ZX = y$ и $XY = z$. Нека су Y_x и Z_x редом тачке симетричне тачкама Y и Z у односу на симетралу $\sphericalangle ZXY$. Тада је $y \cdot PB + z \cdot PF = XZ_x \cdot PB + XY_x \cdot PF = 2P_{XZ_xP} + 2P_{XY_xP} = 2P_{XY_xPZ_x} \leqslant Y_xZ_x \cdot PX = x \cdot PX$, па добијамо

$$PX \geqslant \frac{z}{x} \cdot PF + \frac{y}{x} \cdot PB. \qquad (1)$$



Означимо са P', Q', R' редом средишта дужи QR, RP, PQ. Сабирањем (1) са аналогним неједнакостима за QY и RZ добијамо

$$\begin{aligned}
PX + QY + RZ \geqslant\ & \left(\tfrac{y}{x} \cdot PB + \tfrac{x}{y} \cdot QB\right) + \left(\tfrac{z}{y} \cdot QD + \tfrac{y}{z} \cdot RD\right) + \left(\tfrac{x}{z} \cdot RF + \tfrac{z}{x} \cdot PF\right) \\
=\ & \left(\tfrac{x}{y} + \tfrac{y}{x}\right) R'B + \left(\tfrac{y}{z} + \tfrac{z}{y}\right) P'D + \left(\tfrac{z}{x} + \tfrac{x}{z}\right) Q'F + \tfrac{1}{2}\delta,
\end{aligned} \qquad (2)$$

$$\text{где је} \quad \delta = \left(\tfrac{x}{y} - \tfrac{y}{x}\right) PQ + \left(\tfrac{y}{z} - \tfrac{z}{y}\right) QR + \left(\tfrac{z}{x} - \tfrac{x}{z}\right) RP.$$

Најзад, троуглови PQR и XYZ су слични, тј. $\frac{QR}{YZ} = \frac{RP}{ZX} = \frac{PQ}{XY} = k$, па је $\delta = k(\frac{x}{y} - \frac{y}{x})z + k(\frac{y}{z} - \frac{z}{y})x + k(\frac{z}{x} - \frac{x}{z})y = 0$. Сада $(*)$ следи из (2) коришћењем неједнакости $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$, $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geqslant 2$ и $\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \geqslant 2$.

Напомена. Неједнакост $(*)$ је заправо општија варијанта Ердош-Морделове неједнакости која се слично доказује.

6. Не умањујући општост, можемо да сматрамо да је нзд$(p, q) = 1$.

Како је $x_i - x_{i-1} \equiv p \pmod{p+q}$ за све i, важи $0 = x_n - x_0 \equiv np \pmod{p+q}$ и одатле $p+q \mid n$. Такође, $x_{i+p+q} \equiv x_i + (p+q)p \equiv x_i \pmod{p+q}$ за све $0 \leqslant i \leqslant n-p-q$.

Посматрајмо низ $y_i = x_{i+p+q} - x_i$, $i = 0, \dots, n-p-q$. По претходном, сви чланови овог низа су дељиви са $p+q$. Шта више, $y_{i+1} - y_i = (x_{i+p+q+1} - x_{i+p+q}) - (x_{i+1} - x_i)$ је једнако 0 или $\pm(p+q)$. Према томе, ако ниједно y_i није једнако 0, онда сви бројеви y_i морају да буду истог знака. Међутим, то је немогуће јер је $y_0 + y_{p+q} + \cdots + y_{n-p-q} = x_n - x_0 = 0$. Следи да је $y_i = 0$, тј. $x_{i+p+q} = x_i$ за неко i.