МАЛА ОЛИМПИЈАДА

Бар, 14.04.1996.

1. Нека је $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ фамилија подскупова скупа $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ који задовољавају следеће услове:

(i) свака два различита скупа из $\mathcal{F}$ имају тачно један заједнички елемент;

(ii) сваки елемент S је садржан у тачно k скупова из $\mathcal{F}$.

Може ли n да буде једнако 1996?

2. Дат је скуп 1996 једнаких кругова у равни такав да никоје две немају заједничку унутрашњу тачку. Доказати да међу овим круговима постоји један који додирује највише три од преосталих кругова.

3. Низ $\{x_n\}$ је дат изразом

$$x_n = \frac{1}{4}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n-1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2n-1}\right) \quad \text{за } n \in \mathbb{N}.$$

Доказати да се сваки члан x_n може представити у облику збира квадрата два узастопна цела броја.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

РЕШЕЊА

1. Пребројаћемо на два начина уређене тројке (x, A_i, A_j) где је x елемент подскупова A_i и A_j $(i \neq j)$. Сваки елемент x је садржан у k подскупова, па подскупове A_i и A_j можемо да изаберемо на $k(k-1)$ начина. Следи да тројки (x, A_i, A_j) има $nk(k-1)$.

С друге стране, за свака два подскупа A_i и A_j елемент x је једнозначно одређен, па оваквих тројки има $n(n-1)$. Према томе, $n(n-1) = nk(k-1)$, одакле добијамо $n = k^2 - k + 1$. Како за $n = 1996$ овакво k не постоји, одговор је *не*.

2. Означимо са $A_1, A_2, \ldots, A_n$ центре датих кругова, а са r њихов полупречник. Нека је без смањења општости A_1 теме конвексног омотача скупа $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Ако круг са центром A_1 додирује четири круга чији су центри редом A_2, A_3, A_4, A_5, онда из $A_2A_3 \geqslant A_1A_2 = A_1A_3 = r$ следи $\sphericalangle A_2A_1A_3 \geqslant 60^\circ$, и аналогно $\sphericalangle A_3A_1A_4 \geqslant 60^\circ$ и $\sphericalangle A_4A_1A_5 \geqslant 60^\circ$. Али онда је $\sphericalangle A_2A_1A_5 \geqslant 180^\circ$, што је контрадикција.

3. Ако је $x_n = y^2 + (y+1)^2 = 2y^2 + 2y + 1$ за $y \geqslant 0$, онда је $y = \frac{\sqrt{2x_n - 1} - 1}{2}$. Како је $2 \pm \sqrt{3} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3})^2$, имамо

$$\begin{aligned} 2x_n - 1 = & \ \tfrac{1}{2}\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^{2n-1} + \left(2-\sqrt{3}\right)^{2n-1} - 2\right) \\ = & \ \tfrac{1}{4}\left(\left(1+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^{n-1} + \left(1-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^{n-1}\right)^2. \end{aligned}$$

Ако је $\left(1+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^{n-1} = u_n + v_n\sqrt{3}$ за неке целе бројеве u_n, v_n, онда је и $\left(1-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^{n-1} = u_n - v_n\sqrt{3}$, па је по претходном $2x_n - 1 = u_n^2$; u_n је очигледно непарно, и отуда $y \in \mathbb{Z}$.