13. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Бакау, Румунија – 30. април 1996.

1. Нека је O центар описане кружнице, а T тежиште троугла ABC. Ако су R и r редом полупречници описаног и уписаног круга троугла ABC, доказати да је
$$OT \leqslant \sqrt{R(R-2r)}\,.$$
(Грчка)

2. Нека је $p > 5$ прост број и $X = \{p - n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Доказати да X садржи два различита елемента x, y тако да је $x \neq 1$ и $x \mid y$. *(Албанија)*

3. У конвексном петоуглу $ABCDE$, тачке M, N, P, Q, R су средишта страница AB, BC, CD, DE, EA редом. Ако се дужи AP, BQ, CR, DM секу у једној тачки, доказати да и дуж EN садржи ту тачку. *(Југославија)*

4. Доказати да постоји подскуп A скупа $\{1, 2, 3, \ldots, 2^{1996} - 1\}$ који има следеће особине:

(i) $1 \in A$ и $2^{1996} - 1 \in A$;

(ii) сваки елемент из $A \setminus \{1\}$ је збир два (не обавезно различита) елемента из A;

(iii) A нема више од 2012 елемената. *(Румунија)*

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.