36. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Врбас, 15.04.1995.

Први разред

1. Колико има петочланих подскупова S скупа $A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ за које важи

$$\{r(x+y) \mid x, y \in S,\ x \neq y\} = A,$$

где $r(n)$ означава остатак при дељењу n са 10?

2. Дат је оштроугли троугао ABC. Нека је D подножје висине из C, E поножје нормале из D на AC, и F тачка на дужи DE таква да је $DF : FE = DA : DB$. Доказати да су праве BE и CF међусобно нормалне.

3. Правилан 1995-угао уписан је у круг. Из неке тачке P на кругу повучене су тетиве до свих његових темена. Доказати да је збир дужина неких 1000 тетива једнак збиру дужина преосталих 995 тетива.

4. Доказати да постоји скуп S од 1995 различитих природних бројева за које важе следећа два услова:

(i) сваки збир два или више различитих бројева из S је сложен број;

(ii) бројеви у S су узајамно прости по паровима.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

36. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Врбас, 15.04.1995.

Други разред

1. Доказати да број $2^{2^{1995}}-1$ има бар 1995 различитих простих фактора.

2. Конвексан шестоугао $ABCDEF$ је уписан у круг. Ако је $AB\cdot CD\cdot EF=BC\cdot DE\cdot FA$, доказати да се дијагонале AD, BE и CF секу у једној тачки.

3. Нека је M конвексан многоугао обима p. Доказати да се скуп страница многоугла M може разбити на два дисјунктна подскупа A и B тако да је

$$|s_A-s_B|\leqslant\frac{p}{3},$$

где су s_A и s_B редом збирови дужина страница у A и B.

4. Квадрат 5×5 подељен је на 25 јединичних квадрата. У њих играчи A и B наизменично уписују бројеве. Играч A почиње игру и увек уписује јединицу, а играч B увек уписује нулу. Када је уписано 25 бројева, рачунају се збирови у свим квадратима 3×3 и са M означава највећи од тих збирова. Доказати:

(а) Играч A увек може играти тако да буде $M\geqslant6$.

(б) Играч B увек може играти тако да буде $M\leqslant6$.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

36. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Врбас, 15.04.1995.

Трећи и четврти разред

1. Ако је p прост број, доказати да је број

$$\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p}-123456789$$

дељив са p.

2. За полином $P(x)$ са целим коефицијентима кажемо да је дељив природним бројем m ако је број $P(a)$ дељив са m за сваки цео број a.

Ако је полином $P(x) = a_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ дељив са m, доказати да је тада и број $n!a_0$ дељив са m.

3. Тетива AB и пречник CD круга k узајамно су нормални и секу се у тачки M. Нека је P тачка лука ACB различита од A, B и C. Права PM поново сече круг у тачки Q, а права PD сече тетиву AB у тачки R. Доказати да је $RD > MQ$.

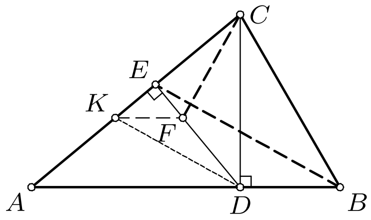
4. Дат је тетраедар $ABCD$. Нека су P и Q редом средишта ивица AB и CD, а O и S редом центри описане и уписане сфере. Ако тачке P, Q и S припадају истој правој, доказати да и тачка O припада тој правој.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

РЕШЕЊА

1.1. Ако је $S=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ подскуп са жељеним својствима, онда међу 10 збирова a_i+a_j $(1\leqslant i<j\leqslant 5)$ има тачно 5 непарних, па је збир σ тих 10 збирова непаран. Међутим, $\sigma=4(a_1+a_2+\cdots+a_5)$ је очигледно парно - контрадикција. Дакле, такав скуп S не постоји.

1.2. Нека је K тачка на страници AC таква да је $FK\parallel AB$. Тада је $KF\perp CD$ и $DF\perp KC$, што значи да је F ортоцентар троугла CDK и $CF\perp DK$. Међутим, по Талесовој теореми је $\frac{AK}{KE}=\frac{DF}{FE}=\frac{AD}{DB}$, одакле следи да је $DK\parallel EB$, па имамо и $CF\perp EB$.



1.3. Означимо темена датог 1995-тоугла са $A_1,A_2,\dots,A_{1995}$, тим редом. Како је $1995=3\cdot 665$, троуглови $A_kA_{k+665}A_{k+1330}$ су једнакостранични за $k=1,2,\dots,665$. Познато је следеће тврђење:

Лема. Ако је ABC једнакостранични троугао, а P тачка на краћем луку BC његовог описаног круга, онда је $PA=PB+PC$.

Доказ. Следи из Птоломејеве теореме у четвороуглу $ABPC$. $\square$

По леми, у свакој тројци $(PA_k,PA_{k+665},PA_{k+1330})$ за $k=1,\dots,665$, збир неке две дужине је једнак трећој. Сада је довољно да узмемо по две дужине из 330 тројки и по једну из преосталих 335: збир овако изабраних 995 дужина је једнак збиру осталих 1000.

1.4. Нека су $p_1<p_2<\cdots<p_{1995}$ прости бројеви и нека је $a_i=N!+p_i$ за $i=1,\dots,1995$, где је $N=1995p_{1995}$. Покажимо да бројеви $a_1,a_2,\dots,a_{1995}$ задовољавају услове задатка:

(i) За $i_1<i_2<\cdots<i_k$ важи $A=p_{i_1}+\cdots+p_{i_k}<N$. Следи да је збир $a_{i_1}+\cdots+a_{i_k}=kN!+A$ дељив са A и самим тим сложен.

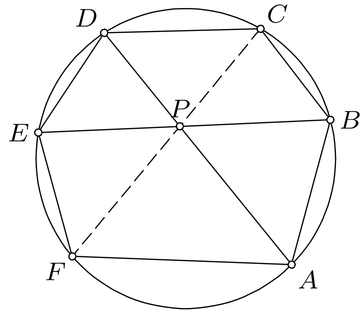
(ii) За $i<j$ важи $p_j-p_i\mid N$ јер је $p_j-p_i<N$, па је $(a_i,a_j)=(N!+p_i,p_j-p_i)=(p_i,p_j-p_i)=1$.

2.1. Означимо $F_k=2^{2^k}+1$. Како је $2^{2^n}-1=F_{n-1}(2^{2^{n-1}}-1)$, једноставном индукцијом следи

$$2^{2^n}-1=F_n-2=F_0F_1F_2\cdots F_{n-1}. \qquad (*)$$

Из $(*)$ такође следи да су бројеви F_k узајамно прости у паровима: ако $d=\text{нзд}(F_k,F_m)$ за $k<m$, онда $2\nmid d$ и $d\mid F_m-F_0F_1\cdots F_{m-1}=2$, па је $d=1$. Према томе, за $n\in\mathbb{N}$, $2^{2^n}-1$ је производ n узајамно простих природних бројева већих од 1, одакле следи тврђење.

2.2. Нека је F' друга пресечна тачка праве CP са кругом. Из сличности троуглова PAB и PED следи $\frac{AB}{DE} = \frac{PA}{PE} = \frac{PB}{PD}$, па важи $\frac{AB^2}{DE^2} = \frac{PA \cdot PB}{PD \cdot PE}$. На исти начин добијамо $\frac{CD^2}{F'A^2} = \frac{PC \cdot PD}{PA \cdot PF'}$ и $\frac{EF'^2}{BC^2} = \frac{PE \cdot PF'}{PB \cdot PC}$. Множењем добијамо $\frac{AB \cdot CD \cdot EF'}{BC \cdot DE \cdot F'A} = 1$, дакле $F' \equiv F$.



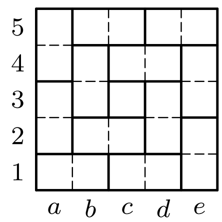
Напомена. Тврђење задатка је варијанта тригонометријске Чевине теореме за праве AD, CF и EB у троуглу ACE. Заиста, $\frac{EF}{FA} = \frac{\sin\sphericalangle ECF}{\sin\sphericalangle FCA}$, $\frac{AB}{BC} = \frac{\sin\sphericalangle AEB}{\sin\sphericalangle BEC}$ и $\frac{CD}{DE} = \frac{\sin\sphericalangle CAD}{\sin\sphericalangle DAE}$.

2.3. Означимо са $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ странице многоугла. Из неједнакости $a_1 < a_2 + \cdots + a_n$ следи $a_1 < \frac{p}{2}$. Дефинишимо $s_k = a_1 + \cdots + a_k$ за $k = 1, 2, \ldots, n$ ($s_0 = 0$) и посматрајмо најмање k за које је $\frac{p}{3} \leqslant s_k$. Претпоставимо да је $s_k > \frac{2p}{3}$. Тада је $k > 1$ и $a_k = s_k - s_{k-1} > \frac{p}{3} > s_{k-1} \geqslant a_1$, што је немогуће. Дакле, $\frac{p}{3} \leqslant s_k \leqslant \frac{2p}{3}$, па можемо узети $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ и $B = \{a_{k+1}, \ldots, a_n\}$.

2.4. Колоне таблице означавамо са a, b, c, d, e, а врсте са $1, 2, 3, 4, 5$ као на слици.

(а) Кажемо да је играч A *освојио* неки квадрат 3×3 ако у том квадрату има за бар три више јединица него нула. Јасно је да освајањем квадрата 3×3 играч A остварује свој циљ.

У првом потезу A игра у централном пољу $c3$. Због симетрије можемо да сматрамо да је B одговорио потезом у врсти 4 или 5. Затим A игра у $c2$, а B је принуђен да одговори у $c1$ (у противном ће A потезом у $c1$ освојити бар један квадрат 3×3). Потом A игра у $b3$, а B мора да игра унутар доњег левог квадрата 3×3 (у супротном ће A освојити тај квадрат). Затим A игра у $d3$, а B као малопре мора да игра унутар доњег десног квадрата 3×3. Сада A игра у $c4$ или $c5$ и осваја горњи средњи квадрат 3×3.



(б) Поделимо таблицу на 12 домина и један јединични квадрат као на слици. Сваки квадрат 3×3 садржи бар три целе домине. Играчу B је довољно да, кад год A игра у једно поље неке домине, он игра у друго поље.

3.1. Ако означимо $A = \frac{10^p - 1}{9} = 11 \cdots 1$ (p јединица), разлика из задатка је једнака

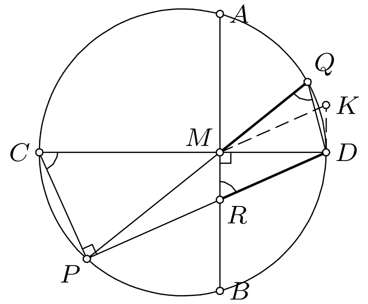
$$N = \sum_{i=0}^{8} (9-i) A \cdot 10^{ip} - \sum_{i=0}^{8} (9-i) 10^i = \sum_{i=0}^{8} (9-i)(A \cdot 10^{ip} - 10^i).$$

Притом је сваки од сабирака $A \cdot 10^{ip} - 10^i$ дељив са p јер је $A \equiv 1$ и $10^{ip} \equiv 10^i \pmod p$ по малој Фермаовој теореми, па $p \mid N$.

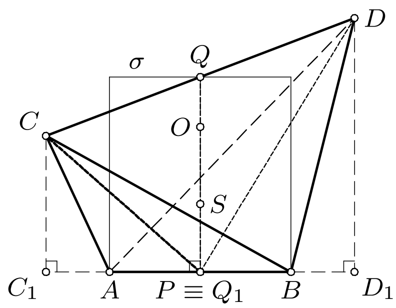
3.2. Тврђење доказујемо индукцијом по n. За $n = 0$ (где је $0! = 1$) оно очигледно важи. Нека је $n \geqslant 1$. Ако је полином $P(x)$ дељив са m, то је и полином $P(x+1) - P(x) = a_0[(x+1)^n - x^n] + a_1[(x+1)^{n-1} - x^{n-1}] + \cdots = na_0x^{n-1} + \cdots$. По индуктивној претпоставци m дели $(n-1)! \cdot na_0$, дакле управо $m \mid n!a_0$.

3.3. Приметимо да је $\sphericalangle DRM = \sphericalangle DCP = \sphericalangle DQP$. Сада је по синусној теореми $RD = \frac{DM}{\sin\sphericalangle DRM} = \frac{QM}{\sin\sphericalangle DRM} \cdot \frac{\sin\sphericalangle DQM}{\sin\sphericalangle QDM} = \frac{QM}{\sin\sphericalangle QDM} > QM$.

<u>*Друго решење*</u> (да би стала слика). Ако је K тачка таква да је $MRDK$ паралелограм, онда је $\sphericalangle MKD = \sphericalangle MRD = \sphericalangle MQD$, па је четвороугао $MQKD$ тетиван и $\sphericalangle MQK = \sphericalangle MDK = 90^\circ$, дакле $MQ < MK = RD$.



3.4. Симетрала σ унутрашњег диедра код ивице AB пролази кроз тачке P и S, одакле следи $Q \in \sigma$. Нека су C_1, D_1 и Q_1 редом подножја нормала из C, D и Q на праву AB, а C_2 и D_2 редом подножја нормала из C и D на раван σ. Тада је $\sphericalangle CC_1C_2 = \sphericalangle(\sigma, ABC) = \sphericalangle(\sigma, ABD) = \sphericalangle DD_1D_2$. Како је $CC_2 = DD_2$, одавде следи $CC_1 = DD_1$, па пошто је Q_1 средиште дужи C_1D_1, важи $CQ_1 = DQ_1$ и одатле $QQ_1 \perp CD$. Према томе, права QQ_1 је заједничка нормала n правих AB и CD, тј. $Q \in n$.



Слично закључујемо да $P \in n$, тако да је $n = PQ$. Дакле, равни симетрале дужи AB и CD (које садрже тачку O) садрже праву PQ, тј. PQ је пресечна права ове две равни, па $O \in PQ$.