САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Врбас, 15. април 1995.

Први разред

1. Колико има петочланих подскупова S скупа $A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ за које важи

$$\{r(x+y) \mid x, y \in S,\ x \neq y\} = A,$$

где $r(n)$ означава остатак при дељењу n са 10?

2. Дат је оштроугли троугао ABC. Нека је D подножје висине из C, E поножје нормале из D на AC, и F тачка на дужи DE таква да је $DF : FE = DA : DB$. Доказати да су праве BE и CF међусобно нормалне.

3. Правилан 1995-угао уписан је у круг. Из неке тачке P на кругу повучене су тетиве до свих његових темена. Доказати да је збир дужина неких 1000 тетива једнак збиру дужина преосталих 995 тетива.

4. Доказати да постоји скуп S од 1995 различитих природних бројева за које важе следећа два услова:

(i) сваки збир два или више различитих бројева из S је сложен број;

(ii) бројеви у S су узајамно прости по паровима.

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Врбас, 15. април 1995.

Други разред

1. Доказати да број $2^{2^{1995}} - 1$ има бар 1995 различитих простих фактора.

2. Конвексан шестоугао $ABCDEF$ је уписан у круг. Ако је $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$, доказати да се дијагонале AD, BE и CF секу у једној тачки.

3. Нека је M конвексан многоугао обима p. Доказати да се скуп страница многоугла M може разбити на два дисјунктна подскупа A и B тако да је

$$|s_A - s_B| \leqslant \frac{p}{3},$$

где су s_A и s_B редом збирови дужина страница у A и B.

4. Квадрат 5×5 подељен је на 25 јединичних квадрата. У њих играчи A и B наизменично уписују бројеве. Играч A почиње игру и увек уписује јединицу, а играч B увек уписује нулу. Када је уписано 25 бројева, рачунају се збирови у свим квадратима 3×3 и са M означава највећи од тих збирова. Доказати:

(а) Играч A увек може играти тако да буде $M \geqslant 6$.

(б) Играч B увек може играти тако да буде $M \leqslant 6$.

Време за рад 4 *сата.*
Сваки задатак вреди 25 *поена.*

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Врбас, 15. април 1995.

Трећи и четврти разред

1. Ако је p прост број, доказати да је број

$$\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p}-123456789$$

дељив са p.

2. За полином $P(x)$ са целим коефицијентима кажемо да је дељив природним бројем m ако је број $P(a)$ дељив са m за сваки цео број a.
Ако је полином $P(x) = a_0x^n + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ дељив са m, доказати да је тада и број $n!a_0$ дељив са m.

3. Тетива AB и пречник CD круга k узајамно су нормални и секу се у тачки M. Нека је P тачка лука ACB различита од A, B и C. Права PM поново сече круг у тачки Q, а права PD сече тетиву AB у тачки R. Доказати да је $RD > MQ$.

4. Дат је тетраедар $ABCD$. Нека су P и Q редом средишта ивица AB и CD, а O и S редом центри описане и уписане сфере. Ако тачке P, Q и S припадају истој правој, доказати да и тачка O припада тој правој.

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.