МАЛА ОЛИМПИЈАДА

Врбас, 16.04.1995.

1. Наћи све тројке (x, y, z) позитивних рационалних бројева за које је $x \leqslant y \leqslant z$ такве да су

$$x + y + z, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \quad \text{и} \quad xyz$$

природни бројеви.

2. Природан број n има тачно 1995 јединица у бинарном запису. Доказати да је $n!$ дељиво са 2^{n-1995}.

3. Нека је $SABCD$ једнакоивична четворострана пирамида са врхом S. Тачке M и N на ивицама SA и BC редом су такве да је права MN нормална на SA и BC. Наћи односе $SM : MA$ и $BN : NC$.

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.

РЕШЕЊА

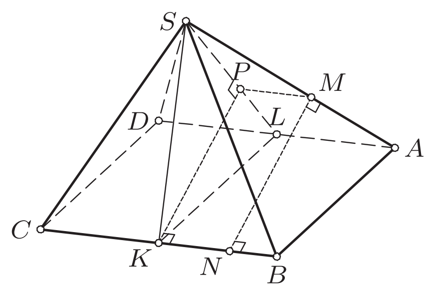
1. Означимо $x+y+z=a$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=b$ и $xyz=c$; тада је $xy+yz+zx=bc$. Бројеви x, y и z су рационалне нуле полинома са целим коефицијентима $P(t)=t^3-at^2+bct-c$, па они морају бити цели. Како је $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ цео број, мора бити $x\leqslant 3$. Ако је $x=1$, такође важи $y\leqslant 2$; ако је $x=2$, важи $y\leqslant 4$; и ако је $x=3$, важи $y\leqslant 3$. Провера случајева даје решења $(x,y,z)\in\{(1,1,1),(1,2,2),(2,3,6),(2,4,4),(3,3,3)\}$.

2. Задатак је директна последица познатог тврђења (за $p=2$):

Лема. За прост број p, са $v_p(n)$ означавамо експонент броја p у факторизацији природног броја n, а са $s_p(n)$ збир цифара броја n у запису са основом p. Тада је $v_p(n!)=\frac{n-s_p(n)}{p-1}$.

Доказ. Индукција по n. Тврђење важи за $n=1$; претпоставимо да важи за $n-1$. Ако је $v_p(n)=k$, онда је $s_p(n)=s_p(n-1)+1-k(p-1)$, па је $v_p(n!)=v_p((n-1)!)+k=\frac{n-1-s_p(n-1)+k(p-1)}{p-1}=\frac{n-s_p(n)}{p-1}$, и индуктивни корак је готов. $\square$

3. Права MN је нормална на праве AS и AD, па је нормална на раван SAD. Нека су K и L редом средишта дужи BC и AD, а P тачка таква да је $KNMP$ паралелограм. Пошто је $KP\perp SL$, дуж KP је висина у троуглу SKL са страницама $KL=a$ и $SK=SL=a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Сада лако рачунамо $LP=KL\cos\sphericalangle KLS=\frac{KL^2}{2SL}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}LS$. Дакле, $SM:MA=SP:PL=1:2$. Такође, $KN=PM=\frac{1}{3}LA$, па је и $BN:NC=1:2$.



<u>*Друго решење.*</u> Нека је $\overrightarrow{SM}=\lambda\overrightarrow{SA}$ и $\overrightarrow{BN}=\mu\overrightarrow{BC}$. Тада је $\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{AN}+(1-\lambda)\overrightarrow{SN}=\lambda\mu\overrightarrow{AC}+\lambda(1-\mu)\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\mu\overrightarrow{SC}+(1-\lambda)(1-\mu)\overrightarrow{SB}$. Сада је $0=\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC}=\lambda\mu\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}+\lambda(1-\mu)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+(1-\lambda)\mu\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{BC}+(1-\lambda)(1-\mu)\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{BC}=\lambda\mu+\frac{1}{2}(1-\lambda)\mu-\frac{1}{2}(1-\lambda)(1-\mu)=\frac{1}{2}\lambda+\mu-\frac{1}{2}$ и, слично, $0=\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{SA}=-\lambda-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}$. Решавањем система једначина добијамо $\lambda=\mu=\frac{1}{3}$.