12. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Пловдив, Бугарска – 9. мај 1995.

1. Наћи вредност израза $(\dots(((2*3)*4)*5)*\dots)*1995$, где је $x*y=\dfrac{x+y}{1+xy}$.

(Македонија)

2. Нека се кругови $c_1(O_1,r_1)$ и $c_2(O_2,r_2)$, $r_2>r_1$, секу у тачкама A и B, при чему је $\sphericalangle O_1AO_2=90^\circ$. Права O_1O_2 сече c_1 у C и D, а c_2 у E и F (при чему је $C-E-D-F$). Права BE сече круг c_1 у K, а праву AC у M, док права BD сече круг c_2 у L, а праву AF у N. Доказати да је

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{KE}{KM}\cdot\frac{LN}{LD}.$$

(Грчка)

3. Дати су природни бројеви a и b такви да је $a>b$ и $2\mid a+b$. Доказати да су решења једначине

$$x^2-(a^2-a+1)(x-b^2-1)-(b^2+1)^2=0$$

природни бројеви од којих ниједан није потпун квадрат. *(Албанија)*

4. Нека је n природан број и S скуп свих тачака (x,y), где су $x,y\in\{1,2,\dots,n\}$. Нека је $\mathcal{T}$ скуп свих квадрата чија темена припадају скупу S. Означимо са a_k $(k\geqslant 0)$ број парова тачака из S које су темена тачно k квадрата из $\mathcal{T}$. Доказати да је $a_0=a_2+2a_3$.

(Југославија)

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

1. Приметимо да је

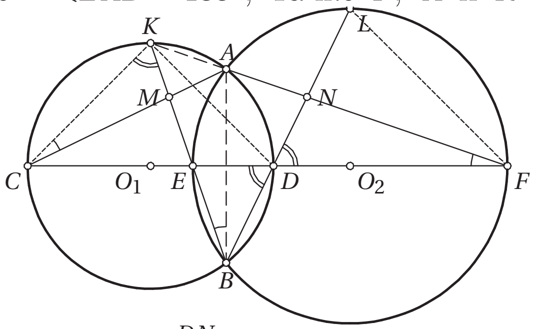
$$\frac{1-x*y}{1+x*y}=\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-y}{1+y}.$$

Ако је вредност траженог израза P, одавде следи да је $\frac{1-P}{1+P}=\frac{1-2}{1+2}\cdot\frac{1-3}{1+3}\cdots\frac{1-1995}{1+1995}=\frac{2\cdot 1994!}{1996!}=\frac{1}{998\cdot 1995}$, дакле $P=\frac{998\cdot 1995-1}{998\cdot 1995+1}$.

Друго решење. Индукцијом се показује да је $f(n)=(\dots((2*3)*4)*\dots)*n=\frac{n(n+1)-2}{n(n+1)+2}$. Заиста, то је тачно за $n=2$, а за $n>2$ је $f(n)=f(n-1)*n=\frac{n(n-1)-2}{n(n-1)+2}*n=\frac{n(n+1)-2}{n(n+1)+2}$.

2. Пошто је $\sphericalangle KCD=\sphericalangle EBD=180^\circ-\sphericalangle BED-\sphericalangle BDE=180^\circ-(90^\circ-\frac{1}{2}\sphericalangle BO_2E)-(90^\circ-\frac{1}{2}\sphericalangle BO_1D)=\frac{1}{2}\sphericalangle O_1BO_2=45^\circ$ и $\sphericalangle CAF=90^\circ+90^\circ-\sphericalangle EAD=135^\circ$, тачке F, A и K су колинеарне. Аналогно је и $\sphericalangle LFD=45^\circ$.

Сада имамо следеће сличности:



- $\triangle KCM\sim\triangle DFN$ (због $\sphericalangle KCM=\sphericalangle KBA=\sphericalangle DFN$ и $\sphericalangle CKM=\sphericalangle CDB=\sphericalangle FDN$) и одатле $KM=KC\cdot\frac{DN}{DF}$;
- $\triangle KEC\sim\triangle DLF$ ($\sphericalangle KCE=\sphericalangle DFL=45^\circ$ и $\sphericalangle CKE=\sphericalangle FDL$) и одатле $KE=KC\cdot\frac{LD}{FD}$;
- $\triangle KDN\sim\triangle FLN$ ($KD\parallel LF$ и $A\in KN$) и одатле $LN=LF\cdot\frac{DN}{KD}$.

Сада је $\frac{KE}{KM}\cdot\frac{LN}{LD}=\frac{KC\cdot(LD/FD)}{KC\cdot(DN/DF)}\cdot\frac{LF\cdot(DN/KD)}{LD}=\frac{LF}{KD}=\frac{r_2\sqrt{2}}{r_1\sqrt{2}}=\frac{r_2}{r_1}$.

3. Дата једначина је еквивалентна са $(x+b^2-a^2+a)(x-b^2-1)=0$ и њени корени су $x_1=b^2+1$ (што очигледно није квадрат) и $x_2=a^2-b^2-a$.

Ако означимо $m=\frac{a+b}{2}$ и $n=\frac{a-b}{2}$, онда је $a^2-b^2-a=4mn-m-n$. Претпоставимо да је то потпун квадрат, тј. $4mn-m-n=t^2$. Тада је $4t^2+1=16mn-4m-4n+1=(4m-1)(4n-1)$, што је немогуће јер $4t^2+1$ нема природних делилаца облика $4k-1$.

4. Како је $a_k=0$ за $k>3$, број парова различитих тачака из S је $a_0+a_1+a_2+a_3=\binom{n^2}{2}$.

Пребројмо квадрате из $\mathscr{T}$. Око сваког квадрата $T\in\mathscr{T}$ може се описати тачно један квадрат $\bar{T}$ са страницама паралелним координатним осама. За $i=1,\dots,n-1$, квадрата $\bar{T}$ странице i има тачно $(n-i)^2$. За сваки такав квадрат $\bar{T}$, квадрат T са теменима на страницама $\bar{T}$ може се одабрати на тачно i начина. Према томе, укупан број квадрата T је

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)^2=n^2\sum_i i-2n\sum_i i^2+\sum_i i^3=\frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Сваки квадрат из $\mathscr{T}$ одређује 6 парова тачака, што даје $6\cdot\frac{n^2(n^2-1)}{12}=\binom{n^2}{2}$ парова. Притом је сваки од a_k парова тачака које су темена тачно k квадрата рачунат k пута. Дакле, $a_1+2a_2+3a_3=\binom{n^2}{2}=a_0+a_1+a_2+a_3$, одакле следи $a_0=a_2+2a_3$.

Напомена. Могуће је одредити тачне вредности бројева a_0, a_1, a_2, a_3 у облику полинома по p и q, где је $n = 12p + q$ $(0 \leqslant q < 12)$. Испоставља се да је $a_0 \sim \frac{71}{432}n^4$, $a_1 \sim \frac{89}{432}n^4$, $a_2 \sim \frac{41}{432}n^4$ и $a_3 \sim \frac{5}{144}n^4$, што сликовито говори да је рачун напоран.