САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Ивањица, 16. април 1994.

Први разред

1. Ако су a, b, c, x, y, z позитивни бројеви са $a + x = b + y = c + z = 1994$, доказати да је $ay + bz + cx < 1994^2$.

2. Нека је D тачка на страници AB троугла ABC различита од A и B. Нека су r, r_1, r_2 полупречници уписаних кругова троуглова ABC, ADC и DBC, редом. Доказати да је $r < r_1 + r_2$.

3. Нека су M, N, P, Q редом средишта страница AB, BC, CD, DA конвексног четвороугла $ABCD$. Дужи MP и NQ секу се у тачки O. Доказати да је збир површина четвороуглова $AMOQ$ и $CPON$ једнак збиру површина четвороуглова $BNOM$ и $DQOP$.

4. На табли је написано 1993 нуле, 1994 јединице и 1995 двојки. У сваком потезу дозвољено је одабрати пар различитих цифара и заменити их оном од цифара $0, 1, 2$ која се не појављује у том пару.

(а) Могу ли да после неког броја потеза само нуле остану на табли?

(б) Ако на табли у неком моменту остане само једна цифра, одредити ту цифру.

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Ивањица, 16. април 1994.

Други разред

1. Наћи све природне бројеве $b < 100$ такве да је број 2101 у систему са основом b потпун квадрат.

2. Нека је

$$f(x,y) = \begin{cases} (y+1)^2 - x, & \text{за } x \leq y, \\ x^2 + y + 1, & \text{за } x > y. \end{cases}$$

Решити једначину $f(x,y) = 1994$ у скупу ненегативних целих бројева.

3. Свако теме тетивног четвороугла спојено је правом са ортоцентром троугла одређеног са преостала три темена. Доказати да се овако добијене четири праве секу у једној тачки.

4. (а) У равни су дати конвексан шестоугао површине S и произвољна права l. Доказати да се у овај шестоугао може уписати троугао површине бар $\frac{3}{8}S$ чија је једна страница паралелна правој l.

(б) Наћи највећу могућу површину троугла уписаног у правилан шестоугао површине S, са једном страницом паралелном страници шестоугла.

(Троугао је уписан у шестоугао ако сва његова темена леже на страницама шестоугла.)

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Ивањица, 16. април 1994.

Трећи и четврти разред

1. Дужине страница конвексног четвороугла су природни бројеви. Ако сваки од ових бројева дели суму преостала три, доказати да су бар два од ових бројева једнака.

2. Нека је $q > 5$ прост број и p цео број, $1 \leqslant p < q$. Претпоставимо да разломак $\frac{p}{q}$ има чисто периодичан децимални запис са основним периодом дужине $2n$. Доказати да је збир броја одређеног са првих n цифара периода и броја одређеног са осталих n цифара периода једнак $10^n - 1$.

3. Дат је триедар $Oabc$. Доказати да постоје тачке A, B, C (различите од O) на крацима a, b, c редом тако да је $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBC = \sphericalangle OCA$.

4. Нека је S скуп свих низова $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ цифара $0, 1, 2$. *Елементарном трансформацијом* низа $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ зовемо замену цифре α_j цифром $\beta_j \in \{0, 1, 2\}$ под условом да се ниједна од цифара α_j, β_j не појављује у поднизу $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{j-1})$. Доказати да се сваки низ у S може добити из низа $(0, 0, \ldots, 0)$ узастопном применом елементарних трансформација.

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.