35. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Хонг Конг – среда, 13. јул 1994.

1. Нека су m и n природни бројеви и нека су $a_1, a_2, \dots, a_m$ различити елементи скупа $\{1, 2, \dots, n\}$ такви да, кад год је $a_i + a_j \leqslant n$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$, постоји k такво да је $a_i + a_j = a_k$. Доказати да је

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \geqslant \frac{n+1}{2}.$$

(Француска)

2. Нека је ABC троугао у коме је $AB = AC$. Претпоставимо да:

(i) M је средиште дужи BC и O је тачка праве AM таква да је $\sphericalangle ABO = 90°$;

(ii) Q је произвољна тачка дужи BC различита од B и C;

(iii) E и F су тачке на правим AB и AC редом такве да су тачке E, Q, F различите и колинеарне.

Доказати да је OQ нормално на EF ако и само ако је $QE = QF$.

(Јерменија/Аустралија)

3. За сваки природан број k, нека $f(k)$ означава број елемената скупа $\{k+1, k+2, \dots, 2k\}$ чије представљање у бази са основом 2 има тачно три јединице.

(а) Доказати да за сваки природан број m постоји бар један природан број k такав да је $f(k) = m$.

(б) Одредити све природне бројеве m за које постоји тачно једно k са $f(k) = m$.

(Румунија)

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

35. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Хонг Конг – четвртак, 14. јул 1994.

4. Одредити све парове (m,n) природних бројева за које је $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ цео број.
(Аустралија)

5. Нека је S скуп свих реалних бројева строго већих од -1. Наћи све функције $f : S \to S$ које задовољавају следеће услове:

(i) $f(x+f(y)+xf(y)) = y+f(x)+yf(x)$ за све $x, y \in S$;

(ii) $f(x)/x$ строго расте за $-1 < x < 0$ и за $0 < x$. *(Велика Британија)*

6. Доказати да постоји скуп A природних бројева са следећим својством: за произвољан бесконачан скуп S простих бројева постоје два природна броја $m \in A$ и $n \notin A$ од којих је сваки производ k различитих елемената из S за неко $k \geq 2$.
(Финска)

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

РЕШЕЊА

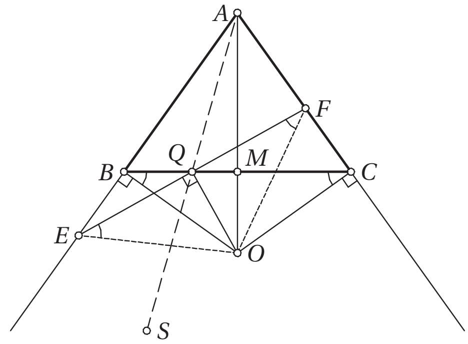
1. Сматраћемо да је $a_1 > a_2 > \dots > a_m$. Докажимо да за све $i = 1, \dots, m$ важи

$$a_i + a_{m+1-i} \geqslant n + 1. \qquad (*)$$

Заиста, у супротном, по услову задатка, збирови $a_i + a_{m+1-i}, \dots, a_i + a_{m-1}, a_i + a_m$ дају i различитих елемената скупа A већих од a_i, што је немогуће.

Сада сабирањем неједнакости $(*)$ за $i = 1, \dots, m$ добијамо $2(a_1 + \dots + a_m) \geqslant m(n+1)$, одакле следи тврђење.

2. Нека је без смањења општости тачка Q на дужи BM. Ако је $\sphericalangle OQE = 90^\circ$, четвороуглови $OQBE$ и $OQFC$ су тетивни, па је $\sphericalangle OEQ = \sphericalangle OBQ = \sphericalangle OCQ = \sphericalangle OFQ$. Следи да су троуглови OQE и OQF подударни и одатле $QE = QF$.



Претпоставимо сада да је $QE = QF$ и посматрајмо тачку S симетричну тачки A у односу на Q. Четвороугао $AESF$ је паралелограм. С друге стране, ако нормала у тачки Q на праву OQ сече праве AB и AC редом у тачкама E' и F', онда је на основу првог дела задатка $QE' = QF'$, па је и $AE'SF'$ паралелограм, одакле следи $E \equiv E'$, $F \equiv F'$ и $\sphericalangle OQE = 90^\circ$.

3. **(а)** Са b_n означаваћемо број јединица у бинарном запису природног броја n. Како је $b_{2k+2} = b_{k+1}$ и $b_{2k+1} = b_k + 1$, важи

$$f(k+1) = \begin{cases} f(k) + 1 & \text{ако је } b_k = 2; \\ f(k) & \text{у супротном.} \end{cases} \qquad (*)$$

Такође, $f(1) = 0$. Пошто $b_k = 2$ важи за бесконачно много вредности k, функција f је неограничена, па је њена слика цео скуп $\mathbb{N}_0$.

(б) Пошто је f растућа функција, k је јединствено решење једначине $f(k) = m$ ако и само ако је $f(k-1) < f(k) < f(k+1)$. По $(*)$, ово је еквивалентно са $b_{k-1} = b_k = 2$, а то је могуће само ако је $k = 2^t + 2$ за неки природан број $t > 1$. Тада скуп $\{k+1, \dots, 2k\}$ садржи број $2^{t+1} + 3 = 10\dots011_2$ и још $\binom{t}{2}$ бинарних $(t+1)$-цифрених бројева са три јединице, па је $m = f(k) = \binom{t}{2} + 1$.

4. Пошто важи $(mn-1, m^3) = 1$, број $mn-1$ дели n^3+1 ако и само ако дели $m^3(n^3+1) = (m^3n^3 - 1) + m^3 + 1$. Следи да је

$$\frac{n^3+1}{mn-1} \in \mathbb{Z} \quad \text{ако и само ако} \quad \frac{m^3+1}{mn-1} \in \mathbb{Z}.$$

Зато не умањујемо општост ако претпоставимо да је $m \geqslant n$.

- Ако је $m=n$, онда је $\frac{n^3+1}{n^2-1}=n+\frac{1}{n-1}$ цео број, одакле је $m=n=2$.
- Ако је $n=1$, онда је $\frac{2}{m-1}\in\mathbb{Z}$ цео број, па је $m=2$ или $m=3$.
- Нека је сада $m>n\geqslant 2$. Пошто је $m^3+1\equiv 1$ и $mn-1\equiv -1 \pmod n$, следи да је $\frac{n^3+1}{mn-1}=kn-1$ за неки природан број k. С друге стране, важи $kn-1<\frac{n^3+1}{n^2-1}=n+\frac{1}{n-1}\leqslant 2n-1$, па мора бити $k=1$, тако да је $n^3+1=(mn-1)(n-1)$. Одавде је $mn-1=\frac{n^3+1}{n-1}=n^2+n+1+\frac{2}{n-1}$, што даје $n\in\{2,3\}$ и у оба случаја $m=5$.

Решења у случају $m<n$ се добијају по симетрији. Према томе, укупно има 9 решења: $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(2,2)$, $(2,5)$, $(3,5)$, $(5,2)$ и $(5,3)$.

5. Из услова (ii) следи да једначина $f(x)=x$ у сваком од интервала $(-1,0)$ и $(0,\infty)$ има највише једно решење. Претпоставимо да је $u\in(-1,0)$ такво да је $f(u)=u$. Заменом $x=y=u$ у (i) добијамо $f(u^2+2u)=u^2+2u$. Како је $u^2+2u=(u+1)^2-1\in(-1,0)$, мора бити $u^2+2u=u$, тј. $u\in\{-1,0\}$, што је немогуће. Слично, и претпоставка да је $f(v)=v$ за $v\in(0,\infty)$ нас води у контрадикцију.

Дакле, како за $x\in S$ важи $f(x+(1+x)f(x))=x+(1+x)f(x)$, једина могућност је $x+(1+x)f(x)=0$. Одавде је $f(x)=-\frac{x}{1+x}$ за све $x\in S$. Директно се проверава да ова функција задовољава услове задатка.

6. Нека је A скуп свих природних бројева облика $p_1p_2\dots p_{p_1}$, где су $p_1<p_2<\cdots<p_{p_1}$ прости бројеви. Дакле,

$$A=\{2\cdot3,2\cdot5,\dots\}\cup\{3\cdot5\cdot7,3\cdot5\cdot11,\dots\}\cup\{5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17,\dots\}\cup\cdots.$$

Овај скуп задовољава услове задатка. Заиста, за сваки бесконачан скуп простих бројева $P=\{q_1,q_2,\dots\}$ (где је $q_1<q_2<\cdots$) имамо

$$m=q_1q_2\cdots q_{q_1}\in A \quad \text{и} \quad n=q_2q_3\cdots q_{q_1+1}\notin A.$$