11. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Нови Сад, СР Југославија – 10. мај 1994.

1. Дат је оштар угао XAY и тачка P унутар њега. Конструисати (помоћу лењира и шестара) праву која пролази кроз кроз тачку P и сече краке AX и AY редом у тачкама B и C, тако да је површина троугла ABC једнака AP^2. *(Кипар)*

2. Ако је m цео број, доказати да полином

$$x^4 - 1994x^3 + (1993+m)x^2 - 11x + m$$

има највише један целобројни корен. *(Грчка)*

3. Нека је $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ пермутација бројева $1, 2, \ldots, n$, где је $n \geq 2$. Одредити највећу могућу вредност израза

$$\sum_{k=1}^{n-1} |a_{k+1} - a_k|.$$

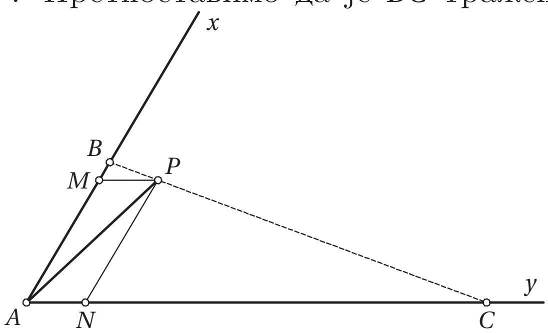
(Румунија)

4. Наћи најмањи број $n > 4$ за који постоји скуп од n људи такав да свака два који се познају немају заједничких познаника, а свака два који се не познају имају тачно два заједничка познаника. (Познанство је симетрична релација: ако A познаје B, $A \neq B$, онда и B познаје A.) *(Бугарска)*

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

1. Са $S_{\mathscr{P}}$ означавамо површину многоугла $\mathscr{P}$. Претпоставимо да је BC тражена права. Нека су M и N редом тачке на крацима x и yтакве да је $PM \parallel y$ и $PN \parallel x$. Из сличности троуглова BMP и PNC имамо $\frac{BM}{MP} = \frac{PN}{NC}$, тј. $\frac{BM}{AN} = \frac{AM}{NC}$, одакле је $AC = AN + NC = AN(1 + \frac{AM}{BM})$. Сада имамо $k = \frac{AP^2}{S_{AMN}} = \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = \frac{AB \cdot AC}{AM \cdot AN} = \frac{(AM+BM)\cdot AN(1+\frac{AM}{BM})}{AM \cdot AN} = 2 + \frac{BM}{AM} + \frac{AM}{BM}$. Дакле, довољно је конструисати дуж BM тако да је



$$BM + \frac{AM^2}{BM} = d, \quad \text{где је} \quad d = (k-2)AM.$$

Дуж XY дужине d је једноставно конструисати: ако је h висина из темена M у $\triangle AMP$, онда је $k = \frac{2AP}{h}$ и $d = \frac{2(AP-h)AM}{h}$. Сада конструишемо тачку Z на кругу над пречником XY, на одстојању једнаком AM од праве XY (она постоји ако и само ако је $d \geqslant 2AM$). Ако је Z' подножје нормале из Z на XY, онда је $AM^2 = XZ' \cdot Z'Y$, тј. $XZ' + \frac{AM^2}{XZ'} = XZ' + Z'Y = d$, па можемо узети $BM \cong XZ'$.

Задатак има два решења ако је $d > 2AM$, једно ако је $d = 2AM$, и ниједно ако је $d < 2AM$.

2. Довољно је доказати да се дати полином не може раставити на производ два квадратна тринома са целим коефицијентима. Претпоставимо супротно:

$$x^4 - 1994x^3 + (1993+m)x^2 - 11x + m = (x^2 - ax + b)(x^2 - cx + d).$$

Из $a + c = 1994$ следи да су a и c исте парности. Како је $11 = ad + bc$, a и c не могу бити парни, дакле $2 \nmid ac$. Сада из $1993 + m = ac + b + d$ и $m = bd$ следи да је $1992 - ac = (b-1)(d-1)$ непарно, па су b и d парни, али тада је $ad + bc$ парно, контрадикција.

Друго решење. Претпоставимо да је x целобројна нула датог полинома. Тада је

$$-m = \frac{x^4 - 1994x^3 + 1993x^2 - 11x}{x^2+1} = x^2 - 1994x + 1992 + \frac{1983x - 1992}{x^2+1}.$$

Према томе, x^2+1 дели $1983x - 1992$, што опет дели $1983^2x^2 - 1992^2 = 1983^2(x^2+1) - (1983^2 + 1992^2)$, па $x^2 + 1 \mid 1983^2 + 1992^2 = 3^2 \cdot 877817$. Ово је немогуће јер $3 \nmid x^2 + 1$, а 877817 је прост број и није облика $x^2 + 1$. Следи да дати полином нема ниједну целобројну нулу.

Напомена. Прво решење је варијанта свођења полинома по модулу 2. Дати полином је једнак $x^4 + x + 1$ или $x^4 + x^2 + x \pmod 2$, при чему је први полином нерастављив у $\mathbb{Z}_2[x]$, а други се над $\mathbb{Z}_2[x]$ факторише као $x(x^3 + x + 1)$.

3. Посматраћемо збир $S=\sum_{i=1}^{n}|a_i-a_{i+1}|$, где је $a_{n+1}=a_1$. Овај збир се може написати у облику

$$S=\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i(a_i-a_{i+1})=\sum_{i=1}^{n}c_ia_i \quad \text{за неке} \quad \epsilon_i\in\{-1,1\} \quad \text{и} \quad c_i=\epsilon_i-\epsilon_{i-1},$$

при чему је $\epsilon_0=\epsilon_n$. За свако i је $c_i\in\{-2,0,2\}$. Посматрајмо скупове $A=\{i\mid c_i=2\}$ и $B=\{i\mid c_i=-2\}$. Како је $c_1+c_2+\cdots+c_n=0$, имамо $|A|=|B|=k$ за неко $k\leqslant\frac{n}{2}$. Сада је

$$S=2\sum_{i\in A}x_i-2\sum_{i\in B}x_i\leqslant 2[n+(n-1)+\cdots+(n-k+1)]-2[1+2+\cdots+k]=2k(n-k).$$

Израз $2k(n-k)$ је максималан за $k=[\frac{n}{2}]$ и тада је једнак $[\frac{n^2}{2}]$. Најзад, пошто је $|a_n-a_1|\geqslant 1$, остаје

$$S\leqslant\left[\frac{n^2}{2}\right]-1.$$

Једнакост се достиже нпр. за пермутацију $(a_1,a_2,\dots,a_n)=(m+1,1,m+2,2,m+3,3,\dots,m)$, где је $m=n-[\frac{n}{2}]$.

<u>*Друго решење.*</u> Збир $S=\sum_{i=1}^{n}|a_i-a_{i+1}|$ представља дужину ℓ затворене изломљене линије $A_1A_2\dots A_nA_1$, где је A_i тачка на реалној правој са координатом a_i.

За свако $k=1,\dots,n-1$, посматрајмо јединични сегмент $[k,k+1]$. Свака од n дужи A_iA_{i+1} која га покрива има један крај у интервалу $[1,k]$, а други у интервалу $[k+1,\dots,n]$. Следи да је овај сегмент покривен са највише $2\min\{k,n-k\}$ дужи A_iA_{i+1} $(1\leqslant i\leqslant n)$. Укупно, посматрана изломљена линија покрива највише $2\sum_{k=1}^{n-1}\min\{k,n-k\}=[\frac{n^2}{2}]$ јединичних сегмената, одакле је $\ell\leqslant[\frac{n^2}{2}]$.

Најзад, због $|a_n-a_1|\geqslant 1$, тражени збир није већи од $[\frac{n^2}{2}]-1$.

4. Посматрајмо неку особу A у скупу који задовољава услове задатка. Нека A познаје m особа: $A_1,A_2,\dots,A_m$. За $1\leqslant i<j\leqslant m$, особе A_i и A_j се не познају јер имају заједничког познаника, па тако оне морају имати још једног заједничког познаника: означимо га са $A_{ij}=A_{ji}$. Никоје две међу $\binom{m}{2}$ особа A_{ij} се не поклапају, јер би у супротном та особа и особа A имале бар три заједничка познаника. Такође, свака особа која не познаје A налази се међу особама A_{ij}, јер има заједничког познаника са A. Следи да је $n=1+m+\binom{m}{2}=\frac{m^2+m+2}{2}$. Одавде такође следи да све особе у скупу имају тачно по m познаника.

Особе A_{ij} и A_{ik} $(j\neq k)$ се не познају јер имају заједничког познаника. Према томе, свих $k-2$ познаника особе A_{ij} различитих од A_i и A_j налазе се међу особама A_{kl}, $\{k,l\}\cap\{i,j\}=\emptyset$, па је $m-2\geqslant\binom{m-2}{2}$ и одатле $m\geqslant 5$ и $n\geqslant 16$.

Из претходног разматрања директно налазимо пример за $n=16$. Довољно је одабрати особе A, A_i $(1\leqslant i\leqslant 5)$ и A_{ij} $(1\leqslant i<j\leqslant 5)$ тако да (i) A познаје A_i, (ii) A_i и A_j познају A_{ij}, и (iii) A_{ij} и A_{kl} се познају ако је $\{i,j\}\cap\{k,l\}=\emptyset$, при чему других познанстава нема.