Олимпиада трёх городов, весна 1980

Весна 1980
(в скобках указано, для каких классов предназначена задача)

Задача 1.(8-10)
На окружности имеются синие и красные точки. Разрешается добавить красную точку и поменять цвета её соседей, а также убрать красную точку и изменить цвета её бывших соседей. Пусть первоначально было всего две красные точки (менее двух точек оставлять не разрешается).
Доказать, что за несколько разрешённых операций нельзя получить картину, состоящую из двух синих точек.
К. Казарновский, Москва

Задача 2.(8-10)
В таблице N*N, заполненной числами, все строки различны (две строки называются различными, если они отличаются хотя бы в одном элементе).
Доказать, что из таблицы можно вычеркнуть некоторый столбец, так что в оставшейся таблице опять все строки будут различны.
А. Анджанс, Рига

Задача 3.(8)
a_1, a_2, ..., a_{101} - перестановка чисел 2, 3, ..., 102 такая, что a_k делится на k при каждом k.
Найти все такие перестановки.
Фольклор

Задача 4.(9-10)
В пространстве имеются 30 ненулевых векторов. Доказать, что среди них найдутся два, угол между которыми меньше 45^o.
А. Толпыго

Задача 5.(8-10)
Дан выпуклый четырёхугольник ABCD (площади S_{ABCD}). Каждая его сторона разбита на K равных частей. Точки деления, принадлежащие стороне AB, соединены прямыми с точками деления, принадлежащими стороне CD, так что первая, считая от A, точка деления соединена с первой точкой деления, считая от D, вторая, считая от A, - со второй, считая от D, и т. д. (первая серия прямых), а точки деления, принадлежащие стороне BC, аналогичным образом соединены с точками деления, принадлежащими стороне DA (вторая серия прямых). Образовалось K^2 маленьких четырёхугольников. Из них выбрано K четырёхугольников таким образом, что каждые два выбранных четырёхугольника разделены хотя бы одной прямой первой серии и хотя бы одной прямой второй серии.
Доказать, что сумма площадей выбранных четырёхугольников равна S_{ABCD}/K.
А. Анджанс, Рига

Задача 6.(8-10)
В квадрате со стороной 1 проведено конечное количество отрезков, параллельных его сторонам. Отрезки могут пересекать друг друга. Сумма длин проведенных отрезков равна 18.
Докажите, что среди частей, на которые разбивается квадрат этими отрезками, найдётся такая, площадь которой не меньше 0,01.
А. Берзиньш, А. Анджанс, Рига

Второй турнир городов

1980-81 учебный год

В скобках после номера задачи или подпункта указано количество баллов, дававшихся за её правильное решение.

7-8 классы

Задача 1.(3)
Найти все целые решения уравнения $y^k=x^2+x$ (k - натуральное число, большее 1).
Фольклор

Задача 2.(7)
M - множество точек на плоскости. Точка O называется "почти центром симметрии" множества M, если из M можно выбросить одну точку такую, что для оставшегося множества O является центром симметрии в обычном смысле.
Сколько "почти центров симметрии" может иметь конечное множество на плоскости? Указать все такие числа.
В. Прасолов, Москва

Задача 3.(5)
ABCD - вписанный (в окружность) выпуклый четырёхугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны. O - центр описанной окружности.
Доказать, что ломаная AOC делит четырёхугольник на две части равной площади.
В. Варваркин

Задача 4.(8)
64 друга одновременно узнали 64 новости, причём каждый узнал одну новость. Они стали звонить друг другу и обмениваться новостями. Каждый разговор длится 1 час. Какое минимальное количество часов необходимо, чтобы все узнали все новости? (Во время одного разговора можно передать сколько угодно новостей.)
А. Анджанс, Рига

Задача 5.(16)
Игра происходит на бесконечной плоскости. Играют двое: один передвигает одну фишку-волка, другой - 50 фишек-овец. После хода волка ходит одна какая-нибудь из овец, затем, после следующего хода волка, опять какая-нибудь из овеци т.д. И волк, и овцы передвигаются за один ход в любую сторону не более, чем на один метр.
Верно ли, что при любой первоначальной позиции волк поймает хотя бы одну овцу?
Фольклор

1980-81 учебный год

В скобках после номера задачи или подпункта указано количество баллов, дававшихся за её правильное решение.

9-10 классы

Задача 1.(7)
Будем говорить, что две пирамиды соприкасаются гранями, если эти пирамиды не имеют общих внутренних точек и некоторая грань одной пирамиды пересекается с некоторой гранью другой пирамиды по многоугольнику.
Можно ли расположить 8 пирамид в пространстве так, чтобы каждые две соприкасались гранями?
А. Анджанс, Рига

Задача 2.(10)
Игра происходит на бесконечной плоскости. Играют двое: один передвигает одну фишку-волка, другой - K фишек-овец. После хода волка ходит какая-нибудь из овец, затем, после следующего хода волка, опять какая-нибудь из овец и т. д. И волк, и овцы передвигаются за один ход в любую сторону не более, чем на один метр.
Верно ли, что для любого числа овец, участвующих в игре, существует такая первоначальная позиция, что волк не поймает ни одной овцы?
Фольклор

Задача 3.(5)
Доказать, что любое действительное положительное число можно представить в виде суммы девяти чисел, десятичная запись (каждого из) которых состоит из цифр 0 и 7.
Э. Туркевич

Задача 4.
K друзей одновременно узнали K новостей, причём каждый узнал одну новость. Они стали звонить друг другу и обмениваться новостями. Каждый разговор длится 1 час. За один разговор можно передать сколько угодно новостей.
Какое минимальное количество часов необходимо, чтобы все узнали все новости? Рассмотрите в этой задаче три пункта:
а)(5) N=64,
б)(7) N=55,
в)(12) N=100.
А. Анджанс, Рига

Задача 5.
На бесконечной клетчатой бумаге отмечено шесть клеток (см. рисунок). На некоторых клетках стоят фишки. Положение фишек разрешается преобразовывать по следующему правилу: если клетки соседняя сверху и соседняя справа от данной фишки обе свободны, то в эти клетки ставится по фишке, а старая фишка убирается. Ставится цель за некоторое количество таких операций освободить все шесть отмеченных клеток.
Можно ли достигнуть этой цели, если
а)(8) в исходной позиции имеются всего 6 фишек, и они стоят на отмеченных клетках;
б)(8) в исходной позиции имеется всего одна фишка, и она стоит в левой нижней отмеченной клетке.

```
 | | | | | |
- - - - - - -
 | | | | | |
- - - - - - -
 |o| | | | |
- - - - - - -
 |o|o| | | |
- - - - - - -
 |o|o|o| | |
- - - - - - -
 | | | | | |
```
М. Концевич, Москва

Третий турнир городов

1981-82 учебный год

В скобках после номера задачи или подпункта указано количество баллов, дававшихся за её правильное решение.

7-8 классы

Задача 1.(5)
Найти все натуральные числа, делящиеся на 30 и имеющие ровно 30 различных делителей.
М. Левин

Задача 2.(5)
В четырёхугольнике длины всех сторон и диагоналей меньше 1 м.
Доказать, что его можно поместить в круг радиуса 0,9 м.
Фольклор

Задача 3.(6)
Доказать, что в бесконечной последовательности целых чисел, попарно различных и больших единицы, найдутся сто чисел, которые больше своего номера в этой последовательности.
А. Анджанс, Рига

Задача 4.(8)
В стране больше 101 города. Столица соединена авиалиниями со 100 городами, а каждый город, кроме столицы, соединен авиалиниями ровно с десятью городами (если А соединен с В, то В соединен с А). Известно, что из любого города можно попасть в любой другой (может быть, с пересадками).
Доказать, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так что возможность попасть из любого города в любой сохранится.
Фольклор

Задача 5.(3+5)
Рассматривается последовательность 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, ...
Существует ли арифметическая прогрессия
а)(3) длины 5;
б)(5) сколь угодно большой длины,
составленная из членов этой последовательности? (если решены оба пункта, то решение оценивается в 5 очков).
Г. Гальперин, Москва

1981-82 учебный год

В скобках после номера задачи или подпункта указано количество баллов, дававшихся за её правильное решение.

9-10 классы

Задача 1.
а)(4) Доказать, что для любых положительных чисел $x_1, x_2, ..., x_k$ ($k>3$) выполняется неравенство:
$(x_1/(x_k+x_2)) + (x_2/(x_1+x_3)) + ... + (x_k/(x_{k-1}+x_1)) \geq 2$
б)(3) Доказать, что это неравенство ни для какого $k>3$ нельзя усилить, т.е. доказать, что для каждого фиксированного k нельзя заменить двойку в правой части на большее число так, чтобы полученное неравенство было справедливо для любого набора из k положительных чисел.
А. Прокопьев

Задача 2.(14)
Квадрат разбит на K^2 равных квадратиков. Про некоторую ломаную известно, что она проходит через центры всех квадратиков (ломаная может пересекать сама себя). Каково минимальное число звеньев у этой ломаной?
А. Анджанс, Рига

Задача 3.(3)
Доказать, что в бесконечной последовательности попарно различных натуральных чисел, больших единицы, найдётся бесконечное количество чисел, которые больше своего номера в этой последовательности.
А. Анджанс, Рига

Задача 4.(8)
Многочлен P(x) со старшим коэффициентом, равным 1, обладает тем свойством, что среди значений, принимаемых им при натуральных значениях аргумента, встречаются все числа вида 2^m с натуральным m.
Докажите, что этот многочлен - первой степени.
Фольклор

Задача 5.
Рассматривается последовательность 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, ...
Существует ли арифметическая прогрессия
а)(2) длины 5;
б)(3) сколь угодно большой длины,
составленная из членов этой последовательности?
(решение обоих пунктов оценивается в 3 очка)
Г. Гальперин, Москва

Четвёртый турнир городов

Первый тур

1982-83 учебный год
В скобках после номера задачи или подпункта указано количество баллов, дававшихся за её правильное решение.

7-8 классы

Задача 1.(12)
В колоде 36 карт, разложенных в таком порядке, что масти периодически чередуются в последовательности: пики, трефы, червы, бубны, пики, трефы, червы, бубны, и т. д. С колоды сняли часть, перевернули её как целое и врезали в оставшуюся. После этого карты снимают по четыре. Доказать, что в каждой четвёрке все масти разные.
А. Мерков, Москва

Задача 2.(7)
Несколько фишек двух цветов расположены в ряд (встречаются оба цвета). Известно, что фишки, между которыми 10 или 15 фишек, одинаковы. Какое наибольшее число фишек может быть?
Фольклор

Задача 3.(7)
Доказать, что уравнение $m! * n! = k!$ имеет бесконечно много решений таких, что m, n и k - натуральные числа, большие единицы. (Через $k!$ обозначается произведение $1*2*3*...*k$).
Фольклор

Задача 4.
а)(5) 10 точек, делящие окружность на 10 равных дуг, попарно соединены пятью хордами. Обязательно ли среди них найдутся две хорды одинаковой длины?
б)(12) 20 точек, делящие окружность на 20 равных дуг, попарно соединены 10 хордами. Докажите, что среди них обязательно найдутся две хорды одинаковой длины.
В. Произволов, Москва

Первый тур

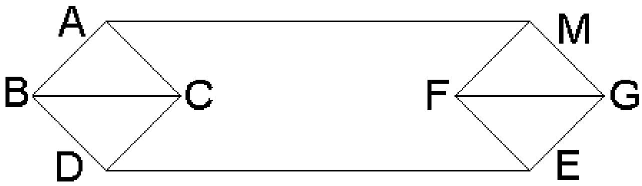
1982-83 учебный год
В скобках после номера задачи или подпункта указано количество баллов, дававшихся за её правильное решение.

9-10 классы

Задача 1.(15)

Докажите для каждого натурального числа n>1 равенство:
$[n^{1/2}]+ [n^{1/3}]+ ...+ [n^{1/n}] = [\log_2 n]+ [\log_3 n]+ ...+ [\log_n n]$
(Через [x] обозначена целая часть числа x.)
В.В. Кисиль

Задача 2.(8) Существует ли многогранник (не обязательно выпуклый), полных список рёбер которого имеет вид: AB, AC, BC, BD, CD, DE, EF, EG, FG, FH, GH, AH?
(На рисунке приведена схема соединения рёбер)



Фольклор

Задача 3.
На полосе бумаги написаны подряд 60 знаков: "x" и "o". Эту полоску разрезают на куски с симметричным расположением знаков.
Например: o, x x , o x x x x o , x o x , ...
а)(12) Докажите, что существует такой способ разрезания, при котором кусков не больше 24.
б)(12) Приведите пример такого расположения знаков, при котором меньше 15 кусков получить нельзя.
в)(?) Постарайтесь улучшить оценку.
Фольклор

Задача 4.(20)
а)(14) Из произвольной точки M внутри правильного n-угольника проведены перпендикуляры $\mathbf{MK_1}$, $\mathbf{MK_2}$, ..., $\mathbf{MK_n}$ к его сторонам (или их продолжениям).
Докажите, что сумма векторов $\mathbf{MK_1}+\mathbf{MK_2}+...+\mathbf{MK_n}$ равна $\mathbf{MO}$*n/2 (O - центр n-угольника).
б)(14) Докажите, что сумма векторов, проведённых из любой точки M внутри правильного тетраэдра перпендикулярно к его граням, равна (4/3)*$\mathbf{MO}$, где O - центр тетраэдра.
(за каждый пункт по 14 очков, за оба пункта - 20)
В.В. Прасолов, Москва

Задача 5.(1)
Марсианское метро на плане имеет вид замкнутой самопересекающейся линии, причём в одной точке может происходить только одно самопересечение.
Доказать, что тоннель с таким планом можно прорыть так, что поезд будет проходить попеременно под и над пересекающей линией.
Фольклор

Второй тур

20 марта 1983 г.

7-8 классы

По выбору можно решать один из двух вариантов: "Т" или "Л"

Первые 5 задач - вариант "Т".

Задача 1т.(8)
Пешеход шёл 3,5 часа, причём за каждый промежуток времени в один час он проходил ровно 5 км.
Следует ли из этого, что его средняя скорость за всё время равна 5 км/час?
Н. Константинов, Москва

Задача 2т.(13)
Правильный 4k-угольник разрезан на параллелограммы. Доказать, что среди них не менее k прямоугольников. Найти их общую площадь, если длина стороны 4k-угольника равна a.
(Если не найдена площадь, то задача оценивалась в 11 баллов).
В.В. Произволов, Москва

Задача 3т.
В Швамбрании N городов, каждые два соединены дорогой. При этом дороги сходятся лишь в городах (нет перекрестков, одна дорога поднята эстакадой над другой). Злой волшебник устанавливает на всех дорогах одностороннее движение таким образом, что если из города можно выехать, то в него нельзя вернуться.
Доказать, что
а)(3) волшебник может это сделать;
б)(1) найдётся город, из которого можно добраться до всех и найдется город, из которого нельзя выехать;
в)(5) существует и притом единственный путь, обходящий все города.
Л.М. Коганов, Москва

Задача 4т.(18)
На бесконечном листе клетчатой бумаги двое играют в такую игру: первый окрашивает произвольную клетку в красный цвет; второй окрашивает произвольную неокрашенную клетку в синий цвет; затем первый окрашивает произвольную неокрашенную клетку в красный цвет, а второй еще одну неокрашенную клетку в синий цвет и т. д. Первый стремится к тому, чтобы центры каких-то четырёх красных клеток образовали квадрат со сторонами, параллельными линиям сетки, а второй хочет ему помешать.
Может ли выиграть первый игрок?
Д.Г. Азов

Задача 5т.(18)
Доказать, что из 17 различных натуральных чисел либо найдутся пять таких чисел a, b, c, d, e, что каждое из чисел этой пятёрки, кроме последнего, делится на число, стоящее за ним, либо найдутся пять таких чисел, что ни одно из них не делится на другое.
Известная теорема

Вариант "Л" состоит из первых трёх задач варианта "Т" и двух других задач:

Задача 4л.(8)
Натуральные числа M и K отличаются перестановкой цифр. Доказать, что
а)(4) сумма цифр 2M равна сумме цифр 2K;
б)(4) сумма цифр M/2 равна сумме цифр K/2 (если M и K чётны);
в)(2) сумма цифр 5M равна сумме цифр 5K.
(пункты а) и б) вместе оцениваются в 6 баллов).
А.Д. Лисицкий

Задача 5л.(6)
Бильярд имеет форму прямоугольного треугольника, один из острых углов которого равен 30^o. Из этого угла по медиане противоположной стороны выпущен шар (материальная точка).
Доказать, что после восьми отражений (угол падения равен углу отражения) он попадёт в лузу, находящуюся в вершине угла 60^o.
Фольклор

Второй тур

20 марта 1983 г.

9-10 классы

По выбору можно решать один из двух вариантов: "Т" или "Л"

Первые 5 задач - вариант "Т".

Задача 1т.(12)
Числа от 1 до 1000 расставлены по окружности. Доказать, что их можно соединить 500 непересекающимися отрезками, разность чисел на концах которых (по модулю) не более 749.
А.А. Разборов

Задача 2т.(8)
На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки P, M и K так, что AM, BK и CP пересекаются в одной точке и сумма векторов **AM**, **BK** и **CP** равна 0.
Доказать, что K, M и P - середины сторон треугольника.
Фольклор

Задача 3т.
В Швамбрании N городов, каждые два соединены дорогой. При этом дороги сходятся лишь в городах (нет перекрестков, одна дорога поднята эстакадой над другой). Злой волшебник устанавливает на всех дорогах одностороннее движение таким образом, что если из города можно выехать, то в него нельзя вернуться. Доказать, что
а)(2) волшебник может это сделать;
б)(1) найдётся город, из которого можно добраться до всех и найдётся город, из которого нельзя выехать;
в)(4) волшебник может осуществить своё намерение N! способами.
Л. Коганов

Задача 4т.
а)На бесконечном листе клетчатой бумаги двое играют в такую игру: первый окрашивает произвольную клетку в красный цвет; второй окрашивает произвольную неокрашенную клетку в синий цвет; затем первый окрашивает произвольную неокрашенную клетку в красный цвет, а второй еще одну неокрашенную клетку в синий цвет и т. д. Первый стремится к тому, чтобы центры каких-то четырёх красных клеток образовали квадрат со сторонами, параллельными линиям сетки, а второй хочет ему помешать.
а)(12) Может ли выиграть первый игрок?
б)(30)Каков будет ответ на этот вопрос, если второй игрок закрашивает синим цветом сразу по две клетки?
Д.Г. Азов

Задача 5т.(30)
k вершин правильного n-угольника P закрашены. Закраска называется почти равномерной, если для любого натурального m верно следующее условие: если M_1 - множество m расположенных подряд вершин и M_2 - другое такое множество, то количество закрашенных вершин в M_1 отличается от количества закрашенных вершин в M_2 не больше, чем на 1.
Доказать, что для любых натуральных n и k ($k \le n$) почти равномерная закраска существует и что она единственна с точностью до поворотов закрашенного множества.
М. Концевич, Москва

<u>Вариант "Л" состоит из первых трёх задач варианта "Т" и двух других задач:</u>

Задача 4л.(7)
Несколько ребят стоят в круг. У каждого есть некоторое количество конфет. Сначала у каждого чётное количество конфет. По команде каждый передает половину своих конфет стоящему справа. Если после этого у кого-нибудь оказалось нечётное количество конфет, то ему извне добавляется одна конфета. Это повторяется много раз. Доказать, что настанет время, когда у всех будет поровну конфет.
А. Анджанс

Задача 5л.(6)
Внутри правильного n-угольника взята точка, проекции которой на все стороны попадают во внутренние точки сторон. Этими точками стороны разделяются на 2n отрезков. Занумеруем их подряд: 1, 2, 3, ..., 2n. Доказать, что сумма длин отрезков с чётными номерами равна сумме длин отрезков с нечётными номерами.
А. Анджанс

Пятый турнир городов

ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур, 20 ноября 1983 г.
7-8 кл.

Задача 1.(4)
Внутри квадрата ABCD взята точка M.
Доказать, что точки пересечения медиан треугольников ABM, BCM, CDM и DAM образуют квадрат.
Фольклор

Задача 2.(8)
Найти все такие натуральные K, которые можно представить в виде суммы двух взаимно-простых чисел, отличных от 1.
Фольклор

Задача 3.(12)
Построить четырёхугольник по сторонам и расстоянию между серединами диагоналей.
И.З. Титович

Задача 4.(12)
a_1, a_2, a_3, ... - монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел. Известно, что $a_{a_k}=3k$ для любого k.
Найти значение a_{100}.
А. Анджанс

Задача 5.(2+12)
На шахматной доске N*N стоят N (в условии была ошибка - N^2 - *Ред.*) шашек. Можно ли их переставить так, чтобы любые две шашки, отстоявшие на ход коня, после перестановки отстояли друг от друга лишь на ход короля (то есть стояли рядом)? Рассмотрите два случая:
а)(2) n=3;
б)(12) n=8.
С. Стефанов

ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур, 20 ноября 1983 г.
9-10 кл.

Задача 1.(4)
На сторонах CB и CD квадрата ABCD выбраны точки M и K так, что периметр треугольника CMK равен удвоенной стороне квадрата.
Найти величину угла MAK.
Фольклор

Задача 2.(2+14)
Рассматриваются девятизначные числа, состоящие из неповторяющихся цифр от 1 до 9 в разном порядке. Пара таких чисел называется "кондиционной", если их сумма равна 987654321.
а)(2) Доказать, что найдутся хотя бы две кондиционные пары (считаем, что (a,b) и (b,a) - одна и та же пара).
б)(14) Доказать, что кондиционных пар - нечётное число.
Г. Гальперин

Задача 3.(10)
Вокруг треугольника ABC описана окружность. Её центр O находится внутри треугольника. Из точки O опущены перпендикуляры на стороны и продолжены до окружности; получились точки K, M и P. Рассмотрим отрезки OK, OM и OP как векторы, направленные из точки O.
Доказать, что сумма этих векторов равна вектору OO_1, где O_1 - центр вписанной окружности.
В. Гальперин

Задача 4.(8)
a_1, a_2, a_3, ... - монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел. Известно, что $a_{a_k}=3k$ для любого k.
Найти a_{1983}.
А. Анджанс

Задача 5.(9+5)
На бесконечной во все стороны шахматной доске выделено некоторое множество клеток A. На всех клетках доски, кроме множества A, стоят короли. Все короли могут по команде одновременно сделать ход, заключающийся в том, что король либо остается на месте, либо занимает соседнее поле, то есть делает "ход короля". При этом он может занять и то поле, с которого сходит другой король, но в результате хода двум королям оказаться в одной клетке запрещается.
Существует ли такое K и такой способ движения королей, что после K ходов вся доска будет заполнена королями? Рассмотрите варианты:
а)(9) A есть множество всех клеток, у которых обе координаты кратны 100 (предполагается, что одна горизонтальная и одна вертикальная линии занумерованы всеми целыми числами от минус бесконечности до бесконечности и каждая клетка доски обозначается двумя числами - координатами по этим двум осям).
б)(5) A есть множество всех клеток, каждая из которых бьется хотя бы одним из 100 ферзей, расположенных каким-то фиксированным образом.
Фольклор

ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур, подготовительный вариант, Москва, 8 апреля 1984 г.
6-7-8 кл.

Задача 1.(3)
175 шалтаев стоят дороже, чем 125 болтаев, но дешевле, чем 126 болтаев (Подразумевается, что каждый шалтай и каждый болтай стоят целое число копеек - *Ред.*)
Доказать, что на покупку трёх шалтаев и одного болтая 80 коп. не хватит.
С. Фомин

Задача 2.(3)
В выпуклом пятиугольнике ABCDE
AE=AD, AB=AC, $\angle$CAD=$\angle$AEB+$\angle$ABE.
Доказать, что отрезок CD вдвое длиннее медианы AM треугольника ABE.
Фольклор

Задача 3.(2+3+4)
Рассматриваются 4(N-1) граничных клеток таблицы размером N*N. Нужно вписать в эти клетки последовательные 4(N-1) целых чисел (не обязательно положительных) так, чтобы сумма чисел в вершинах любого прямоугольника со сторонами, параллельными диагоналям таблицы, в том числе и в "вырожденных" прямоугольниках - диагоналях, равнялась одному и тому же числу (для прямоугольников суммируются 4 числа, для диагоналей - 2 числа).
Возможно ли это? Рассмотрите случаи:
а)(2) N=3;
б)(3) N=4;
в)(4) N=5.
В. Болтянский

Задача 4.
Через P(x) обозначается произведение всех цифр натурального числа x, через S(x) - сумма цифр числа x.
Сколько решений имеет уравнение:
P(P(x))+P(S(x))+S(P(x))+S(S(x))=1984 ?
Фольклор

Задача 5.(8)
Дана бесконечная клетчатая бумага со стороной клетки, равной единице. Расстоянием между двумя клетками называется длина кратчайшего пути ладьи от одной клетки до другой (считается путь центра ладьи). В какое наименьшее число красок нужно раскрасить доску (каждая клетка закрашивается одной краской), чтобы две клетки, находящиеся на расстоянии 6, были всегда окрашены разными красками?
Указать раскраску и доказать, что меньшим числом красок обойтись нельзя.
А. Печковский, И. Итенберг

ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур, основной вариант, 8 апреля 1984 г.
6-7-8 кл.

Задача 1.(8)
Дана бесконечная клетчатая бумага со стороной клетки, равной единице. Расстоянием между двумя клетками называется длина кратчайшего пути ладьи от одной клетки до другой (считается путь центра ладьи). В какое наименьшее число красок нужно раскрасить доску (каждая клетка закрашивается одной краской), чтобы две клетки, находящиеся на расстоянии 6, были всегда окрашены разными красками?
Указать раскраску и доказать, что меньшим числом красок обойтись нельзя.
А. Г. Печковский, И. В. Итенберг

Задача 2.(8)
На уроке танцев 15 мальчиков и 15 девочек построили двумя параллельными колоннами, так что образовалось 15 пар. В каждой паре измерили разницу роста мальчика и девочки (разница берётся по абсолютной величине, то-есть из большего вычитают меньшее). Максимальная разность оказалась 10 см. В другой раз перед образованием пар каждую колонну предварительно построили по росту. Докажите, что максимальная разность будет не больше 10 см.
А. Г. Печковский

Задача 3.(2+3+4)
Рассматриваются 4(N-1) граничных клеток таблицы размером N*N. Нужно вписать в эти клетки последовательные 4(N-1) целых чисел (не обязательно положительных) так, чтобы сумма чисел в вершинах любого прямоугольника со сторонами, параллельными диагоналям таблицы, в том числе и в "вырожденных" прямоугольниках - диагоналях, равнялась одному и тому же числу (для прямоугольников суммируются 4 числа, для диагоналей - 2 числа). Возможно ли это? Рассмотрите случаи:
а)(2) N=3;
б)(3) N=4;
в)(4) N=5.
В. Болтянский

Задача 4.(12)
Разрезать равнобедренный прямоугольный треугольник на несколько подобных ему треугольников, так чтобы любые два из них были различны по размерам.
А. Савкин

Задача 5.(12)
Докажите, что существует бесконечное число пар таких соседних атуральных чисел, что разложение каждого из них содержит любой простой сомножитель не менее, чем во второй степени. Примеры таких пар чисел: (8,9), (288,289).
А. Анджанс

ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур, подготовительный вариант, Москва, 8 апреля 1984 г.
9-10 кл.

Задача 1.(2+3)
175 шалтаев стоят дороже, чем 125 болтаев, но дешевле, чем 126 болтаев (Подразумевается, что каждый шалтай и каждый болтай стоят целое число копеек. - *Ред.*)
Доказать, что на покупку трёх шалтаев и одного болтая не хватит:
а)(2) 80 коп.;
б)(3) одного рубля.
С. Фомин

Задача 2.(9)
Из вершин основания тетраэдра в боковых гранях проводят высоты, и в каждой из боковых граней основания двух лежащих в ней высот соединяются прямой.
Докажите, что эти три прямые параллельны одной плоскости.
И. Шарыгин

Задача 3.(4)
Из листа клетчатой бумаги размером 29*29 клеточек вырезали 99 квадратиков 2*2 (режут по линиям). Доказать, что из оставшейся части листа можно вырезать ещё хотя бы один такой же квадратик.
С. Фомин

Задача 4.(8)
F(x) - возрастающая функция, определённая на отрезке [0;1]. Известно, что область её значений принадлежит отрезку [0;1]. Доказать, что, каково бы ни было натуральное N, график функции можно покрыть N прямоугольниками, стороны которых параллельны осям координат, так что площадь каждого равна $1/N^2$. Считайте функцию F(x) непрерывной, изменяющейся от 0 до 1.
Примечание:В прямоугольник мы включаем его внутренние точки и точки его границы.
А. Анджанс

Задача 5.(4+4)
а)(4) Во всех клетках квадрата 20*20 стоят солдатики. Ваня называет число D, а Петя переставляет солдатиков так, чтобы каждый передвинулся на расстояние не меньше D (расстояние берётся между центрами старой и новой клеток).
При каких D это возможно? (Указать наибольшее возможное D, доказать, что всех солдатиков можно передвинуть не меньше, чем на D, и доказать, что большее D взять нельзя.)
б)(4) Эта же задача для квадрата 21*21.
С. С. Кротов

ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур, основной вариант, 8 апреля 1984 г.
9-10 кл.

Задача 1.
а)(4) Во всех клетках квадрата 20*20 стоят солдатики. Ваня называет число D, а Петя переставляет солдатиков так, чтобы каждый передвинулся на расстояние не меньше D (расстояние берётся между центрами старой и новой клеток).
При каких D это возможно? Укажите наибольшее возможное D, покажите, что всех солдатиков можно передвинуть не меньше, чем на D, и докажите, что большее D взять нельзя.
б)(4) Эта же задача для квадрата 21*21.
С. Кротов

Задача 2.(9)
Из вершин основания тетраэдра в боковых гранях провели высоты, а затем в каждой из боковых граней основания двух лежащих в ней высот соединили прямой.
Докажите, что эти три прямые параллельны одной плоскости.
И. Шарыгин

Задача 3.(12)
По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное количество комнат, занумерованных числами от минус бесконечности до плюс бесконечности. В комнатах живут 9 пианистов (в одной комнате могут жить несколько пианистов), кроме того, в каждой комнате находится по роялю. Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах (K-той и (K+1)-ой), приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в (K-1)-ую и (K+2)-ую комнаты.
Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся
(пианисты, живущие в одной комнате, друг другу не мешают).
В. Ильичёв

Задача 4.(9)
F(x) - возрастающая функция, определённая на отрезке [0;1]. Известно, что область её значений принадлежит отрезку [0;1]. Доказать, что, каково бы ни было натуральное N, график функции можно покрыть N прямоугольниками, стороны которых параллельны осям координат, так что площадь каждого равна $1/N^2$. Считайте функцию F(x) непрерывной, изменяющейся от 0 до 1.
<u>Примечание 1:</u>В прямоугольник мы включаем его внутренние точки и точки его границы.
<u>Примечание 2:</u>В задаче непрерывность F(x) не требуется. Если Вам для решения задачи удобно считать, что F(x) - непрерывная функция, пробегающая значения от 0 до 1, можете принять такое предположение; решение с такими предположениями оценивается в 8 баллов.
А. Анджанс

Задача 5.(9+3)
Для каждого натурального N обозначим через P(N) число разбиений N в сумму натуральных слагаемых (разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми; например, P(4)=5, потому что 4=4=1+3=2+2=1+1+2=1+1+1+1 - то-есть пять способов).
а)(9) Количество различных чисел в данном разбиении назовем его разбросом (например, разбиение 4=1+1+2 имеет разброс 2, потому что в этом разбиении два различных числа).
Докажите, что сумма разбросов всех разбиений числа N равна
1+P(1)+P(2)+...+P(N-1).
б)(3) Докажите, что это число не больше, чем $(2*N*P(N))^{1/2}$.
А. В. Зелевинский
(в другом месте было написано $2*N*(P(N))^{1/2}$. - *Ред.*)

Шестой Турнир, 1984-1985

ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур, подготовительный вариант, 18 ноября 1984 г.

7-8 кл.

Задача 1.(6)
Биссектрисы BD и CE треугольника ABC пересекаются в точке O.
Докажите, что если OD=OE, то либо треугольник равнобедренный, либо его угол при вершине A равен 60^o.
Фольклор

Задача 2.(6)
Посёлок построен в виде квадрата 3 квартала на 3 квартала (кварталы - квадраты со стороной b, всего 9 кварталов).
Какой наименьший путь должен пройти асфальтоукладчик, чтобы заасфальтировать все улицы, если он начинает и кончает свой путь в угловой точке A? (Стороны квадрата - тоже улицы).
Московский фольклор

Задача 3.(4)
Решить в целых числах уравнение $2^n+7=x^2$.
Фольклор

Задача 4.(8)
В прямоугольник вписан четырёхугольник (по вершине на каждой стороне).
Докажите, что его периметр не меньше удвоенной диагонали прямоугольника.
В. Произволов

Задача 5.(6)
Доказать, что среди 18 последовательных трёхзначных чисел найдётся хотя бы одно, которое делится на сумму своих цифр.
Фольклор

ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур, основной вариант, 18 ноября 1984 г.

7-8 кл.

Задача 1.(6)
Биссектрисы BD и CE треугольника ABC пересекаются в точке O.
Докажите, что если OD=OE, то либо треугольник равнобедренный, либо его угол при вершине A равен 60^o.
Фольклор

Задача 2.(6)
Посёлок построен в виде квадрата 3 квартала на 3 квартала (кварталы - квадраты со стороной b, всего 9 кварталов).
Какой наименьший путь должен пройти асфальтоукладчик, чтобы заасфальтировать все улицы, если он начинает и кончает свой путь в угловой точке A? (Стороны квадрата - тоже улицы).
Московский фольклор

Задача 3.(6)
На плоскости лежит конечное множество точек M, такое что никакие три точки не лежат на одной прямой. Некоторые точки соединены друг с другом отрезками, так что из каждой точки выходит не более одного отрезка. Разрешается заменить пару пересекающихся отрезков AB и CD парой противоположных сторон AC и BD четырёхугольника ABCD. В полученной системе отрезков разрешается снова произвести подобную замену и т. д.
Может ли последовательность таких замен быть бесконечной?
В. Колосов

Задача 4.(12)
На фестивале камерной музыки собралось шесть музыкантов. На каждом концерте часть музыкантов выступает, а остальные слушают их из зала.
За какое наименьшее число концертов каждый из шести музыкантов сможет послушать (из зала) всех остальных?
Из канадского фольклора

Задача 5.(12)
На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т.п.).
Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?
В. Ильичев

ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур, подготовительный вариант, 18 ноября 1984 г.

9-10 кл.

Задача 1.(5)
В выпуклом шестиугольнике ABCDEF AB параллельна CF, CD параллельна BE и EF параллельна AD.
Докажите, что площади треугольников ACE и BDF равны.
Фольклор

Задача 2.(5)
Посёлок построен в виде квадрата 3 квартала на 3 квартала (кварталы - квадраты со стороной b, всего 9 кварталов). Какой наименьший путь должен пройти асфальтоукладчик, чтобы заасфальтировать все улицы, если он начинает и кончает свой путь в угловой точке A? (Стороны квадрата - тоже улицы).
Московский фольклор

Задача 3.(5)
В треугольнике ABC угол B равен углу C, и каждый из них равен 40^o, BD - биссектриса.
Докажите, что BD+DA=BC.
Фольклор

Задача 4.(5)
Доказать, что среди 18 последовательных трёхзначных чисел найдётся хотя бы одно, которое делится на сумму своих цифр.
Фольклор

Задача 5.(12)
На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т.п.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?
В. Ильичев

ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур, основной вариант, 18 ноября 1984 г.

9-10 кл.

Задача 1.(5)
В выпуклом шестиугольнике ABCDEF: AB параллельна CF, CD параллельна BE и EF параллельна AD.
Докажите, что площади треугольников ACE и BDF равны.
Фольклор

Задача 2.(10)
Набор чисел A_1, A_2, ..., A_{100} получен некоторой перестановкой из чисел 1, 2, ..., 100. Образуют сто чисел:
$B_1=A_1$, $B_2=A_1+A_2$, $B_3=A_1+A_2+A_3$, ..., $B_{100}=A_1+A_2+A_3+...+A_{100}$.
Докажите, что среди остатков от деления на 100 чисел B_1, B_2, ..., B_{100} найдутся 11 различных.
Л. Курляндчик

Задача 3.(10)
В правильном десятиугольнике проведены все диагонали. Возле каждой вершины и возле каждой точки пересечения диагоналей поставлено число +1 (рассматриваются только сами диагонали, а не их продолжения). Разрешается одновременно изменить все знаки у чисел, стоящих на одной стороне или на одной диагонали.
Можно ли с помощью нескольких таких операций изменить все знаки на противоположные?
Фольклор

Задача 4.(10)
На фестивале камерной музыки собралось шесть музыкантов. На каждом концерте часть музыкантов выступает, а остальные слушают их из зала. За какое наименьшее число концертов каждый из шести музыкантов сможет послушать (из зала) всех остальных?
Из канадского фольклора

Задача 5.(10)
В квадрате 7*7 клеток размещено 16 плиток размером 1*3 клетки и одна плитка 1*1.
Докажите, что плитка 1*1 либо лежит в центре, либо примыкает к границам квадрата.
Фольклор

ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур, подготовительный вариант, 14 апреля 1985 г.

7-8 кл.

Задача 1.(3)
Медиана, биссектриса и высота треугольника пересекаются в точке O. Отрезок биссектрисы от вершины до точки O равен отрезку высоты от вершины до точки O.
Докажите, что треугольник равносторонний.
Фольклор

Задача 2.(5)
Имеется 68 монет, причём известно, что любые две монеты различаются по весу. За 100 взвешиваний на двухчашечных весах без гирь найти самую тяжелую и самую лёгкую монеты.
С. Фомин

Задача 3.(5)
Найти все решения системы уравнений:
$(x+y)^3=z$; $(y+z)^3=x$; $(z+x)^3=y$.
По мотивам A. Aho, J. Hopfcrot, J. Ullman

Задача 4.(5)
На прямой сидят три кузнечика, каждую секунду прыгает один кузнечик. Он прыгает через какого-нибудь кузнечика (но не через двух сразу).
Докажите, что через 1985 секунд они не могут вернуться в исходное положение.
Ленинградская математическая олимпиада, 1985

Задача 5.(5)
Каждый член последовательности, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему числу его суммы цифр. Первым членом последовательности является единица.
Может ли в последовательности встретиться число 123456?
Д. Фомин

ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур, основной вариант, 14 апреля 1985 г.

7-8 кл.

Задача 1.(5)
a, b, c - длины сторон треугольника, Г - величина угла против стороны c. Доказать, что c не меньше, чем (a+b)*sin(Г/2).
Фольклор

Задача 2.(3+5)
Целой частью числа A называется наибольшее целое число, не превышающее A; обозначение: [A]. Дробной частью A называется A-[A]; обозначение: {A}.
а)(3) Привести пример такого положительного A, что {A}+{1/A}=1.
б)(5) Может ли такое A быть рациональным числом?
И. Варге, Румыния

Задача 3.(8)
В классе 32 ученика. Было организовано 33 кружка, причём каждый кружок состоит из трёх человек и никакие два кружка не совпадают по составу.
Доказать, что найдутся такие два кружка, которые пересекаются ровно по одному ученику.
Фольклор

Задача 4.(4)
Квадрат разбит на пять прямоугольников так, что четыре угла квадрата являются углами четырёх прямоугольников, площади которых равны между собой, а пятый прямоугольник не имеет общих точек со сторонами квадрата
Докажите, что этот пятый прямоугольник есть квадрат.

```
 ----------
|       |  |
|       |  |
|-------|  |
|  |    |  |
|  |    |  |
|  |    |  |
|  |    |  |
|  |-------|
|  |       |
|  |       |
 ----------
```

В. Произволов

Задача 5.(6+16)
В таблицу 10*10 нужно записать в каком-то порядке цифры 0, 1, 2, 3, ..., 9 так, что каждая цифра встречалась бы 10 раз.
а)(6) Можно ли это сделать так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце встречалось не более четырёх различных цифр?
б)(16) Докажите, что найдётся строка или столбец, в которой (в котором) встречается не меньше четырёх различных чисел.
Л. Д. Курляндчик

ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур, подготовительный вариант, 14 апреля 1985 г.

9-10 кл.

Задача 1.(4)
В четырёхугольнике ABCD: AB=BC=1, /B=100^o, /D=130^o. Найти (длину отрезка - *Ред.*) BD.
Фольклор

Задача 2.(6)
Из чисел 1, 2, 3, ..., 1985 выбрать наибольшее количество чисел так, чтобы разность любых двух выбранных чисел не была простым числом. (простые числа - 2, 3, 5, 7, 11; единица простым числом не является.)
Фольклор

Задача 3.(6)
Даны три действительных числа: a, b и c. Известно,
что $a+b+c > 0$, $ab+bc+ca > 0$, $abc > 0$.
Докажите, что $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$.
Фольклор

Задача 4.(4)
На прямой сидят три кузнечика, каждую секунду прыгает один кузнечик. Он прыгает через какого-нибудь кузнечика (но не через двух сразу).
Докажите, что через 1985 секунд они не могут вернуться в исходное положение.
Ленинградская математическая олимпиада, 1985

Задача 5.(4)
Квадрат разбит на пять прямоугольников так, что четыре угла квадрата являются углами четырёх прямоугольников, площади которых равны между собой, а пятый прямоугольник не имеет общих точек со сторонами квадрата
Докажите, что этот пятый прямоугольник есть квадрат.

```
 ----------
|        |  |
|        |  |
|-------|  |
|  |     |  |
|  |     |  |
|  |     |  |
|  |     |  |
|  |-------|
|  |        |
|  |        |
 ----------
```

В. Произволов

ШЕСТОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур, основной вариант, 14 апреля 1985 г.

9-10 кл.

Задача 1.(6)
Доказать, что площадь проекции единичного куба на плоскость равна длине его проекции на прямую, перпендикулярную к этой плоскости.
Фольклор

Задача 2.(4+4)
Радиус OM круга равномерно вращается, поворачиваясь в секунду на угол $360^{o}/N$ (N - натуральное число, большее 3). В начальный момент он занимал положение OM_0, через секунду - OM_1, ещё через две секунды после этого (то-есть через три секунды после начала) - OM_2, ещё через три секунды после этого - OM_3, и т.д., ещё через N-1 секунд после OM_{N-2} - OM_{N-1}.
При каких N эти положения радиуса делят круг на N равных секторов?
а)(4) Верно ли, что к числу таких N относятся все степени двойки?
б)(4) Относятся ли к числу таких N какие-либо числа, не являющиеся степенями двойки?
В. Произволов

Задача 3.(6)
В классе 32 ученика. Было организовано 33 кружка, причём каждый кружок состоит из трёх человек и никакие два кружка не совпадают по составу.
Доказать, что найдутся такие два кружка, которые пересекаются ровно по одному ученику.
Фольклор

Задача 4.(8)
Выпуклой фигурой F нельзя накрыть полукруг радиуса R.
Может ли случиться, что двумя фигурами, равными F, можно накрыть круг радиуса R? А если взять невыпуклую фигуру F?
Фигура называется выпуклой, если для любых двух её точек отрезок, соединяющий эти точки, целиком входит в фигуру.
Н. Васильев, А. Самосват

Задача 5.(12+12)
а)(12) Квадрат разбит на прямоугольники. "Цепочкой" называется такое подмножество K множества этих прямоугольников, что существует сторона квадрата A, целиком закрытая проекциями прямоугольников из K, но при этом ни в какую точку A не проектируются внутренние точки двух прямоугольников из K (мы относим к прямоугольнику и его стороны). Доказать, что любые два прямоугольника разбиения входят в некоторую цепочку.
б)(12) Аналогичная задача для куба, разбитого на прямоугольные параллелепипеды (в определении цепочки нужно заменить сторону на ребро).

Седьмой Турнир, 1985-1986

СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 24 ноября 1985 г.
7-8 кл.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Восемь футбольных команд провели турнир в один круг (каждая команда сыграла с каждой один раз). При этом не было ничьих. Доказать, что можно выделить такие четыре команды A, B, C и D, что A выиграла у B, C и D; B выиграла у C и D, C выиграла у D.
Фольклор

Задача 2.(1+3+1)
Игра "кошки-мышки". Кошка ловит мышку в лабиринтах А, Б, В. Кошка ходит первой, начиная с узла, отмеченного буквой "К". Затем ходит мышка (из узла "М"), затем опять кошка и т. д. Из любого узла кошка и мышка ходят в любой соседний узел. Если в какой-то момент кошка и мышка оказываются в одном узле, кошка ест мышку.
Сможет ли кошка поймать мышку в любом из случаев А, Б, В?

```
*-*-*-*     *-*-*       *-*-*
| | | |     | | |\      | | |\
*-*-М-*     *-*-М-*     *-*-М-*
| | | |     | | | |     | | | |
*-К-*-*     *-К-*-*     *-К-*-*
| | | |     | | | |      \| | |
*-*-*-*     *-*-*-*       *-*-*
  А(1)        Б(3)        В(1)
```
А. Сосинский

Задача 3.(4)
Учитель продиктовал классу задание, которое каждый ученик выполнил в своей тетради. Вот это задание: "Нарисуйте две концентрические окружности радиусов 1 и 10. К малой окружности проведите три касательных так, чтобы точки их пересечения A, B и C лежали внутри большой окружности. Измерьте площадь S треугольника ABC и площади S_1, S_2 и S_3 трёх образовавшихся "секторов" с вершинами в точках A, B и C. Найдите $S_1+S_2+S_3-S$."
Доказать, что у всех учеников (если они правильно выполнили задание) получились одинаковые результаты.
А. Толпыго

Задача 4.(4)
Два шахматиста играют между собой в шахматы с часами (сделав ход, шахматист останавливает свои часы и пускает часы другого). Известно, что после того, как оба сделали по 40 ходов, часы обоих шахматистов показывали одно и то же время: 2 часа 30 мин.
Докажите, что в ходе партии был момент, когда часы одного обгоняли часы другого не менее, чем на 1 мин. 51 сек.
Можно ли утверждать, что в некоторый момент разница показаний часов была равна 2 мин.?
С. Фомин

Задача 5.(10)
Двое бросают монету: один бросил её 10 раз, другой - 11 раз.
Чему равна вероятность того, что у второго монета упала орлом больше раз, чем у первого?

Формулировка той же задачи для тех, кто не знает понятия "вероятность":
Рассматриваются всевозможные числа из 21 цифры, все цифры которых равны либо 1, либо 2.
Какова среди этих чисел доля таких, у которых на последних 11 местах стоит больше единиц, чем на первых 10?
С. Фомин

Задача 6.(10)
Последовательность чисел x_1, x_2, ... такова, что $x_1=1/2$ и для всякого натурального k: $x_{k+1}=x_k^2+x_k$. Найдите целую часть суммы $1/(x_1+1) + 1/(x_2+1) + ... + 1/(x_{100}+1)$.
А. Анджанс

Задача 7.(3+5)
Игра в "супершахматы" ведётся на доске размером 30*30, и в ней участвуют 20 разных фигур, каждая из которых ходит по своим правилам. Известно, однако, что
1) любая фигура с любого поля бьёт не более 20 полей и
2) если фигуру сдвинуть на несколько полей, то битые поля соответственно сдвигаются (может быть, исчезают за пределы поля).
Докажите, что
а)(3) любая фигура F бьёт данное поле X не более, чем с 20 полей;
б)(3+5) можно расставить на доске все 20 фигур так, чтобы ни одна из них не била другую.
А. Толпыго

СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 24 ноября 1985 г.
9-10 кл.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Дан выпуклый четырёхугольник и точка M внутри него. Доказать, что сумма расстояний от точки M до вершин четырёхугольника не превосходит
$P+D_1+D_2$, где P - периметр, D_1 и D_2 - длины диагоналей четырёхугольника.
Фольклор

Задача 2.(3)
Два шахматиста играют между собой в шахматы с часами (сделав ход, шахматист останавливает свои часы и пускает часы другого). Известно, что после того, как оба сделали по 40 ходов, часы обоих шахматистов показывали одно и то же время: 2 часа 30 мин.
Докажите, что в ходе партии был момент, когда часы одного обгоняли часы другого не менее, чем на 1 мин. 51 сек.
Можно ли утверждать, что в некоторый момент разница показаний часов была равна 2 мин.?
С. Фомин

Задача 3.(3)
Двое бросают монету: один бросил её 10 раз, другой - 11 раз.
Чему равна вероятность того, что у второго монета упала орлом больше раз, чем у первого?

Формулировка той же задачи для тех, кто не знает понятия "вероятность":
Рассматриваются всевозможные числа из 21 цифры, все цифры которых равны либо 1, либо 2.
Какова среди этих чисел доля таких, у которых на последних 11 местах стоит больше единиц, чем на первых 10?
С. Фомин

Задача 4.(7)
Последовательность чисел x_1, x_2, ... такова, что $x_1=1/2$ и для всякого натурального k: $x_{k+1}=x_k^2+x_k$.
Найдите целую часть суммы $1/(x_1+1) + 1/(x_2+1) + ... + 1/(x_{100}+1)$.
А. Анджанс

Задача 5.(8+4)
а)(8) Точка O лежит внутри выпуклого N-угольника $A_1A_2A_3... A_N$. Рассматриваются углы A_iOA_j при всевозможных парах (i,j) (i, j - различные натуральные числа от 1 до N).
Доказать, что среди этих углов найдётся по крайней мере N-1 не острых (прямых, тупых или развёрнутых) углов.
б)(4) Та же задача для выпуклого многогранника, имеющего N вершин.
В. Болтянский

Задача 6.(10)
В треугольнике ABC проведены высота AH и биссектриса BE. Известно, что $\angle BEA=45^o$.
Докажите, что $\angle EHC=45^o$.
И. Шарыгин

Задача 7.(10)
Игра в "супершахматы" ведётся на доске размером 100*100, и в ней участвуют 20 разных фигур, каждая из которых ходит по своим правилам. Известно, что любая фигура с любого места бьёт не более 20 полей (но больше о правилах ничего не сказано, например, если фигуру передвинуть, то о том, как изменится множество битых полей, мы ничего не знаем).
Докажите, что можно расставить на доске все 20 фигур так, чтобы ни одна из них не била другую.
А. Толпыго

СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 16 марта 1986 г.
7-8 кл.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Через вершины A и B треугольника ABC проведены две прямые, которые разбивают треугольник на четыре фигуры (три треугольника и один четырёхугольник). Известно, что три из этих фигур имеют одинаковые площади. Докажите, что четырёхугольник - среди них.
Г. Гальперин, А. Савин

Задача 2.(6)
Натуральное число n записано в десятичной системе счисления. Известно, что если какая-то цифра входит в эту запись, то n делится нацело на эту цифру (0 в записи не встречается).
Какое максимальное число различных цифр может содержать эта запись?
С. Фомин

Задача 3.(4)
Улицы города расположены в трёх направлениях, так что все кварталы - равные между собой равносторонние треугольники. Правила уличного движения таковы, что через перекресток можно проехать либо прямо, либо повернув влево или вправо на 120^o в ближайшую улицу. Поворачивать разрешается только на перекрестках. Две машины выехали друг за другом из одной точки в одном направлении и едут с одинаковой скоростью, придерживаясь этих правил.
Может ли случиться, что через некоторое время они на какой-то улице (не на перекрестке) встретятся?
Н. Константинов

Задача 4.(5)
Дан квадрат ABCD. На стороне AB взята точка K, на стороне CD - точка L, на отрезке KL - точка M. Докажите, что вторая (отличная от M) точка пересечения окружностей, описанных около треугольников AKM и MLC, лежит на диагонали AC.
В. Дубровский

Задача 5.(6)
20 футбольных команд проводят первенство. В первый день все команды сыграли по одной игре. Во второй также все команды сыграли по одной игре. Докажите, что после второго дня можно указать такие 10 команд, что никакие две из них не играли друг с другом.
С. А. Генкин

Задача 6.(8)
(Сизифов труд.) На горе 1001 ступенька, на некоторых лежат камни, по одному на ступеньке. Сизиф берёт любой камень и переносит его на ближайшую сверху свободную ступеньку (то-есть, если следующая ступенька свободна то на неё, а если занята, то на несколько ступенек вверх до первой свободной). После этого Аид скатывает на одну ступеньку вниз один из камней, у которых предыдущая ступенька свободна. Камней 500, и первоначально они лежали на нижних 500 ступеньках. Сизиф и Аид действуют по очереди, начинает Сизиф. Его цель - положить камень на верхнюю ступеньку.
Может ли Аид ему помешать?
С. Елисеев Р

Задача 7.(3+3+3+3)
30 учеников одного класса решили побывать друг у друга в гостях. Известно, что ученик за вечер может сделать несколько посещений, и что в тот вечер, когда к нему кто-нибудь должен прийти, он сам никуда не уходит. Покажите, что для того, чтобы все побывали в гостях у всех,
а)(3) четырёх вечеров недостаточно,
б)(3) пяти вечеров также недостаточно,
в)(3) а десяти вечеров достаточно,
г)(3) и даже семи вечеров тоже достаточно.
Фольклор

СЕДЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 16 марта 1986 г.
9-10 кл.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
При каком натуральном K величина $K^2/1{,}001^k$ достигает максимального значения?
Фольклор

Задача 2.(4)
20 футбольных команд проводят первенство. В первый день все команды сыграли по одной игре. Во второй также все команды сыграли по одной игре.
Докажите, что после второго дня можно указать такие 10 команд, что никакие две из них не играли друг с другом.
С. Генкин

Задача 3.(4)
На рёбрах произвольного (не обязательно правильного) тетраэдра указали направления.
Может ли сумма полученных таким образом шести векторов оказаться равной нуль-вектору?
Фольклор

Задача 4.(4)
Функция F задана на всей вещественной оси, причём для любого x имеет место равенство:
$F(x+1)F(x)+F(x+1)+1=0$.
Докажите, что функция f не может быть непрерывной.
А. Плоткин

Задача 5.(10)
В параллелограмме ABCD проведена биссектриса угла BAD. K и L - точки её пересечения с прямыми BC и CD соответственно. (Известно, что ABCD - не ромб).
Докажите, что центр окружности, проведённой через точки C, K и L, лежит на окружности, проведённой через точки B, C и D.
И. Шарыгин

Задача 6.(8)
Дана невозрастающая последовательность чисел $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a^{2k+1} \geq 0$.
Докажите неравенство:
$a_1^2-a_2^2+a_3^2-\ldots+a_{2k+1}^2 \geq (a_1-a_2+a_3-\ldots+a_{2k+1})^2$.
Л. Курляндчик

Задача 7.(3+2+2+3)
30 учеников одного класса решили побывать друг у друга в гостях. Известно, что ученик за вечер может сделать несколько посещений, и что в тот вечер, когда к нему кто-нибудь должен прийти, он сам никуда не уходит. Покажите, что для того, чтобы все побывали в гостях у всех,
а)(3) четырёх вечеров недостаточно,
б)(2) пяти вечеров также недостаточно,
в)(2) а десяти вечеров достаточно,
г)(3) и даже семи вечеров тоже достаточно.
Фольклор

Восьмой Турнир, 1986-1987

ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 23 ноября 1986 г.
7-8 кл.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Даны два двузначных числа - X и Y. Известно, что X вдвое больше Y, одна цифра числа Y равна сумме, а другая - разности цифр числа X. Найти эти числа (и доказать, что других нет).
Фольклор

Задача 2.(2+2)
Квадрат ABCD и окружность O пересекаются по восьми точкам, так что образуется четыре криволинейных треугольника: AEF, BGH, CIJ, DKL (EF, GH, IJ, KL - дуги окружности).
Докажите, что
а)(2) сумма длин дуг EF и IJ равна сумме длин дуг GH и KL;
б)(2) сумма периметров криволинейных треугольников AEF и CIJ равна сумме периметров криволинейных треугольников BGH и DKL.
В. Произволов

Задача 3.(4)
Двое играют в такую игру. Дана шоколадка с продольными и поперечными углублениями, по которым её можно ломать. Первый разламывает шоколадку по одной из линий, второй разламывает одну из частей, первый разламывает одну из трёх образовавшихся частей и т. д. Игра заканчивается в тот момент, когда в результате очередного хода возникнет долька, на которой уже нет углублений; сделавший этот ход выигрывает. На шоколадке 60 долек: имеется 5 продольных и 9 поперечных углублений. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнёр?
С. Фомин

Задача 4.(4)
Берутся всевозможные непустые подмножества из множества чисел 1, 2, 3, ..., N. Для каждого подмножества берётся величина, обратная к произведению всех его чисел.
Найти сумму всех таких обратных величин.
А. Анджанс

Задача 5.(7)
Найти геометрическое место ортоцентров (точек пересечения высот) всевозможных треугольников, вписанных в данную окружность.
Фольклор

Задача 6.(7)
В футбольном турнире в один круг участвовало 28 команд. По окончании турнира оказалось, что более 3/4 всех игр закончилось вничью. Докажите, что какие-то две команды набрали поровну очков.
М. Вопа, ученик гимназии, Венгрия

Задача 7.(9)
Каждая клетка шахматной доски закрашена в один из цветов - синий или красный.
Докажите, что клетки одного из цветов обладают тем свойством, что их может обойти шахматный ферзь (на клетках этого цвета ферзь может побывать не один раз, на клетки другого цвета он не ставится, но может через них перепрыгивать; ферзь ходит по вертикалям, горизонталям и диагоналям на любое расстояние).
А. Толпыго

ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 23 ноября 1986 г.
9-10 кл.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Дана трапеция ABCD, M - точка пересечения её диагоналей. Известно, что боковая сторона AB перпендикулярна основаниям AD и BC и что в эту трапецию можно вписать окружность.
Найдите площадь треугольника DCM, если радиус этой окружности равен r.
Фольклор

Задача 2.(3)
Существует ли такое N и такие N-1 бесконечных арифметических прогрессий с разностями 2, 3, 4, ..., N, что каждое натуральное число принадлежит хотя бы одной из этих прогрессий?
Фольклор

Задача 3.(3)
Существуют ли такие 100 треугольников, ни один из которых нельзя покрыть 99-ю остальными?
Фольклор

Задача 4.(5)
Через n!! обозначается произведение n(n-2)(n-4)... до единицы (или до двойки): например, 8!!=8*6*4*2; 9!!=9*7*5*3*1.
Докажите, что 1985!! + 1986!! делится нацело на 1987.
В. Произволов

Задача 5.(5)
В футбольном турнире в один круг участвовало 28 команд. По окончании турнира оказалось, что более 3/4 всех игр закончилось вничью.
Докажите, что какие-то две команды набрали поровну очков.
М. Вопа, ученик гимназии, Венгрия

Задача 6.(8)
Клетки шахматной доски 8*8 как-то занумерованы числами от 1 до 32, так что каждое число использовано дважды.
Докажите, что можно выбрать 32 клетки, занумерованные разными числами, так что на каждой вертикали и на каждой горизонтали найдётся хотя бы по одной выбранной клетке.
А. Анджанс

Задача 7.(8)
На окружности имеется 21 точка.
Докажите, что среди дуг, имеющих концами эти точки, найдётся не меньше ста таких, угловая мера которых не превышает 120^{o}.
А. Ф. Сидоренко

ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Подготовительный вариант весеннего тура 1987 г.
7-8 кл.

Задача 1.(2)
Докажите, что при любом a имеет место неравенство:
$3(1+a^2+a^4)\geq(1+a+a^2)^2$.
Фольклор

Задача 2.(2)
В остроугольном треугольнике соединены основания высот. Оказалось, что в полученном треугольнике две стороны параллельны сторонам исходного треугольника.
Докажите, что третья сторона тоже параллельна одной из сторон исходного треугольника.
Фольклор

Задача 3.(3)
Имеется два трёхлитровых сосуда. В одном 1 л воды, в другом - 1 л двухпроцентного раствора поваренной соли. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой, после чего перемешивать. Можно ли за несколько таких переливаний получить полуторапроцентный раствор в том сосуде, в котором вначале была вода?
С. Фомин

Задача 4.(3)
Кафельная плитка имеет форму прямоугольного треугольника с катетами 1 дм и 2 дм. Можно ли из 20 таких плиток сложить квадрат?
С. Фомин

ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Подготовительный вариант весеннего тура 1987 г.
9-10 кл.

Задача 1.(2)
Можно ли число 1986 представить в виде суммы 6 квадратов нечётных чисел?
Фольклор

Задача 2.(2)
В пространстве даны параллелограмм ABCD и плоскость M. Расстояния от точек A, B и C до плоскости M равны соответственно a, b и c. Найти расстояние d от вершины D до плоскости M.
Фольклор

Задача 3.(2)
Имеется два трёхлитровых сосуда. В одном 1 л воды, в другом - 1 л двухпроцентного раствора поваренной соли. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой, после чего перемешивать. Можно ли за несколько таких переливаний получить полуторапроцентный раствор в том сосуде, в котором вначале была вода?
С. Фомин

Задача 4.(3)
На шахматной доске выбрана клетка. Сумма квадратов расстояний от её центра до центров всех черных клеток обозначена через a, а до центров всех белых клеток - через b.
Докажите, что a=b.
А. Анджанс

ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 15 марта 1987 г.
7-8 кл.
(Итог подводится по всем решённым задачам)

Задача 1.(3)
Автомат при опускании гривенника выбрасывает пять двушек, а при опускании двушки - пять гривенников. Может ли Петя, подойдя к автомату с одной двушкой, получить после нескольких опусканий одинаковое количество двушек и гривенников?
Ф. Назаров, перефразировка с Ленинградской олимпиады 1987 г.

Задача 2.(2+2)
Рассматривается выпуклый восьмиугольник. С помощью диагонали от него можно отрезать четырёхугольник, причём это можно сделать восемью (восьмью) способами. Может ли случиться, что среди этих восьми четырехугольников имеется
а)(2) четыре,
б)(2) пять таких,
в которые можно вписать окружность?
П. Седракян

Задача 3.(2+3)
В левый нижний угол шахматной доски 8*8 поставлено в форме квадрата 3*3 девять фишек. Фишка может прыгать на свободное поле через рядом стоящую фишку, т. е. симметрично отражаться относительно её центра (прыгать можно по вертикали, горизонтали и диагонали).
Можно ли за некоторое количество таких ходов поставить все фишки вновь в форме квадрата 3*3, но в другом углу:
а)(2) левом верхнем,
б)(3) правом верхнем?
Я. Брискин

Задача 4.(5)
В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 60^{o} .
Докажите, что биссектриса одного из углов, образованных высотами, проведенными из вершин B и C, проходит через центр описанной окружности.
В. Погребняк, ученик 10 класса, г. Винница

Задача 5.(5)
Имеется много кубиков одинакового размера, раскрашенных в шесть цветов. При этом каждый кубик раскрашен во все шесть цветов, каждая грань - в какой-нибудь один свой цвет, но расположение цветов на разных кубиках может быть различным. Кубики выложены на стол, так что получился прямоугольник. Разрешается взять любой столбец этого прямоугольника, повернуть его вокруг длинной оси и положить на место. То же самое разрешается делать и со строками. Всегда ли можно с помощью таких операций добиться того, что все кубики будут смотреть вверх гранями одного и того же цвета?
Д. Фомин

ВОСЬМОЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 15 марта 1987 г.
9-10 кл.
(Итог подводится по всем решённым задачам)

Задача 1.(3)
p(x) - многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что для некоторых целых a и b выполняется равенство: p(a)-p(b)=1
Докажите, что a и b различаются на 1.
Фольклор

Задача 2.(3)
Круг радиуса 1 покрыт семью одинаковыми кругами.
Докажите, что их радиус не меньше 1/2.
Фольклор

Задача 3.(5)
В некотором городе разрешаются только парные обмены квартир (если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день они не имеют права участвовать в другом обмене).
Докажите, что любой сложный обмен квартирами можно осуществить за два дня.
Примечание: предполагается, что при любых обменах, парных и сложных, каждая семья как до, так и после обмена занимает одну квартиру, и что семьи при этом сохраняются.
А. Шнирельман, Н. Константинов

Задача 4.(5)
Докажите, что для любого n справедливо неравенство: $(2*(3*...*(N-1)^{1/2}*N^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2} < 3$
В. Произволов

Задача 5.(6)
Дан равносторонний треугольник ABC. Из его внутренней точки M опущены перпендикуляры на стороны; их основания - точки D, E и F.
Найти геометрическое место таких точек M, что треугольник DEF прямоугольный.
Фольклор

Задача 6.(6)
Двое играют на шахматной доске 8*8. Начинающий игру делает первый ход - ставит на доску коня. Затем они по очереди его передвигают, при этом нельзя ставить коня на поле, где он уже побывал. Проигравшим считается тот, кому некуда ходить. Кто выигрывает при правильной игре - начинающий или его партнёр?
(Коня передвигают по обычным правилам, т. е. "буквой Г").
В. Зудилин, ученик 10 класса г. Бельцы

Девятый Турнир, 1987-1988

ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур 22 ноября 1987 г.

7-8 кл.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Докажите, что предпоследняя цифра любой степени числа три чётна.
В. Плачко

Задача 2.(5)
Внутри ромба ABCD найти геометрическое место точек M таких, что
$\angle AMB+\angle CMD=180^o$.
Фольклор

Задача 3.(5)
Двое играющих по очереди увеличивают натуральное число так, чтобы при каждом увеличении разность между новым и старым значениями числа была бы больше нуля, но меньше старого значения. Начальное значение числа равно 2. Выигравшим считается тот, в результате хода которого получится 1987. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнёр?
Фольклор

Задача 4.(5)
Дана выпуклая фигура, ограниченная дугой AC окружности и ломаной ABC, так что дуга и ломаная лежат по разные стороны хорды AC.
Через середину дуги AC провести прямую, делящую площадь фигуры пополам.
Фольклор

Задача 5.(3+2+2)
Даны три неотрицательных числа a, b, c. Про них известно, что
$a^4+b^4+c^4\leq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$.
а)(3) Докажите, что каждое из них не больше суммы двух других.
б)(2) Докажите, что $a^2+b^2+c^2\leq 2(ab+bc+ca)$.
в)(2) Следует ли из неравенства пункта б) исходное неравенство?
В. Сендеров

Задача 6.(8)
2000 яблок лежат в нескольких корзинах. Разрешается убирать корзины и вынимать яблоки из корзин.
Доказать, что можно добиться того, чтобы во всех оставшихся корзинах было поровну яблок, а общее число яблок было не меньше 100.
А. Разборов

Задача 7.(*)
Три треугольника - белый, зеленый и красный - имеют общую внутреннюю точку M.
Докажите, что можно выбрать по одной вершине из каждого треугольника так, чтобы точка M находилась внутри или на границе треугольника, образуемого выбранными вершинами.
Imre Barani, Венгрия

ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур 22 ноября 1987 г.

9-10 кл.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Из вершины A квадрата ABCD со стороной 1 проведены два луча, пересекающие квадрат, так что вершина C лежит между лучами. Угол между лучами равен U. Из вершин B и D проведены перпендикуляры к лучам.
Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в основаниях этих перпендикуляров.
Фольклор

Задача 2.(5)
В центре квадратного бассейна находится мальчик, а в вершине на берегу стоит учительница. Максимальная скорость мальчика в воде в три раза меньше максимальной скорости учительницы на суше. Учительница плавать не умеет, а на берегу мальчик бегает быстрее учительницы.
Сможет ли мальчик убежать?
Фольклор

Задача 3.(5)
Доказать, что существует бесконечно много пар натуральных чисел a и b таких, что a^2+1 делится на b, а b^2+1 делится на a.
Фольклор

Задача 4.(5)
Из точки M внутри треугольника ABC опукаются перпендикуляры на высоты. Оказалось, что отрезки высот от вершин до оснований этих перпендикуляров равны между собой.
Докажите, что в этом случае они равны диаметру вписанной в треугольник окружности.
Фольклор

Задача 5.(5)
Рассматриваются всевозможные пары различных натуральных чисел (a,b), где a < b. Некоторые пары объявляются чёрными, остальные - белыми. Можно ли это сделать так, чтобы для любой тройки чисел a, a+d, a+2d (d > 0) среди пар (a,a+d), (a,a+2d), (a+d,a+2d) встречались и чёрные, и белые?
Фольклор

Задача 6.(8)
Правильный треугольник разбит прямыми, параллельными его сторонам, на равные между собой правильные треугольники. Один из маленьких треугольников чёрный, остальные - белые. Разрешается перекрашивать одновременно все треугольники, пересекаемые прямой, параллельной любой стороне исходного треугольника.
Всегда ли можно с помощью нескольких таких перекрашиваний добиться того, чтобы все маленькие треугольники стали белыми?
Фольклор

Задача 7.(8)
Город представляет собой бесконечную клетчатую плоскость (линии - улицы, клеточки - кварталы). На одной улице через каждые 100 кварталов на перекрестках стоит по милиционеру. Где-то в городе есть бандит (местонахождение его неизвестно, но перемещается он только по улицам). Цель милиции - увидеть бандита. Есть ли у милиции способ (алгоритм) наверняка достигнуть своей цели? (Максимальные скорости милиции и бандита какие-то конечные, но не известные нам величины, милиция видит вдоль улиц во все стороны на бесконечное расстояние).
А. Анджанс

Задача 1.
Коля и Вася за январь получили по 20 оценок, причём Коля получил пятерок столько же, сколько Вася четвёрок, четвёрок столько же, сколько Вася троек, троек столько же, сколько Вася двоек, и двоек столько же, сколько Вася - пятёрок. При этом средний балл за январь у них одинаковый. Сколько двоек за январь получил Коля?
С. Фомин

Задача 2.
Дан выпуклый четырёхугольник ABCD, диагональ AC которого делит среднюю линию MN (M середина BC, N - середина AD) пополам.
Докажите, что треугольники ABC и ACD равновелики.
Фольклор

Задача 3.
а) Вершины правильного 10-угольника закрашены чёрной и белой краской через одну. Двое играют в следующую игру. Каждый по очереди проводит отрезок, соединяющий вершины одинакового цвета. Эти отрезки не должны иметь общих точек (даже концов) с проведенными ранее. Побеждает тот, кто сделал последний ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий игру или его партнер?
б) Тот же вопрос для 12-угольника.
В. Иванов

Задача 4.
В клетки шахматной доски записаны числа от 1 до 64 (первая горизонталь нумеруется слева направо числами от 1 до 8, вторая от 9 до 16 и т. д.). Перед некоторыми числами поставлены плюсы, перед остальными - минусы, так что в каждой горизонтали и в каждой вертикали по 4 плюса и по 4 минуса. Докажите, что сумма всех чисел равна 0.
Фольклор

ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Тренировочный тур 21 февраля 1988 г.

9-10 кл.

Задача 1.
Можно ли подобрать такие два натуральных числа X и Y, что Y получается из X перестановкой цифр, и X+X=99...9 (всего 1111 девяток) ?
Фольклор

Задача 2. (Москва)
Можно ли подобрать четыре непрозрачных попарно непересекающихся шара таких, чтобы ими можно было загородить точечный источник света?
Задача из Ленинграда

Задача 2. (Кроме Москвы)
В окружность вписаны две равнобочные трапеции так, что каждая сторона одной трапеции параллельна некоторой стороне другой.
Докажите, что диагонали одной трапеции равны диагоналям другой.
Фольклор

Задача 3. (Москва)
Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Докажите, что найдётся прямая, параллельная стороне квадрата и пересекающая не меньше четырёх окружностей.
Д. Фомин

Задача 3. (Кроме Москвы)
Среди десятизначных чисел каких больше: тех, которые можно представить как произведение двух пятизначных чисел, или тех, которые нельзя так представить?
С. Фомин

Задача 4.
На бесконечной шахматной доске расставлены пешки через три поля на четвёртое, так что они образуют квадратную сетку.
Докажите, что шахматный конь не может обойти все свободные поля, побывав на каждом поле по одному разу.
Из старых задач А. Толпыго

ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур 20 марта 1988 г.

7-8 кл.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(5)
A, B и C - целые числа. Докажите, что если A=B+C, то $a^4+b^4+c^4$ есть удвоенный квадрат целого числа.
Фольклор

Задача 2.(5)
Дан треугольник ABC. Две прямые, симметричные прямой AC относительно прямых AB и BC соответственно, пересекаются в точке K.
Докажите, что прямая BK проходит через центр описанной около треугольника ABC окружности.
В. Протасов

Задача 3.(5)
Решите систему уравнений:
$(x_3 + x_4 + x_5)^5 = 3x_1$
$(x_4 + x_5 + x_1)^5 = 3x_2$
$(x_5 + x_1 + x_2)^5 = 3x_3$
$(x_1 + x_2 + x_3)^5 = 3x_4$
$(x_2 + x_3 + x_4)^5 = 3x_5$
Л. Тутеску

Задача 4.(5)
В наборе имеются гири массой 1 г, 2 г, 4 г, ... (все степени числа 2), причём среди гирь могут быть одинаковые. На две чашки весов положили гири так, чтобы наступило равновесие. Известно, что на левой чашке все гири различны.
Докажите, что на правой чашке не меньше гирь, чем на левой.
Фольклор

Задача 5.(5)
Можно ли покрыть плоскость окружностями так, чтобы через каждую точку проходило ровно 1988 окружностей? (Точку окружностью не считаем. - *Примечание редактора*)
Н. Васильев

Задача 6.(8)
Прямой угол разбит на бесконечное число квадратных клеток со стороной единица. Будем рассматривать ряды клеток, параллельные сторонам угла "вертикальные" и "горизонтальные" ряды).
Можно ли в каждую клетку записать натуральное число так, чтобы каждый вертикальный и каждый горизонтальный ряд клеток содержал все натуральные числа по одному разу?
В. С. Шевелев

Задача 7.(8)
Рассматривается последовательность слов из букв "A" и "B". Первое слово - "A", второе - "B". K-тое получается приписыванием к (K-2)-му слову справа (K-1)-ого (так что начало последовательности имеет вид: "A", "B", "AB", "BAB", "ABBAB", ...).
Может ли в последовательности встретиться "периодическое" слово, т. е. слово, состоящее из нескольких (по меньшей мере двух) одинаковых кусков, идущих друг за другом, и только из них?
(Например, слово "BABBBABB" - периодическое, а слово "ABABBBABB" - нет).
А. Анджанс

ДЕВЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур 20 марта 1988 г.

9-10 кл.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(5)
При каком отношении оснований трапеции существует прямая, на которой 6 точек пересечения с диагоналями, боковыми сторонами и продолжениями оснований трапеции высекают 5 равных отрезков?
Э. Г. Готман

Задача 2.(5)
Прямой угол разбит на бесконечное число квадратных клеток со стороной единица. Будем рассматривать ряды клеток, параллельные сторонам угла ("вертикальные" и "горизонтальные" ряды). Можно ли в каждую клетку записать натуральное число так, чтобы каждый вертикальный и каждый горизонтальный ряд клеток содержал все натуральные числа по одному разу?
В. С. Шевелев

Задача 3.(5)
P(x) - многочлен с целыми коэффициентами. Известно, что числа 1 и 2 являются его корнями. Докажите, что найдётся коэффициент, который меньше -1.
Фольклор

Задача 4.(5)
Имеется множество билетов с номерами от 1 до 30 (номера могут повторяться). Каждый из учеников вытянул один билет. Учитель может произвести следующую операцию: прочитать список из нескольких (возможно - одного) номеров и попросить их владельцев поднять руки. Сколько раз он должен проделать такую операцию, чтобы узнать номер каждого ученика? (Укажите число и докажите, что оно минимальное.)
Предостережение: учеников не обязательно 30.
Фольклор

Задача 5.(8)
Куб 20*20*20 составлен из 2000 кирпичей размером 2*2*1.
Докажите, что его можно проткнуть иглой так, чтобы игла прошла через две противоположные грани и не уткнулась в кирпич.
А. Анджанс

Задача 6.(4+4)
Рассматривается последовательность слов, состоящих из букв "A" и "B". Первое слово в последовательности - "A", K-е слово получается из (K-1)-го с помощью следующей операции: каждое "A" заменяется на "AAB", каждое "B" - на "A". Легко видеть, что каждое слово является началом следующего, тем самым получается бесконечная последовательность букв: AABAABAAABAABAAAB...
а)(4) На каком месте в этой последовательности встретится 1000-ая буква "A"?
б)(4) Докажите, что эта последовательность - непериодическая (периодическая - значит начиная с некоторого места повторяется одна и та же комбинация букв).
В. Гальперин

Десятый Турнир, 1988-1989

ДЕСЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1988 г.
7-8 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Известно, что доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех людей.
Что больше: доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди всех людей?
Фольклор

Задача 2.(3)
В треугольнике две высоты не меньше сторон, на которые они опущены.
Найдите углы треугольника.
Фольклор

Задача 3.(3)
Докажите, что из любых семи натуральных чисел (не обязательно идущих подряд) можно выбрать три числа, сумма которых делится на три.
Фольклор

Задача 4.(3)
Каждую грань кубика разбили на четыре равных квадрата и раскрасили эти квадраты в три цвета так, чтобы квадраты, имеющие общую сторону, были покрашены в разные цвета.
Докажите, что в каждый цвет покрашено по 8 квадратиков.
Фольклор

ДЕСЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 23 октября 1988 г.
7-8 кл.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
В каждой вершине куба стоит число +1 или -1. В центре каждой грани куба поставлено число, равное произведению чисел в вершинах этой грани. Может ли сумма получившихся 14 чисел оказаться равной 0?
Г. Гальперин

Задача 2.(3)
Внутри квадрата ABCD взята точка M такая, что
$\angle MAC=\angle MCD=u$.
Найти величину угла ABM.
Фольклор

Задача 3.(3)
Числа 1, 2, 3, ..., N записываются в некотором порядке:
$a_1, a_2, a_3, ..., a_N$. Берётся сумма
$S=a_1/1 + a_2/2 + a_3/3 + a_N/N$.
Найдите такое N, чтобы среди таких сумм (при всевозможных перестановках
$a_1, a_2, a_3, ..., a_N$) встретились все целые числа от N до N+100.
Фольклор

Задача 4.(3+3)
а)(3) Даны две одинаковые шестерёнки с 14 зубьями каждая. Их наложили друг на друга так, что зубья совпали (так что проекция на плоскость выглядит как одна шестерёнка). После этого четыре пары совпадающих зубьев выпилили.
Всегда ли можно повернуть эти шестерёнки друг относительно друга так, чтобы проекция на плоскость выглядела как одна целая шестерёнка? (Шестерёнки можно поворачивать, но нельзя переворачивать).
б)(3) Тот же вопрос про две шестерёнки с 13 зубьями, из которых выпилили по 4 зуба.
Фольклор

Задача 5.(2+2+3)
Выпуклый N-угольник разрезан непересекающимися диагоналями на треугольники. Разрешается проделывать следующее преобразование (перестройку): взяв пару треугольников ABD и BCD с общей стороной, заменить их на треугольники ABC и ACD. Пусть P(N) - наименьшее число перестроек, за которое можно перевести любое разбиение в любое.
Докажите, что
а)(2) $P(N) \geq N-3$;
б)(2) $P(N) \leq 2N-7$;
в)(3) $P(N) \leq 2N-10$ при $N \geq 13$.
Д. Фомин, по мотивам W. Thurson, D. Sleator, R. Tarjan

Задача 6.(8)
Существует ли такое натуральное число M, что никакое натуральное число, десятичная запись которого состоит лишь из нулей и не более, чем 1988 единиц, не делится на M?
Фольклор

ДЕСЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1988 г.
9-10 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Существует ли степень двойки, из которой перестановкой цифр можно получить другую степень двойки?
Фольклор

Задача 2.(3)
Пусть H - точка пересечения высот треугольника ABC.
Доказать, что треугольники ABH, ACH и BCH имеют одинаковый радиус описанной окружности.
Фольклор

Задача 3.(3)
Доказать, что в вершинах многогранника можно расставить натуральные числа так, что в каждых двух вершинах, соединённых ребром, стоят числа не взаимно-простые (имеющие общий делитель), а в каждых двух вершинах, не соединённых ребром, взаимно-простые.
Примечание: простых чисел бесконечно много.
Фольклор

Задача 4.(3)
Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам. Пара цветов называется хорошей, если существует две соседние клетки, закрашенные этими цветами.
Каково минимальное число хороших пар?
Фольклор

ДЕСЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 23 октября 1988 г.
9-10 кл.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Какое наименьшее количество клеток нужно отметить на шахматной доске, чтобы
1) среди отмеченных клеток не было соседних (имеющих общую сторону или общую вершину),
2) добавление к этим клеткам любой одной клетки нарушало пункт 1?
Укажите какую-нибудь систему таких клеток и докажите, что меньшим количеством обойтись нельзя.
А. Анджанс

Задача 2.(3)

Докажите, что $a^2pq+b^2qr+c^2rp\leq 0$, если a, b, c - стороны треугольника; а p, q, r - любые числа, удовлетворяющие условию $p+q+r=0$.
Я. Мустафаев, ученик 10 класса г. Баку

Задача 3.(4)
Числа 1, 2, 3, ..., N записываются в строчку в таком порядке, что если где-то (не на первом месте) записано число i, то где-то слева от него встретится хотя бы одно из чисел i+1 и i-1.
Сколькими способами это можно сделать?
А. Анджанс

Задача 4.(6)
В стране 1988 городов и 4000 дорог.
Докажите, что можно указать кольцевой маршрут, проходящий не более, чем через 20 городов (каждая дорога соединяет два города).
А. Разборов

Задача 5.(7)
Существует ли такое натуральное число M, что никакое натуральное число, десятичная запись которого состоит лишь из нулей и не более, чем 1988 единиц, не делится на M?

Задача 6.(7)
M - внутренняя точка прямоугольника ABCD, S - его площадь.
Докажите, что $S \leq AM*CM + BM*DM$.
И. Я. Гольдшейд

ДЕСЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1989 г.
7-8 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Положительные числа a, b, c таковы, что
$a \le b \le c$ и $a+b+c \le 1$.
Докажите, что $a^2+3b^2+5c^2 \le 1$.
Ф. Назаров

Задача 2.
В треугольнике ABC проведена медиана AM. Может ли радиус окружности, вписанной в треугольник ABM, быть ровно в 2 раза больше радиуса окружности, вписанной в треугольник ACM?
Д. Фомин

Задача 3.
Какую цифру надо поставить вместо знака "?" в числе
888...88?99...999 (восьмёрка и девятка написаны по 50 раз), чтобы оно делилось на 7?
М. Гусаров

Задача 4.(3)
Можно ли нарисовать на поверхности кубика Рубика такой замкнутый путь, который проходит через каждый квадратик ровно один раз (через вершины квадратиков путь не проходит)?
С. Фомин

ДЕСЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 19 марта 1989 г.
7-8 кл.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Лестница имеет 100 ступенек. Коля хочет спуститься по лестнице, при этом он двигается начиная сверху прыжками по очереди вниз и вверх. Прыжки бывают трёх типов - на шесть ступенек (через пять на шестую), на семь и на восемь. Два раза на одну ступеньку Коля не становится. Сможет ли он спуститься?
С.Фомин

Задача 2.(3)
На некотором поле шахматной доски стоит фишка. Двое по очереди переставляют фишку, при этом на каждом ходу, начиная со второго, расстояние, на которое она перемещается, должно быть строго больше, чем на предыдущем ходу. Проигравшим считается тот, кто не может сделать очередного хода.
Кто выигрывает при правильной игре?
(Фишка ставится всегда точно в центр каждого поля).
Ф. Назаров

Задача 3.(2+3)
Выпуклые четырёхугольники ABCD и PQRS вырезаны соответственно из бумаги и картона. Будем говорить, что они подходят друг к другу, если выполняются два условия:
1) картонный четырёхугольник можно наложить на бумажный так, что его вершины попадут на стороны бумажного, по одной вершине накаждую сторону;
2) если после этого перегнуть четыре образовавшихся маленьких бумажных треугольника на картонный, то они закроют весь картонный четырёхугольник в один слой.
а)(2) Докажите, что, если четырёхугольники подходят друг к другу, то у бумажного либо две противоположные стороны параллельны, либо диагонали перпендикулярны.
б)(3) Докажите, что если ABCD - параллелограмм, то можно сделать подходящий к нему картонный четырёхугольник.
Н. Васильев

Задача 4.(5)
Докажите, что если K чётно, то числа от 1 до K-1 можно выписать в таком порядке, что сумма никаких нескольких подряд стоящих чисел не будет делиться на K.
Фольклор

Задача 5.(7)
Из центра окружности выходят N векторов, концы которых делят её на N равных дуг. Некоторые векторы синие, остальные - красные. Подсчитаем сумму углов "красный вектор - синий вектор" (каждый угол вычисляется от красного вектора к синему против часовой стрелки) и разделим её на общее число всех таких углов.
Докажите, что полученная величина "среднего угла" равна 180°.
В. Произволов

Задача 6.(4+4)
а)(4) Докажите, что если в 3n клетках таблицы 2n*2n расставлены 3n звёздочек, то можно вычеркнуть n столбцов и n строк так, что все звёздочки будут вычеркнуты.
б)(4) Докажите, что в таблице 2n*2n можно расставить 3n+1 звёздочку так, что при вычеркивании любых n строк и любых n столбцов остаётся невычеркнутой хотя бы одна звёздочка.
К. Кохась

ДЕСЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1989 г.
9-10 кл., тренировочный вариант
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Положительные числа a, b, c, d таковы,
что $a \le b \le c \le d$ и $a+b+c+d \le 1$.
Докажите, что $a^2+3b^2+5c^2+7d^2 \le 1$.
Ф. Назаров

Задача 2.(3)
Известно, что в трапецию ABCD можно вписать окружность.
Докажите, что круги, построенные на её боковых сторонах как на диаметрах, касаются друг друга.
Фольклор

Задача 3.(3)
Найти шесть различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится на сумму этих двух чисел.
Д. Фомин

Задача 4.(3)
Можно ли провести в каждом квадратике на поверхности кубика Рубика диагональ так, чтобы получился несамопересекающийся путь?
С. Фомин

ДЕСЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 19 марта 1989 г.
9-10 кл.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Найти два шестизначных числа такие, что если их приписать друг к другу, то полученное двенадцатизначное число делится на произведение двух исходных чисел. Найти все такие пары чисел.
М. Гусаров

Задача 2.(4)
Внутри треугольника ABC взята точка M такая, что
$\angle BMC=90^o+\angle BAC/2$, и прямая AM содержит центр окружности, описанной около треугольника BMC.
Докажите, что M - центр вписанной окружности треугольника ABC.
Фольклор

Задача 3.(5)
Даны 1000 линейных функций:
$f_k(x)=p_kx+q_k$ (k=1, 2, ..., 1000). Нужно найти значение их композиции
$f(x)=f_1(f_2(f_3(... f_{1000}(x)...)))$ в точке x_0.
Докажите, что это можно сделать не более, чем за 30 стадий, если на каждой стадии можно параллельно выполнять любое число арифметических операций над парами чисел, полученных на предыдущих стадиях, а на первой стадии используются числа $p_1, p_2, ..., p_{1000}, q_1, q_2, ..., q_{1000}, x_0$.
С. Фомин

Задача 4.(6)
В кооперативе из 11 человек имеется партячейка. На каждом собрании ячейки происходит либо приём одного члена в партию, либо исключение из партии одного человека. В партячейке не может быть меньше трёх человек. Возвращаться к какому-либо из прежних составов партячейки запрещено уставом. Может ли к какому-то моменту оказаться, что все варианты состава ячейки реализованы?
С. Фомин

Задача 5.(7)
На плоскости дано N прямых (N > 1), никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны.
Докажите, что в частях, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно расставить ненулевые целые числа, по модулю не превосходящие N так, что суммы чисел по любую сторону от любой из данных прямых равны нулю.
Д. Фомин

Задача 6.(7)
Дан 101 прямоугольник с целыми сторонами, не превышающими 100.
Докажите, что среди них найдутся три прямоугольника A, B, C, которые можно поместить друг в друга (так что $A \subset B \subset C$).
Н. Седракян

ДЕСЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 19 марта 1989 г.
Первый вариант (для москвичей)
7-8 кл.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.
Лестница имеет 100 ступенек. Коля хочет спуститься по лестнице, при этом он двигается начиная сверху прыжками вниз и вверх по очереди. Прыжки бывают трех типов - на шесть ступенек (через пять на шестую), на семь и на восемь. Два раза на одну ступеньку Коля не становится. Сможет ли он спуститься?
С. Фомин

Задача 2.
Из бумаги вырезан выпуклый четырёхугольник ABCD, а из картона - выпуклый четырёхугольник PQRS. Дано, что выполняются два свойства:
1) можно наложить картонный четырехугольник на бумажный так, что его вершины попадут на стороны бумажного, по одной вершине на каждую сторону;
2) если после этого перегнуть четыре образовавшихся маленьких бумажных треугольника на картонный, то они закроют весь картонный четырехугольник в один слой.
Докажите, что у бумажного четырехугольника либо две противоположные стороны параллельны, либо его диагонали взаимно перпендикулярны.
Н. Васильев

Задача 3.
Какую цифру вместо знака "?" надо поставить в числе 888...88?999...99 (восьмёрка и девятка написаны по 50 раз), чтобы получившееся число делилось на 7?
М. Гусаров

Задача 4.
Можно ли нарисовать на поверхности кубика Рубика такой замкнутый путь, который проходит через каждый квадратик ровно один раз (через вершины квадратиков путь не проходит)?
С. Фомин

Одиннадцатый Турнир, 1989-1990

ОДИННАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осень 1989 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Полное решение каждой задачи оценивается в три балла. Оценка работы равна сумме трёх лучших оценок. Оценка выступления на осеннем туре равна максимуму из оценок за тренировочный и основной варианты. Баллы восьмиклассников умножаются на 4/3, баллы десятиклассников - на 5/4)

Задача 1.
Три бегуна - X, Y и Z - участвуют в забеге. Z задержался на старте и выбежал последним, а Y выбежал вторым. Z во время забега менялся местами с другими участниками 6 раз, а X - 5 раз. Известно, что Y финишировал раньше X. В каком порядке они финишировали?
Фольклор

Задача 2.
Длины сторон остроугольного треугольника - последовательные целые числа.
Докажите, что высота, опущенная на среднюю по величине сторону, делит её на отрезки, разность которых равна 4.
Фольклор

Задача 3.
Дано 1989 чисел. Известно, что сумма любых 10 из них положительна.
Докажите, что сумма всех чисел тоже положительна.
Фольклор

Задача 4.
Решить в натуральных числах уравнение:
$x + 1/(y + 1/z) = 10/7$
Г. Гальперин

ОДИННАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 29 октября 1989 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Найти число решений в натуральных числах уравнения:
[x/10]=[x/11]+1 (через [A] обозначается целая часть числа A; например [2,031]=2, [2]=2 и т. д.).
Фольклор

Задача 2.(3)
Шестиугольник ABCDEF вписан в окружность; AB=BC=a, CD=DE=b, EF=FA=c.
Докажите, что площадь треугольника BDF равна половине площади шестиугольника.
И. П. Нагель, Евпатоия

Задача 3.(3)
Плоскость разбита тремя сериями параллельных прямых на равные между собой равносторонние треугольники. Существуют ли 4 вершины этих треугольников, образующие квадрат?
Фольклор

Задача 4.(2+4)
Дано натуральное число N. Рассматриваются такие тройки различных натуральных чисел (a,b,c), что a+b+c=N. Возьмём наибольшую возможную такую систему троек, что никакие две тройки системы не имеют общих элементов. Число троек в этой системе обозначим через K(N). Докажите, что
а)(2) K(N) > N/6-1;
б)(4) K(N) < 2N/9.
Л. Курляндчик

Задача 5.(2+4)
Имеется прямоугольная доска M*N, разделенная на клетки 1*1. Кроме того, имеется много косточек домино размером 1*2. Косточки уложены на доску, так что каждая косточка занимает две клетки. Доска заполнена не целиком, но так, что сдвинуть косточки невозможно (доска имеет бортики, так что косточки не могут выходить за пределы доски).
Докажите, что число непокрытых клеток
а)(2) меньше (1/4)MN;
б)(4) меньше (1/5)MN.
Фольклор

Задача 6.(7)
Правильный шестиугольник разрезан на N равновеликих параллелограммов.
Доказать, что N делится на 3.
В. Прасолов, И. Шарыгин

ОДИННАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осень 1989 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Полное решение каждой задачи оценивается в три балла. Оценка работы равна сумме трёх лучших оценок. Оценка выступления на осеннем туре равна максимуму из оценок за тренировочный и основной варианты. Баллы восьмиклассников умножаются на 4/3, баллы десятиклассников - на 5/4)

Задача 1.
10 друзей послали друг другу праздничные открытки, так что каждый послал 5 открыток. Докажите, что найдутся двое, которые послали открытки друг другу.
Фольклор

Задача 2.
На плоскости заданы точки K, L и M, являющиеся серединами трёх последовательных сторон четырёхугольника, которые равны между собой. Восстановить четырёхугольник.
Фольклор

Задача 3.
Существует ли 1000000 различных натуральных чисел, таких что никакая сумма нескольких из этих чисел не является полным квадратом?
Фольклор

Задача 4.
Числа 2^{1989} и 5^{1989} выписали одно за другим (в десятичной записи). Сколько всего цифр выписано?
Г. Гальперин

ОДИННАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 29 октября 1989 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Можно ли так выбрать шар, треугольную пирамиду и плоскость, чтобы всякая плоскость, параллельная выбранной, пересекала шар и пирамиду по фигурам равной площади?
Фольклор

Задача 2.(3)
Рассмотрим все возможные наборы чисел из множества {1,2,3,...,N}, не содержащие двух соседних чисел.
Докажите, что сумма квадратов произведений чисел в этих наборах равна (N+1)!-1.
по мотивам R. P. Stanley

Задача 3.(5)
Внутри круга радиуса R взята точка A. Через неё проведены две перпендикулярные прямые. Потом прямые повернули на угол U относительно точки A. Хорды, высекаемые окружностью из этих прямых, замели при повороте фигуру, имеющую форму креста с центром в точке A.
Найдите площадь креста.
Фольклор

Задача 4.(2+3)
Натуральный ряд представлен в виде объединения некоторого множества попарно непересекающихся целочисленных бесконечных арифметических прогрессий с положительными разностями d_1, d_2, d_3, ... Может ли случиться, что при этом сумма
$1/d_1 + 1/d_2 + 1/d_3 + ...$ не превышает 0,9 ? Рассмотрите случаи:
а)(2) общее число прогрессий конечно;
б)(3) прогрессий бесконечное число (в этом случае условие нужно понимать в том смысле, что сумма любого конечного числа слагаемых из бесконечной суммы не превышает 0,9).
А. Толпыго

Задача 5.(6)
Отмечено 100 точек - N вершин выпуклого N-угольника и 100-N точек внутри этого N-угольника. Точки как-то обозначены, независимо от того, какие являются вершинами N-угольника, а какие лежат внутри. Известно, что никакие три точки не лежат на одной прямой, а никакие четыре - на двух параллельных прямых. Разрешается задавать вопросы типа: чему равна площадь треугольника XYZ (X, Y, Z - из числа отмеченных точек).
Докажите, что 300 вопросов достаточно, чтобы выяснить, какие точки являются вершинами и чтобы найти площадь N-угольника.
Д. Фомин

Задача 6.(8)
В прямоугольной таблице m строк и n столбцов (m<n). В некоторых клетках таблицы стоят звёздочки, так что в каждом столбце стоит хотя бз одна звёздочка. Докажите, что существует хотя бы одна такая звёздочка, что в одной строке с нею находится больше звёздочек, чем с нею в одном столбце.
А. Разборов

ОДИННАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1990 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
Докажите, что при любом натуральном n

$$(1/n)^2 + (1/n + 1/(n-1))^2 + (1/n + 1/(n-1)+...+1)^2 = 2n-(1 +1/2+...+1/n)$$

С. Манукян, Ереван

Задача 2.(4)
Даны две окружности, лежащие вне друг друга. A_1 и A_2 - наиболее удалённые друг от друга точки пересечения этих окружностей с их линией центров, так что A_1 лежит на первой окружности, A_2 - на второй. Из точки A_1 проведены два луча, касающиеся второй окружности, и построен круг K_1, касающийся этих лучей и первой окружности изнутри. Из точки A_2 проведены два луча, касающиеся первой окружности, и построен круг K_2, касающийся этих лучей и второй окружности изнутри. Докажите, что круги K_1 и K_2 равны.
Й. Табов, София

Задача 3.(5)
Дано 27 кубиков одинакового размера: 9 красных, 9 синих и 9 белых. Можно ли сложить из них куб таким образом, чтобы каждый столбик из трёх кубиков содержал кубики ровно двух цветов? (Рассматриваются столбики, параллельные всем ребрам куба, всего 27 столбиков.)
С. Фомин

Задача 4.(8)
Дана 61 монета одинакового внешнего вида. Известно, что две из них - фальшивые, что все настоящие одинакового веса, что фальшивые - тоже одинакового веса, отличающегося от веса настоящих монет. Но не известно, в какую сторону отличаются веса фальшивых монет от настоящих. Как можно это узнать с помощью трёх взвешиваний на двухчашечных весах без гирь? (Определить фальшивые монеты не требуется).
Д. Фомин

ОДИННАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 18 марта 1990 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(6)
На какое максимальное число частей могут разбить координатную плоскость x0y графики 100 квадратных трехчлёнов вида $y=a_nx^2+b_nx+c_n$ (n = 1, 2, ..., 100)?
Н. Васильев

Задача 2.(6)
Если повернуть квадрат вокруг его центра на 45^o , то стороны повернутого квадрата разобьют каждую сторону первоначального квадрата на три отрезка, длины которых относятся как a:b:a (эти отношения легко вычислить). Для произвольного выпуклого четырёхугольника сделаем аналогичное построение: разобьем каждую его сторону в тех же отношениях a:b:a и проведем прямую через каждые две точки деления, соседние с вершиной (лежащие на сходящихся к ней сторонах). Докажите, что площадь четырёхугольника, ограниченного четырьмя построенными прямыми, равна площади исходного четырёхугольника.
А. Савин

Задача 3.(8)
В ряд стоят 15 слонов, каждый из которых весит целое число килограммов. Если взять любого слона, кроме стоящего справа, и прибавить к его весу удвоенный вес его правого соседа, то получится 15 тонн (для каждого из 14 слонов). Найдите вес каждого из 15 слонов.
Ф. Назаров

Задача 4.(8)
ABCD - ромб. На стороне BC взята точка P, через A, B и P проведена окружность, которая пересекается с прямой BD ещё раз в точке Q. Через точки C, P и Q проведена окружность, которая пересекается с BD ещё раз в точке R. Докажите, что точки A, R и P лежат на одной прямой.
Д. Фомин

Задача 5.(10)
Сколько существует пар натуральных чисел (m,n), каждое из которых не превышает 1000, таких что
$m/(n+1) < 2^{1/2} < (m+1)/n$
Д. Фомин

Задача 6.(4+8)
Рассматривается набор гирь, каждая из которых весит целое число граммов, а общий вес всех гирь равен 200 граммов. Такой набор называется правильным, если любое тело, имеющее вес, выраженный целым числом граммов от 1 до 200, может быть уравновешено некоторым количеством гирь набора, и притом единственным образом (тело кладется на одну чашку весов, гири - на другую; два способа уравновешивания, различающиеся лишь заменой некоторых гирь на другие того же веса, считаются одинаковыми).
а)(4) Приведите пример правильного набора, в котором не все гири по одному грамму.
б)(8) Сколько существует различных правильных наборов? (Два набора различны, если некоторая гиря участвует в этих наборах не одинаковое число раз.)
Д. Фомин

ОДИННАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1990 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(6)
Построить треугольник по двум сторонам, если известно, что медиана, проведенная к третьей стороне, делит угол треугольника в отношении 1:2.
В. Чикин

Задача 2.(3+4)
Докажите, что
а)(3) если натуральное число n можно представить в виде $n=4k+1$, то существуют n нечётных натуральных чисел, сумма которых равна их произведению;
б)(4) если n нельзя представить в таком виде, то таких n нечётных натуральных чисел не существует.
М. Концевич

Задача 3.(2+5)
Какое минимальное количество точек на поверхности
а)(2) додекаэдра,
б)(5) икосаэдра
надо отметить, чтобы на каждой грани была хотя бы одна отмеченная точка?
<u>Напоминание:</u> додекаэдр - многогранник из 12 пятиугольных граней, пересекающихся по три в каждой вершине; икосаэдр состоит из 20 треугольников, пересекающихся по пять в каждой вершине.
Г. Гальперин

Задача 4.(7)
Даны 103 монеты одинакового внешнего вида. Известно, что две из них - фальшивые, что все настоящие одинакового веса, что фальшивые - тоже одинакового веса, отличающегося от веса настоящих монет. Но не известно, в какую сторону отличаются веса фальшивых монет от настоящих. Как можно это узнать с помощью трёх взвешиваний на двухчашечных весах без гирь? (Отделить фальшивые монеты не требуется).
Д. Фомин

ОДИННАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 18 марта 1990 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(6)
Докажите, что при любом натуральном n найдётся ненулевой многочлен P(x) с коэффициентами, равными 0, -1, 1 степени не больше 2^n, который делится на $(x-1)^n$ без остатка.
Д. Фомин

Задача 2.(4+6)
Рассматривается набор гирь, каждая из которых весит целое число граммов, а общий вес всех гирь равен 500 граммов. Такой набор называется правильным, если любое тело, имеющее вес, выраженный целым числом граммов от 1 до 500, может быть уравновешено некоторым количеством гирь набора, и притом единственным образом (тело кладется на одну чашку весов, гири - на другую; два способа уравновешивания, различающиеся лишь заменой некоторых гирь на другие того же веса, считаются одинаковыми).
а)(4) Приведите пример правильного набора, в котором не все гири по одному грамму.
б)(6) Сколько существует различных правильных наборов? (Два набора различны, если некоторая гиря участвует в этих наборах не одинаковое число раз.)
Д. Фомин

Задача 3.(10)
Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо p человек, либо q (p и q взаимно просты). На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну?
Д. Фомин

Задача 4.(10)
В трапеции ABCD: AB - основание, AC=BC, H - середина AB. Пусть l - прямая, проходящая через H и пересекающая прямые AD и BD в точках P и Q соответственно.
Докажите, что либо углы ACP и QCB равны, либо их сумма равна 180^o.
И. Шарыгин

Задача 5.(4+6)
Существует ли выпуклый многогранник, одно из сечений которого - треугольник (сечение не проходит через вершины), и в каждой вершине сходятся
а)(4) не меньше пяти ребер,
б)(6) ровно пять ребер?
Г. Гальперин

Задача 6.(12)
На квадратный лист бумаги со стороной a посадили несколько клякс, площадь каждой из которых не больше 1. Оказалось, что каждая прямая, параллельная сторонам листа, пересекает не более одной кляксы.
Докажите, что суммарная площадь клякс не больше a.
А. Разборов

Двенадцатый Турнир, 1990-1991

ДВЕНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1990 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то сумма больше четырёх.
Н. Васильев

Задача 2.(4)
Вершины правильного треугольника находятся на сторонах AB, CD и EF правильного шестиугольника ABCDEF.
Докажите, что они имеют общий центр.
Н. Седракян

Задача 3.(4)
Найдите 10 натуральных чисел обладающих тем свойством, что их сумма делится на каждое из них.
С. Фомин

Задача 4.(5)
Доска 100 на 100 разбита на 10000 единичных квадратиков. Один из них вырезали, так что образовалась дырка. Можно ли оставшуюся часть доски покрыть равнобедренными прямоугольными треугольниками с гипотенузой длины 2 так, чтобы их гипотенузы шли по сторонам квадратиков, а катеты - по диагоналям и чтобы треугольники не налегали друг на друга и не свисали с доски?
С. Фомин

ДВЕНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 28 октября 1990 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
Дано:

$$a = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{\ddots}{99}}}} \qquad b = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{\ddots}{99 + \cfrac{1}{100}}}}}$$

Докажите, что $|a-b| < 1/(99!*100!)$.
Г. Гальперин(4)

Задача 2.(4)
Дана полуокружность Г с концами А и В. Для произвольной точки $C \in \Gamma$ (С не равно А, С не равно В) на сторонах АС и ВС треугольника АВС во внешнюю сторону треугольника построены квадраты. Найдите геометрическое место середины отрезка, соединяющего их центры, когда С описывает Г.
Й. Табов, София

Задача 3.(5)
Квадрат 8*8 клеток выкрашен в белый цвет. Разрешается выбрать в нём любой прямоугольник из трёх клеток и перекрасить все их в противоположный цвет (белые в чёрный, чёрные - в белый). Удастся ли несколькими такими операциями перекрасить весь квадрат в чёрный цвет?
И. Рубанов

Задача 4.(5)
Стороны AB, BC, CD и DA четырёхугольника ABCD равны соответственно сторонам A'B', B'C', C'D' и D'A' четырёхугольника A'B'C'D', причём известно, что сторона AB параллельна CD, а сторона B'C' параллельна D'A'.
Докажите, что оба четырёхугольника - параллелограммы.
В. Произволов

Задача 5.(6)
Числовая последовательность $\{x_n\}$ такова, что для любого $n > 1$ выполняется условие: $x_{n+1}=|x_n|-x_{n-1}$. Докажите, что последовательность периодическая с периодом 9, то есть для любого $n \geq 1$ выполняется условие: $x_n=x_{n+9}$.
М. Концевич

Задача 6.(3+3+4+4)
В колоду сложено n различных карт. Разрешается переложить любое число рядом лежащих карт (не меняя порядок их следования и не переворачивая) в другое место колоды. Требуется несколькими такими операциями переложить все n карт в обратном порядке.
а)(3) Докажите, что при n=9 это можно сделать за 5 операций;
Докажите, что при n=52
б)(3) это можно сделать за 27 операций;
в)(4) нельзя за 17 операций;
г)(4) нельзя за 26 операций.
С. М. Воронин, Челябинск

ДВЕНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1990 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
В клетках доски n*n произвольно расставлены числа от 1 до n^2.
Докажите, что найдутся две такие соседние клетки (имеющие общую вершину или общую сторону), что стоящие в них числа отличаются не меньше чем на n+1.
Н. Седракян, Ереван

Задача 2.(4)
Тремя бесконечными сериями равноотстоящих параллельных прямых плоскость разбита на равносторонние треугольники со стороной 1. M - множество всех их вершин. A и B - две вершины одного треугольника. Разрешается поворачивать плоскость на 120^o вокруг любой из вершин множества M. Можно ли за несколько таких преобразований перевести точку A в точку B?
Н. Васильев

Задача 3.(4)
На стене висят двое правильно идущих совершенно одинаковых часов. Одни показывают московское время, другие - местное. Минимальное расстояние между концами их часовых стрелок равно m, а максимальное - M. Найдите расстояние между центрами этих часов.
С. Фомин

Задача 4.(5)
В нашем распоряжении имеются "кирпичи", имеющие форму, которая получается следующим образом: приклеиваем к одному единичному кубу по трём его граням, имеющим общую вершину, ещё три единичных куба, так что склеиваемые грани полностью совпадают.
Можно ли сложить прямоугольный параллелепипед 11*12*13 из таких "кирпичей"?
С. Фомин

ДВЕНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1990 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Дано:

$$a = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{}{99}}}} \qquad b = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{}{99 + \cfrac{1}{100}}}}}$$

Докажите, что $|a-b| < 1/(99!*100!)$.
Г. Гальперин(4)

Задача 2.(4)
На дуге AC окрнужности, описанной около правильного треугольника ABC, взята точка M; P - середина этой дуги. Пусть N - середина хорды BM, K - основание перпендикуляра, опущенного из точки P на MC.
Докажите, что треугольник ANK - правильный.
И. Нагель, Евпатория

Задача 3.(4)
Рассматривается конечное множество M единичных квадратов на плоскости. Их стороны параллельны осям координат (разрешается, чтобы квадраты пересекались). Известно, что для любой пары квадратов расстояние между их центрами не больше 2.
Докажите, что существует единичный квадрат (не обязательно из множества M) со сторонами, параллельными осям, пересекающийся хотя бы по точке с каждым квадратом множества M.
А. Анджанс

Задача 4.(5)
На плоскости расположено 20 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, из них 10 синих и 10 красных.
Докажите, что можно провести прямую, по каждую сторону которой лежит 5 синих и 5 красных точек.
А. Кушниренко

Задача 5.(7)
В треугольнике ABC AC=CB, D - точка AB такая, что радиус окружности, вписанной в треугольник ACD, и радиус окружности, касающейся отрезка DB и продолжений прямых CD и CB и лежащей вне треугольника DCB, равны.
Докажите, что этот радиус равен одной четверти высоты треугольника ABC, проведённой к боковой стороне.
И. Шарыгин

Задача 6.(2+2+4+4)
В колоду сложено n различных карт. Разрешается переложить любое число рядом лежащих карт (не меняя порядок их следования и не переворачивая) в другое место колоды. Требуется несколькими такими операциями переложить все n карт в обратном порядке.
а)(2) Докажите, что при n=9 это можно сделать за 5 операций;
Докажите, что при n=52
б)(2) это можно сделать за 27 операций;
в)(4) нельзя за 17 операций;
г)(4) нельзя за 26 операций.
С. М. Воронин, Челябинск

ДВЕНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1991 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Имеется N целых чисел ($N > 1$). Известно, что каждое из них отличается от произведения всех остальных на число, кратное N.
Докажите, что сумма квадратов этих чисел делится на N.
Д. Фомин

Задача 2.(3)
Каждая из трёх окружностей радиусов соответственно 1, r и r извне касается двух других. При каких значениях r существует треугольник, описанный около этих окружностей? (Все окружности лежат внутри треугольника, каждая касается двух сторон треугольника и каждая сторона треугольника касается двух окружностей.)
Н. Васильев

Задача 3.(3)
В ряд стоят 30 сапог: 15 левых и 15 правых.
Докажите, что среди некоторых десяти подряд стоящих сапог левых и правых поровну.
Д. Фомин

Задача 4.(3)
На экране компьютера горит число, которое каждую минуту увеличивается на 102. Начальное значение числа 123. Программист Федя имеет возможность в любой момент изменять порядок цифр числа, находящегося на экране. Может ли он добиться того, чтобы число никогда не стало четырёхзначным?
Ленинградский фольклор

ДВЕНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 17 марта 1991 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Докажите, что произведение 99 дробей $(k^3-1)/(k^3+1)$, где $k = 2, 3, ..., 100$, больше 2/3.
Д. Фомин

Задача 2.(4)
В описанном пятиугольнике ABCDE диагонали AD и CE пересекаются в центре O вписанной окружности.
Докажите, что отрезок BO и сторона DE перпендикулярны.
Фольклор

Задача 3.(2+3)
Ищутся такие натуральные числа, оканчивающиеся (в десятичной записи - *добавлено редактором*) на 5, что в их десятичной записи цифры монотонно не убывают (то-есть каждая цифра, начиная со второй, не меньше предыдущей цифры), и в десятичной записи их квадрата цифры тоже монотонно не убывают.
а)(2) Найдите 4 таких числа.
б)(3) Докажите, что таких чисел бесконечно много.
А. Анджанс

Задача 4.(4)
Круг поделили хордой AB на два сегмента и один из них повернули вокруг точки A на некоторый угол. При этом точка B перешла в точку B'.
Докажите, что отрезки, соединяющие середины дуг сегментов с серединой отрезка BB', перпендикулярны друг другу.
З. Насыров, ученик 11 класса, г. Обнинск

Задача 5.(6)
В королевстве 8 городов. Король хочет построить такую систему дорог, чтобы из каждого города можно было попасть в каждый, минуя не более одного промежуточного города, и чтобы из каждого города выходило не более K дорог. При каких k это возможно?
С. Фомин

Задача 6.(8)
В соревновании участвуют 16 боксеров. Каждый боксер в течение одного дня может проводить только один бой. Известно, что все боксеры имеют разную силу, и что сильнейший всегда выигрывает.
Докажите, что за 10 дней можно определить место каждого боксера. (Расписание каждого дня соревнований составляется вечером накануне и в день соревнований не изменяется).
А. Анджанс, Рига

ДВЕНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1991 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
Укажите все такие натуральные n, и целые неравные друг другу x и y, при которых верно равенство: $x+x^2+x^4+...+x^{2n}= y+y^2+y^4+...+y^{2n}$.
Фольклор

Задача 2.(4)
На окружности даны точки K и L. Построить треугольник ABC такой, что KL является его средней линией, параллельной AB, и при этом точка C и точка пересечения медиан треугольника ABC лежат на данной окружности.
Фольклор

Задача 3.(4)
На доске выписаны числа 1, 1/2, 1/3, ..., 1/100. Выбираем из написанных на доске два произвольных числа a и b, стираем их и пишем на доску число a+b+ab. Такую операцию проделываем 99 раз, пока не останется одно число. Какое это число?
Найдите его и докажите, что оно не зависит от последовательности выбора чисел.
Д. Фомин

Задача 4.(2+2)
а)(2) Можно ли расположить пять деревянных кубов в пространстве так, чтобы каждый имел общую часть грани с каждым? (Общая часть должна быть многоугольником.)
б)(2) Тот же вопрос про шесть кубов.
Фольклор

ДВЕНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1991 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
Ищутся такие оканчивающиеся на 5 числа (натуральные в десятичной записи - *добавление редактора*), что их цифры монотонно не убывают (то-есть каждая цифра, начиная со второй, не меньше предыдущей цифры), и в десятичной записи их квадрата цифры тоже монотонно не убывают.
Докажите, что таких чисел бесконечно много.
А. Анджанс

Задача 2.(5)
В окружности фиксирована хорда MN. Для каждого диаметра AB этой окружности рассмотрим точку C, в которой пересекаются прямые AM и BN, и проведем через неё прямую l, перпендикулярную AB.
Докажите, что все прямые l проходят через одну точку.
Е. Куланин

Задача 3.
Сумма n чисел равна нулю, а сумма их квадратов равна единице. Докажите, что среди этих чисел найдутся два числа, произведение которых не больше -1/n.
Фольклор

Оригинальный (без литературной правки) вариант условия::
n чисел x_1, x_2, x_3, ..., x_n удовлетворяют двум условиям: $\Sigma x_n=1$; $\Sigma x_n^2=0$.
Докажите, что из них найдутся два числа, произведение которых не больше -1/n.

Задача 4.(3+3)
На сфере отмечено 5 точек, никакие три из которых не лежат на большой окружности (большая окружность - это окружность, по которой пересекаются сфера и плоскость, проходящая через её центр). Две большие окружности, не проходящие через отмеченные точки, называются эквивалентными, если одну из них с помощью непрерывнвого перемещения по сфере можно перевести в другую так, что в процессе перемещения окружность не проходит через отмеченные точки.
а)(3) Сколько можно нарисовать окружностей, не проходящих через отмеченные точки, и не эквивалентных друг другу?
б)(3) Та же задача для n отмеченных точек.
А. Канель-Белов

Задача 5.(4+4)
В королевстве 16 городов. Король хочет построить такую систему дорог, чтобы из каждого города можно было попасть в каждый, минуя не более одного промежуточного города, и чтобы из каждого города выходило не более 5 дорог.
а)(4) Докажите, что это возможно.
б)(4) Докажите, что если в формулировке заменить число 5 на число 4, то желание короля станет неосуществимым.
С. Фомин

Задача 6.(8)
В соревновании участвуют 32 боксера. Каждый боксер в течение одного дня может проводить только один бой. Известно, что все боксеры имеют разную силу, и что сильнейший всегда выигрывает.
Докажите, что за 15 дней можно определить место каждого боксера. (Расписание каждого дня соревнований составляется вечером накануне и в день соревнований не изменяется).
А. Анджанс

Тринадцатый Турнир, 1991-1992

ТРИНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур 1991 г.

8-9 кл., тренировочный вариант.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Через центр окружности 1 проведена окружность 2; A и B - точки пересечения окружностей. Касательная к окружности 2 в точке B пересекает окружность 1 в точке C.
Докажите, что AB=BC.
В. Прасолов

Задача 2.(3)
(Летучая ладья). На шахматной доске 4*4 расположена фигура - "летучая ладья", которая ходит так же, как обычная ладья, но не может за один ход стать на поле, соседнее с предыдущим. Может ли она за 16 ходов обойти всю доску, становясь на каждое поле по разу, и вернуться на исходное поле?
А. Толпыго

Задача 3.(3)

Докажите, что

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ddots+\cfrac{1}{1991}}}}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ddots+\cfrac{1}{1991}}}}}=1$$

Г. Гальперин

Задача 4.(3)
На окружности записаны 6 чисел: каждое равно модулю разности двух чисел, стоящих после него по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1. Найти эти числа.
Фольклор

ТРИНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур 27 октября 1991 г.

8-9 кл., основной вариант.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
В некотором королевстве было 32 рыцаря. Некоторые из них были вассалами других (вассал может иметь только одного сюзерена, причём сюзерен всегда богаче своего вассала). Рыцарь, имевший не менее четырёх вассалов, носил титул барона.
Какое наибольшее число баронов могло быть при этих условиях? (В королевстве действовал закон: "вассал моего вассала - не мой вассал").
А. Толпыго

Задача 2.(6)
А - вершина равнобедренного треугольника, ВС - основание, $\angle BAC=20^o$. На стороне АВ отложен отрезок AD, равный ВС. Найдите величину угла BCD.
И. Шарыгин

Задача 3.(8)
Можно ли в таблицу 4*4 расставить такие натуральные числа, что одновременно выполняются следующие условия:
1) произведения чисел, стоящих в одной строке, одинаковы для всех строк;
2) произведения чисел, стоящих в одном столбце, одинаковы для всех столбцов;
3) среди чисел нет равных
4) все числа не больше 100?
Н. Васильев

Задача 4.(8)
Последовательность $\{a_n\}$ определяется правилами: $a_0=9$, для любого k
$a_{k+1}=3a_k^4+4a_k^3$.
Докажите, что a_{10} содержит в десятичной записи более 1000 девяток.
М. Вялый [В отчёте о 13 Турнире в качестве автора указано: *Yao*]

Задача 5.(3+5)
Квадрат 9*9 разбит на 81 единичную клетку. Некоторые клетки закрашены, причём расстояние между центрами любых двух закрашенных клеток больше 2.
а)(3) Приведите пример раскраски, при которой закрашенных клеток 17.
б)(5) Докажите, что больше 17 закрашенных клеток быть не может.
С. Фомин

Задача 6.(8)
Дан выпуклый 8-угольник ABCDEFGH, у которого все внутренние углы равны между собой, а стороны равны через одну - AB=CD=EF=GH, BC=DE=FG=HA (будем называть такой восьмиугольник полуправильным). Проводим диагонали AD, BE, CF, DG, EH, FA, GB и HC. Среди частей, на которые эти диагонали разбивают внутреннюю область 8-угольника, рассмотрим ту, которая содержит центр 8-угольника. Если эта часть - 8-угольник, он снова является полуправильным (это очевидно); в этом случае в нём проводим аналогичные диагонали, и т. д. Если на каком-то шаге центральная фигура не является 8-угольником, процесс заканчивается. Докажите, что если этот процесс бесконечный, то исходный 8-угольник - правильный.
А. Толпыго

Задача 7.(5+7)
n школьников хотят разделить поровну m одинаковых шоколадок, при этом каждую шоколадку можно разломить не более одного раза.
а)(5) При каких n это возможно, если m=9?
б)(7) При каких n и m это возможно?
Ю. Чеканов

ТРИНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур 1991 г.

10-11 кл., тренировочный вариант.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Внутри угла расположены две окружности с центрами A и B. Они касаются друг друга и двух сторон угла.
Докажите, что окружность с диаметром AB касается сторон угла.
В. Прасолов

Задача 2.(3)
В лес за грибами пошли 11 девочек и n мальчиков. Вместе они собрали n^2+9n-2 гриба, причём все они собрали поровну грибов.
Кого было больше: мальчиков или девочек?
А. Толпыго

Задача 3.(3)
В треугольнике ABC на стороне AB выбрана точка D такая, что AD/DC=AB/BC.
Докажите, что угол C - тупой.
С. Берлов

Задача 4.(3)
На окружности записаны 30 чисел: каждое равно модулю разности двух чисел, стоящих после него по часовой стрелке. Сумма всех чисел равна 1.
Найти эти числа.
Фольклор

ТРИНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Осенний тур 27 октября 1991 г.

10-11 кл., основной вариант.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(6)
Во вписанном четырёхугольнике ABCD BC=CD.
Докажите, что площадь этого четырёхугольника равна $(1/2)AC^2\sin\angle A$.
Д. Фомин

Задача 2.(8)
Можно ли разрезать плоскость на многоугольники, каждый из которых переходит в себя при повороте на $360^o/7$ вокруг некоторой точки, и все стороны которых больше 1 см? (Многоугольник - это часть плоскости, ограниченная несамопересекающейся ломаной, не обязательно выпуклой).
А. Анджанс

Задача 3.(8)
Можно ли в таблицу 9*9 расставить такие натуральные числа, что одновременно выполняются следующие условия:
1) произведения чисел, стоящих в одной строке, одинаковы для всех строк;
2) произведения чисел, стоящих в одном столбце, одинаковы для всех столбцов;
3) среди чисел нет равных
4) все числа не больше 1991?
Н. Васильев

Задача 4.(6)
Последовательность $\{a_n\}$ определяется правилами: $a_0=9$, для любого k $a_{k+1}=3a_k^4+4a_k^3$.
Докажите, что a_{10} содержит в дестичной записи более 1000 девяток.
М. Вялый [В отчёте о 13 Турнире в качестве автора указано: *Yao*]

Задача 5.(8)
Пусть M - центр тяжести (точка пересечения медиан) треугольника ABC. При повороте на 120^o вокруг точки M точка B переходит в точку P, при повороте на 240^o вокруг точки M (в том же направлении) точка C переходит в точку Q.
Докажите, что либо треугольник APQ - правильный, либо точки A, P, Q совпадают.
И. Быковский

Задача 6.(3+3+4)
Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отличной от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 9.
а)(3) Докажите, что число её членов меньше 100.
б)(3) Приведите пример такой прогрессии с 72 членами.
в)(4) Докажите, что число членов всякой такой прогрессии не больше 72.
В. Бугаенко, С. Токарев
В отчёте о 13 Турнире в качестве авторов указано: *В. Бугаенко и Тарасов*

Задача 7.(4+6)
n школьников хотят разделить поровну m одинаковых шоколадок, при этом каждую шоколадку можно разломить не более одного раза.
а)(4) При каких n это возможно, если m=9?
б)(6) При каких n и m это возможно?
Ю. Чеканов

ТРИНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур 1992 г.

8-9 кл., тренировочный вариант.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Первого числа некоторого месяца в магазине было 10 видов товаров по одинаковой цене за штуку. После этого каждый день каждый товар дорожает либо в 2 раза, либо в 3 раза. Первого числа следующего месяца все цены оказались различными.
Докажите, что отношение максимальной цены к минимальной больше 27.
Д. Фомин, Станислав Смирнов

Задача 2.(3)
В трапеции ABCD (AD - основание) диагональ AC равна сумме оснований, а угол между диагоналями равен 60^o.
Докажите, что трапеция - равнобедренная.
Станислав Смирнов

Задача 3.(3)
У нумизмата Феди все монеты имеют диаметр не больше 10 см. Он хранит их в плоской коробке размером 30 см * 70 см (в один слой). Ему подарили монету диаметром 25 см.
Докажите, что все монеты можно уложить в одну плоскую коробку размером 55 см *55 см.
Федя Назаров

Задача 4.(5)
Окружность разбита на 7 дуг так, что сумма любых двух соседних дуг не превышает 103^o.
Назовите такое наибольшее число A, что при любом таком разбиении каждая из 7 дуг содержит не меньше A^o (и докажите, что оно действительно наибольшее).
А. Толпыго

ТРИНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур 15 марта 1992 г.

8-9 кл., основной вариант.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(2+2+2)
n чисел (n > 1) называются близкими, если каждое из них меньше, чем сумма всех чисел, деленная на n-1. Пусть a, b, c, ... - n близких чисел, S - их сумма.
Докажите, что
а)(2) все они положительны;
б)(2) всегда a+b > c;
в)(2) всегда a+b $\geq$S/(n-1).
Регина Шлейфер из Арзамаса

Задача 2.(6)
Пусть в прямоугольном треугольнике AB и AC - катеты, AC > AB. На AC выбрана точка E, а на BC - точка D так, что AB=AE=BD.
Докажите, что треугольник ADE будет прямоугольным в том и только в том случае, если стороны треугольника ABC относятся как 3:4:5.
А. Паровян

Задача 3.(6)
Пусть m, n и k - натуральные числа, причём m > n. Какое из двух чисел больше:

$(m+ (n + (m\ ...)^{1/2})^{1/2})^{1/2}$ или $(n+ (m + (n\ ...)^{1/2})^{1/2})^{1/2}$?

(В каждом выражении k знаков квадратного корня, m и n чередуются).
Л. Курляндчик

Задача 4.(10)
Точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC. Построим треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого параллельны отрезкам PA, PB, PC ($B_1C_1 \parallel PA$, $C_1A_1 \parallel PB$, $A_1B_1 \parallel PC$). Через точки A_1, B_1, C_1 проведены прямые, параллельные соответственно BC, CA и AB.
Докажите, что эти прямые пересекаются в точке, лежащей на описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.
В. Прасолов

Задача 5.(10)
Имеется 50 серебряных монет, упорядоченных по весу, и 51 золотая монета, также упорядоченные по весу. Известно, что все монеты различны по весу. В нашем распоряжении - двухчашечные весы, позволяющие про каждые две монеты установить, какая тяжелее.
Как за 7 взвешиваний найти монету, занимающую среди всех монет 51-ое место?
А. Анджанс

Задача 6.(12)
Круг разбит на n секторов, в некоторых секторах стоят фишки - всего фишек n+1. Затем позиция подвергается преобразованиям. Один шаг преобразования состоит в следующем: берутся какие-нибудь две фишки, стоящие в одном секторе, и переставляются в разные стороны в соседние секторы.
Докажите, что через некоторое число шагов не менее половины секторов будет занято.
Д. Фомин

ТРИНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур 1992 г.

10-11 кл., тренировочный вариант.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Первого числа некоторого месяца в магазине было 10 видов товаров по одинаковой цене за штуку. После этого каждый день каждый товар дорожает либо в 2 раза, либо в 3 раза. Первого числа следующего месяца все цены оказались различными.
Докажите, что отношение максимальной цены к минимальной больше 27.
Д. Фомин, Станислав Смирнов

Задача 2.(3)
Стороны треугольника равны 3 см, 4 см и 5 см. Биссектрисы внешних углов треугольника продолжены до пересечения с продолжениями сторон.
Докажите, что одна из трёх полученных точек лежит в середине отрезка, соединяющего две другие.
В. Прасолов

Задача 3.(4)
Из центра O правильного n-угольника $A_1A_2...A_n$ проведены n векторов в его вершины. Даны числа a_1, a_2, ..., a_n, такие что $a_1>a_2>...>a_n>0$.
Докажите, что линейная комбинация векторов: a_1*$\mathbf{OA_1}$+ a_2*$\mathbf{OA_2}$+...+ a_n*$\mathbf{OA_n}$ отлична от нулевого вектора.
Д. Фомин, Алексей Кириченко

Задача 4.(4)
По окружности выписано 10 чисел, их сумма равна 100. Дано, что сумма любой тройки чисел, стоящих подряд, не меньше 29. Укажите такое наименьшее число A, что в любом таком наборе чисел каждое из чисел не превышает A (и докажите, что оно действительно наименьшее).
А. Толпыго

ТРИНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур 15 марта 1992 г.

10-11 кл., основной вариант.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(6)
Докажите, что произведение всех целых чисел от $2^{1917}+1$ до $2^{1991}-1$ включительно не есть квадрат целого числа.
В. Сендеров

Задача 2.(6)
Внутри окружности радиуса 1 расположена замкнутая ломаная (самопересекающаяся), содержащая 51 звено, причём известно, что длина каждого звена равна $3^{1/2}$. Для каждого угла этой ломаной рассмотрим треугольник, двумя сторонами которого служат звенья ломаной, образующие этот угол (таких треугольников всего 51).
Докажите, что сумма площадей этих треугольников не меньше, чем утроенная площадь правильного треугольника, вписанного в окружность.
А. Берзиньш

Задача 3.(8)
Дана таблица n*n, заполненная числами по следующему правилу: в клетке, стоящей в i-той строке и j-том столбце таблицы записано число $(i+j-1)^{-1}$. В таблице зачеркнули n чисел таким образом, что никакие два зачёркнутых числа не находятся в одном столбце или в одной строке.
Докажите, что сумма зачёркнутых чисел не меньше 1.
Сергей Иванов

Задача 4.(8)
Даны три треугольника: $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$. Известно, что их центры тяжести (точки пересечения медиан) лежат на одной прямой, а никакие три точки из числа 9 вершин этих треугольников не лежат на одной прямой. Рассматриваются 27 треугольников вида $A_iB_jC_k$, где i, j, k независимо пробегают значения 1, 2, 3.
Докажите, что эти 27 треугольников можно разбить на две группы так, что сумма площадей треугольников первой группы будет равна сумме площадей треугольников второй группы.
А. Анджанс

Задача 5.(12)
Имеется 100 серебряных монет, упорядоченных по весу, и 101 золотая монета, также упорядоченная по весу. Известно, что все монеты различны по весу. В нашем распоряжении - двухчашечные весы, позволяющие про каждые две монеты установить, какая тяжелее.
Как за наименьшее число взвешиваний найти монету, занимающую среди всех монет 101-ое место? Укажите это число и докажите, что меньшим числом взвешиваний обойтись нельзя.
А. Анджанс

Задача 6.
Пусть n и b - натуральные числа. Через V(n,b) обозначим число разложений n на сомножители, каждый из которых больше b (например: 36=6*6=4*9=3*3*4=3*12, так что V(36,2)=5).
Докажите, что $V(n,b) < n/b$.
Н. Б. Васильев

Четырнадцатый Турнир, 1992-1993

ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1992 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
В банде 101 террорист. Все вместе они в вылазках ни разу не участвовали, а каждые двое встречались в вылазках ровно по разу.
Докажите, что один из террористов участвовал не менее, чем в 11 различных вылазках.
А. Анджанс

Задача 2.(3)
На каждой стороне параллелограмма выбрано по точке. Точки, лежащие на соседних (имеющую общую вершину) сторонах, соединены.
Докажите, что центры описанных окружностей четырёх получившихся треугольников - вершины параллелограмма.
Е. Д. Куланин

Задача 3.(5)
Дано натуральное число M.
Докажите, что существует число, кратное M, сумма цифр которого (в десятичной записи) нечётна.
Д. Фомин

Задача 4.(2+3)
а)(2) В треугольнике ABC угол $\angle A$ больше угла $\angle B$.
Докажите, что длина стороны BC больше половины длины стороны AB.
б)(3) В выпуклом четырёхугольнике ABCD $\angle A > \angle C$, $\angle D > \angle B$.
Докажите, что длина стороны BC больше половины длины стороны AD.
Ф. Назаров

ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 25 октября 1992 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
В таблице n*n разрешается добавить ко всем числам любого несамопересекающегося замкнутого маршрута ладьи по 1. В первоначальной таблице по диагонали стояли единицы, а остальные были нули.
Можно ли с помощью нескольких разрешённых преобразований добиться того, что все числа в таблице станут равны? (Считается, что ладья побывала во всех клетках таблицы, через которые проходит её путь.)
А. А. Егоров

Задача 2.(5)
В квадрат вписано 1993 различных правильных треугольника (треугольник вписан, если три его вершины лежат на сторонах квадрата).
Докажите, что внутри квадрата можно указать точку, лежащую на границе не менее чем 499 из этих треугольников.
Н. Седракян

Задача 3.(5)
Можно ли подобрать два многочлена P(x) и Q(x) с целыми коэффициентами, такие что P-Q, P и P+Q - квадраты некоторых многочленов (причём Q не получается умножением P на число)?
В. Прасолов

Задача 4.
В четырёхугольнике ABCD AB=BC=CD=1, AD не равно 1. Положение точек B и C фиксировано, точки же A и D подвергаются преобразованиям, сохраняющим длины отрезков AB, CD и AD. Новое положение точки A получается из старого зеркальным отражением в отрезке BD, новое положение точки D получается из старого зеркальным отражением в отрезке AC (где A уже новое), затем на втором шагу опять A отражается относительно BD (D уже новое), затем снова преобразуется D, затем аналогично проводится третий шаг, и так далее.
Докажите, что на каком-то шагу положение точек совпадает с первоначальным.
М. Концевич

Задача 5.(8)
Дан угол с вершиной O и внутри него точка A. Рассмотрим точки M, N на разных сторонах данного угла такие, что углы $\angle MAO$ и $\angle OAN$ равны.
Докажите, что все прямые MN проходят через одну точку (или параллельны).
С. Токарев

Задача 6.(8)
Числовая последовательность определяется условиями:
$a_1=1$; $a_{n+1} = a_n + [a_n^{1/2}]$ (через [x] обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x).
Докажите, что среди членов этой последовательности бесконечно много полных квадратов.
А. Анджанс

ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1992 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
Дан куб с ребром длины n см. В нашем распоряжении имеется длинный кусок изоляционной ленты шириной 1 см. Требуется обклеить куб лентой, при этом лента может свободно переходить через ребро на другую грань, по грани она должна идти по прямой параллельно ребру и не свисать с грани вбок.
На сколько кусков необходимо разрезать ленту, чтобы обклеить куб?
А. Спивак

Задача 2.(4)
Рассматривается последовательность квадратов на плоскости. Первые два квадрата со стороной 1 расположены рядом (второй правее) и имеют одну общую вертикальную сторону. Нижняя сторона третьего квадрата со стороной 2 содержит верхние стороны первых двух квадратов. Правая сторона четвёртого квадрата со стороной 3 содержит левые стороны первого и третьего квадратов. Верхняя сторона пятого квадрата со стороной 5 содержит нижние стороны первого, второго и четвертого квадратов. Далее двигаемся по спирали бесконечно, обходя рассмотренные квадраты против часовой стрелки так, что сторона нового квадрата составлена из сторон трех ранее рассмотренных.
Докажите, что центры всех этих квадратов, кроме первого, принадлежат двум прямым.
А. Анджанс

Задача 3.(4)
Функция f(x) на отрезке [a,b] равна максимуму из нескольких функций вида $y=C*10^{-|x-d|}$ (с различными d и C, причём все C положительны). Дано, что f(a) = f(b).
Докажите, что сумма длин участков, на которых функция возрастает, равна сумме длин участков, на которых функция убывает.
Н. Васильев

Задача 4.(1+3)
а)(1) В треугольнике ABC угол $\angle A$ больше угла $\angle B$.
Докажите, что длина стороны BC больше половины длины стороны AB.
б)(3) В выпуклом четырёхугольнике ABCD $\angle A>\angle C$, $\angle D>\angle B$.
Докажите, что длина стороны BC больше половины длины стороны AD.
Ф. Назаров

ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 25 октября 1992 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
Докажите, что существует набор из 100 различных натуральных чисел $c_1, c_2, ..., c_{100}$ такой, что для любых двух соседних чисел c_i и c_{i+1} этого набора сумма $c_i^2+c_{i+1}^2$ есть квадрат целого числа.
С. Токарев

Задача 2.(4)
Куб с ребром n составлен из кубиков с ребром 1, некоторые из которых белые, а остальные - чёрные, таким образом, что каждый белый кубик имеет общую грань с тремя чёрными, а каждый чёрный - с тремя белыми.
При каких n это возможно?
С. Токарев

Задача 3.(6)
Числовая последовательность определяется условиями:
$a_1=1$; $a_{n+1} = a_n + [a_n^{1/2}]$ (через [x] обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x). Сколько полных квадратов встречается среди первых членов этой последовательности, не превосходящих 1000000?
А. Анджанс

Задача 4.(8)
В таблице m строк, n столбцов. "Горизонтальным ходом" называется такая перестановка элементов таблицы, при которой каждый элемент остаётся в той строке, в которой он был и до перестановки; аналогично определяется "вертикальный ход" ("строка" в предыдущем определении заменяется на "столбец").
Укажите такое k, что за k ходов (любых) можно получить любую перестановку элементов таблицы, но существует такая перестановка, которую нельзя получить за меньшее число ходов.
А. Анджанс

Задача 5.(8)
Биссектриса угла $\angle A$ треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D. Пусть P - точка, симметричная центру вписанной окружности треугольника ABC относительно середины стороны BC, M - вторая точка пересечения прямой DP с описанной окружностью.
Докажите, что расстояние от точки M до одной из вершин A, B, C равно сумме расстояний от M до двух других вершин.
В. Гордон

Задача 6.(4+3+2)
Число рёбер многогранника равно 100.
а)(4) Какое наибольшее число рёбер может пересечь плоскость, не проходящая через его вершины, если многогранник выпуклый?
б)(3) Докажите, что для невыпуклого многогранника это число может равняться 96,
в)(2) но не может равняться 100.
А. Анджанс

ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1993 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Сторона AB треугольника ABC имеет длину c. На стороне AB взята точка M такая, что $\angle CMA=\varphi$. Найдите расстояние между ортоцентрами (точками пересечения высот) треугольников AMC и BMC.
И. Шарыгин

Задача 2.(3)
Имеется два дома, в каждом по два подъезда. Жильцы держат кошек и собак, причём доля кошек (отношение числа кошек к общему числу кошек и собак) в первом подъезде первого дома больше, чем доля кошек в первом подъезде второго дома, а доля кошек во втором подъезде первого дома больше, чем доля кошек во втором подъезде второго дома. Верно ли, что доля кошек в первом доме больше доли кошек во втором доме?
А. Ковальджи

Задача 3.(3)
a, b, c - натуральные числа, НОД(a,b,c)=1 и ab/(a-b)=c.
Докажите, что a-b - точный квадрат.
С. Л. Берлов

Задача 4.(4)
Муравей ползает по проволочному каркасу куба, при этом он никогда не поворачивает назад. Может ли случиться, что в одной вершине он побывал 25 раз, а в каждой из остальных - по 20 раз?
С. Токарев

ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 14 марта 1993 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
Мудрецу С. сообщили сумму трёх натуральных чисел, а мудрецу П. - их произведение.
- Если бы я знал - сказал С., - что твоё число больше, чем моё, я бы сразу назвал три искомых числа.
- Мое число меньше, чем твоё - ответил П., а искомые числа ..., ... и ... .
Какие числа назвал П.?
Л. Борисов

Задача 2.(4)
O - центр окружности, касающейся стороны AC треугольника ABC и продолжений сторон BA и BC, D - центр окружности, проходящей через точки B, A и O.
Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.
И. Ф. Акулич

Задача 3.(4)
Задано правило, которое каждой паре чисел x, y ставит в соответствие некоторое число x*y, причём для любых x, y, z выполняются тождества:
1) $x*x=0$,
2) $x*(y*z)=(x*y)+z$.
Найдите 1993*1932.
Г. Гальперин

Задача 4.(6)
Петя заметил, что у всех его 25 одноклассников различное число друзей в этом классе.
Сколько друзей у Пети? (Укажите все решения.)
С. Токарев

Задача 5.(6)
Из бумаги вырезан треугольник с углами 20^o, 20^o, 140^o. Он разрезается по одной из своих биссектрис на два треугольника. Затем один из образовавшихся треугольников также разрезается по одной из своих биссектрис на два треугольника, и так далее.
Докажите, что ни на каком шагу нельзя получить треугольник, подобный исходному.
А. И. Галочкин

Задача 6.(4+4)
Примечание: это первая задача на Турнире, которую во время Турнира не решил ни один из его участников.
Ширина реки один километр. Это по определению означает, что от любой точки каждого берега можно доплыть до противоположного берега, проплыв не больше километра.
Может ли катер проплыть по реке так, чтобы в любой момент расстояние до любого из берегов было бы не больше:
а)(4) 700 м?
б)(4) 800 м?
(Берега состоят из отрезков и дуг окружностей.)
Г. Кондаков

Задача 7.(6)
На отрезке [a,b] отмечено несколько синих и красных точек. Две точки одного цвета, между которыми нет отмеченных точек, разрешается стереть. Разрешается также отметить две точки одного цвета, красные или синие, так, чтобы между ними не было других отмеченных точек. Первоначально было отмечено две точки: a - синяя и b - красная.
Можно ли сделать несколько разрешенных пребразований так, чтобы в результате было опять две отмеченные точки: a - красная и b - синяя?
А. Я. Канель-Белов

ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1993 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Найти все такие числа вида 2^n (n натурально), что при вычёркивании первой цифры их десятичной записи снова получится степень двойки.
А. Перлин

Задача 2.(3)
Четырёхугольник ABCD - вписанный. M - точка пересечения прямых AB и CD, N - точка пересечения BC и AD. Известно, что BM=DN.
Докажите, что CM=CN.
Ф. Назаров

Задача 3.(3)
Рассматривается числовой треугольник:

```
     1   1   1             1
 1   -   -   -  ...       ----
     2   3   4            1993
   1   1    1           1
   -   -   --  ...  ---------
   2   6   12       1992*1993
     1    1
     -   --    ...     ...
     3   12

      ...     ...
```

(первая строчка задана, а каждый элемент остальных строчек вычисляется как разность двух элементов, которые стоят над ним). В 1993-й строчке - один элемент.
Найдите его.
Г. В. Лейбниц

Задача 4.(4)
Есть три кучи камней. Разрешается к любой из них добавить столько камней, сколько есть в двух других кучах, или из любой кучи выбросить столько камней, сколько есть в двух других кучах.
Например: (12, 3, 5) -> (12,20,5) (или -> (4,3,5)).
Можно ли, начав с куч 1993, 199 и 19, сделать одну из куч пустой?
М. Н. Гусаров

ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 14 марта 1993 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько неналегающих друг на друга квадратов со сторонами, параллельными сторонам большого квадрата (маленькие квадраты не обязательно равны друг другу).
Рассмотрим те квадраты, которые пересекаются с диагональю большого квадрата.
Может ли оказаться, что сумма их периметров больше 1993?
А. Я. Канель-Белов, А. Н. Колмогоров

Задача 2.(5)
На стороне AB треугольника ABC внешним образом построен квадрат с центром в точке O. Точки M и N - середины сторон BC и AC, а длины этих сторон равны соответственно a и b.
Найдите наибольшее возможное значение суммы OM+ON (когда угол C меняется).
И. Ф. Шарыгин

Задача 3.(5)
Несколько человек делят наследство. Наследник считается бедным, если ему досталось меньше 99 рублей, богатым, - если ему досталось больше 10000 рублей. Величина наследства и число людей таковы, что при любом способе дележа у богатых окажется не меньше денег, чем у бедных.
Докажите, что при любом способе дележа у богатых не меньше чем в 100 раз больше денег, чем у бедных.
Ф. Назаров

Задача 4.(6)
На доску последовательно записываются натуральные числа. На n-м шагу (когда написаны числа a_1, a_2, ..., a_{n-1}) пишется любое число, которое нельзя представить в виде суммы
$a_1k_1+a_2k_2+...+a_{n-1}k_{n-1}$, где k_i - целые неотрицательные числа (на a_1 никаких ограничений не накладывается).
Доказать, что процесс написания чисел не может быть бесконечным.
А. Я. Канель-Белов

Задача 5.(6)
Существует ли кусочно-линейная функция f, определённая на отрезке [-1,1] (включая концы), для которой f(f(x))=-x при всех x?
(Функция называется кусочно-линейной, если её график есть объединение конечного числа точек и интервалов прямой; она может быть разрывной.)
А. Я. Канель-Белов

Задача 6.(3+3)
Ширина реки один километр. Это по определению означает, что от любой точки каждого берега можно доплыть до противоположного берега, проплыв не больше километра.
Может ли катер проплыть по реке так, чтобы в любой момент расстояние до любого из берегов было бы не больше:
а)(3) 700 м?
б)(3) 800 м?
(Берега состоят из отрезков и дуг окружностей.)
Г. Кондаков

Задача 7.(4+4)
В ботаническом справочнике каждое растение характеризуется 100 признаками (каждый признак либо присутствует, либо отсутствует). Растения считаются "непохожими", если они различаются не менее, чем по 51 признаку.
а)(4) Покажите, что в справочнике не может находиться больше 50 попарно непохожих растений.
б)(4) А может ли быть 50?
Дима Терешин, М. Н. Вялый

Пятнадцатый Турнир, 1993-1994

ПЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1993 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
На сторонах шестиугольника было записано шесть чисел, а в каждой вершине - число, равное сумме двух чисел на смежных с ней сторонах. Затем все числа на сторонах и одно число в вершине стёрли. Можно ли восстановить число, стоявшее в вершине?
Фольклор

Задача 2.(3)
Вершины A, B, C треугольника соединены с точками A_1, B_1, C_1, лежащими на противоположных сторонах (не в вершинах).
Могут ли середины отрезков A_1, B_1, C_1 лежать на одной прямой?
Фольклор

Задача 3.(4)
Первоначально на доске написано натуральное число A. Разрешается прибавить к нему один из его делителей, отличных от него самого и единицы. С полученным числом разрешается проделать аналогичную операцию, и т. д.
Докажите, что из числа A=4 можно с помощью таких операций прийти к любому наперёд заданному составному числу.
М. Н. Вялый

Задача 4.(5)
Три шахматиста A, B и C сыграли матч-турнир (каждый с каждым сыграл одинаковое число партий). Может ли случиться, что по числу очков A занял первое место, C - последнее, а по числу побед, наоборот, A занял последнее место, C - первое (за победу присуждается одно очко, за ничью - пол-очка)?
А. Рубин

ПЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 24 октября 1993 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(2+2)
В строчку выписано 10 целых чисел. Вторая строчка находится так: под каждым числом A первой строчки пишется число, равное количеству чисел первой строчки, которые больше A и при этом стоят правее A. По второй строчке аналогично строится третья строчка и т. д.
а)(2) Докажите, что все строчки, начиная с некоторой - нулевые (состоят из сплошных нулей).
б)(2) Каково максимально возможное число ненулевых строчек (содержащих хотя бы одно число, отличное от нуля)?
С. Токарев

Задача 2.(3)
Внутри квадрата ABCD лежит квадрат PQRS. Отрезки AP, BQ, CR и DS не пересекают друг друга и квадрата PQRS.
Докажите, что сумма площадей четырёхугольников ABQP и CDSR равна сумме площадей четырёхугольников BCRQ и DAPS.
Фольклор

Задача 3.(3)
Дан невыпуклый несамопересекающийся четырёхугольник, который имеет три внутренних угла по 45^o.
Докажите, что середины его сторон лежат в вершинах квадрата.
В. Произволов

Задача 4.(2+3)
В каждой клетке квадрата 8*8 клеток проведена одна из диагоналей. Рассмотрим объединение этих 64 диагоналей. Оно состоит из нескольких связных частей (к одной части относятся точки, между которыми можно пройти по одной или нескольким диагоналям).
Может ли количество этих частей быть
а)(2) больше 15?
б)(3) больше 20?
Н. Васильев

Задача 5.(6)
Через S(n) обозначим сумму цифр числа n (в десятичной записи). Существуют ли три таких различных натуральных числа m, n и p, что m+S(m)=n+S(n)=p+S(p)?
М. Гервер

Задача 6.(4+4)
Требуется сделать набор гирек, каждая из которых весит целое число граммов, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 грамма до 55 граммов включительно даже в том случае, если некоторые гирьки потеряны
(гирьки кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес - на другую).
Рассмотрите два варианта задачи:
а)(4) необходимо подобрать 10 гирек, из которых может быть потеряна любая одна;
б)(4) необходимо подобрать 12 гирек, из которых могут быть потеряны любые две.
(В обоих случаях докажите, что найденный Вами набор гирек обладает требуемыми свойствами.)
Д. Звонкин

ПЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1993 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Конечно или бесконечно число натуральных решений уравнения
$x^2+y^3=z^2$?
Фольклор

Задача 2.(3)
На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взяты точки M и N такие, что BC=BM и AC=AN.
Докажите, что $\angle MCN=45^o$.
Фольклор

Задача 3.(5)
Числа 1, 2, 3, ..., 25 расставляют в таблицу 5*5 так, чтобы в каждой строке числа были расположены в порядке возрастания. Какое наибольшее и какое наименьшее значение может иметь сумма чисел в третьем столбце?
Фольклор

Задача 4.(5)
Петя хочет изготовить необычную игральную кость, которая, как обычно, должна иметь форму куба, на гранях которого нарисованы точки (на разных гранях разное число точек), но при этом на любых двух соседних гранях число точек должно различаться по крайней мере на два (при этом разрешается, чтобы на некоторых гранях оказалось больше шести точек).
Сколько всего точек необходимо для этого нарисовать? (Укажите минимальное количество, приведите пример их расположения на гранях и докажите, что меньшим числом обойтись нельзя.)
Фольклор

ПЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 24 октября 1993 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
В угол вписана окружность; A и B - точки касания, C - вершина.
Докажите, что если отрезок расположен внутри невыпуклого криволинейного треугольника ABC, где AB - дуга окружности, то его длина меньше длины отрезка CA.
Фольклор

Задача 2.(3)
Десятичные записи натуральных чисел выписаны подряд, начиная с единицы, до некоторого n включительно:
12345678910111213...(n).
Существует ли такое n, что в этой записи все десять цифр встречаются одинаковое количество раз?
А. Анджанс

Задача 3.(3)
Рассматривается шестиугольник, являющийся пересечением двух (не обязательно равных) правильных треугольников.
Докажите, что если параллельно перенести один из треугольников, то периметр пересечения (если оно остаётся шестиугольником), не меняется.
В. Произволов

Задача 4.(6)
Выпуклый 1993-угольник разрезан на выпуклые семиугольники.
Докажите, что найдутся четыре соседние вершины 1993-угольника, принадлежащие одному семиугольнику. (Вершина семиугольника не может лежать внутри стороны 1993-угольника.)
А. Канель-Белов

Задача 5.(6)
В вершинах квадрата сидят четыре кузнечика. Они прыгают в произвольном порядке, но не одновременно. Каждый кузнечик прыгает в такую точку, которая симметрична точке, в которой он находился до прыжка, относительно центра тяжести трёх других кузнечиков.
Может ли в какой-то момент один кузнечик приземлиться на другого? (Кузнечики точечные.)
А. Анджанс

Задача 6.(8)
Известно, что уравнение
$x^4+ax^3+2x^2+bx+1=0$ имеет действительный корень.
Докажите неравенство: $a^2+b^2\geq 8$.
А. Егоров

ПЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1994 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Построить выпуклый четырёхугольник, зная длины всех сторон и отрезка, соединяющего середины диагоналей.
Фольклор

Задача 2.(4)
На кружок пришло 60 учеников. Оказалось, что среди любых 10 учеников есть не меньше трёх одноклассников.
Докажите, что среди кружковцев найдётся по меньшей мере 15 учеников, которые учатся в одном классе.
Фольклор

Задача 3.(4)
Из точки O, лежащей внутри выпуклого n-угольника $A_1A_2A_3\ldots A_n$, проведены отрезки ко всем вершинам OA_1, OA_2, ..., OA_n. Оказалось, что все углы между этими отрезками и прилегающими к ним сторонами n-угольника - острые, причём
$\angle OA_1A_n \le \angle OA_1A_2$, $\angle OA_2A_1 \le \angle OA_2A_3$, $\angle OA_{n-1}A_{n-2} \le \angle OA_{n-1}A_n$, $\angle OA_nA_{n-1} \le \angle OA_nA_1$.
Докажите, что O - центр окружности, вписанной в n-угольник.
В. Произволов

Задача 4.(5)
10 фишек стоят на столе по кругу. Сверху фишки красные, снизу - синие. Разрешены две операции: а) перевернуть четыре фишки, стоящие подряд; б) перевернуть четыре фишки, расположенные так: xx0xx (x - фишка, входящая в четвёрку, 0 - не входящая).
Удастся ли, используя несколько раз разрешённые операции, перевернуть все фишки синей стороной вверх?
А. Толпыго

ПЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 13 марта 1994 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Ученик не заметил знака умножения между двумя трёхзначными числами и написал одно шестизначное число. Результат получился в три раза больше. Найти эти числа.
А. Ковальджи

Задача 2.(3)
Две окружности пересекаются в точках A и B. В точке A к обеим проведены касательные, пересекающие окружности в точках M и N. Прямые BM и BN пересекают окружности ещё раз в точках P и Q (P лежит на прямой BM, Q - на прямой BN). Докажите, что отрезки MP и NQ равны.
И. Нагель

Задача 3.(3)
Каждый из 450 депутатов парламента дал пощечину ровно одному своему коллеге. Докажите, что можно избрать парламентскую комиссию из 150 человек, среди членов которой никто никого не бил.
М. Н. Вялый

Задача 4.

```
0 1 2 3 ... 9
9 0 1 2 ... 8
8 9 0 1 ... 7
.............
1 2 3 4 ... 0
```

отмечено 10 элементов так, что в каждой строке и каждом столбце отмечен один элемент.
Докажите, что среди отмеченных элементов есть хотя бы два равных.
А. Савин

Задача 5.(5)
Существует ли такой выпуклый пятиугольник, от которого некоторая прямая отрезает подобный ему пятиугольник?
С. Токарев

Задача 6.(5)
В каждой целой точке числовой оси расположена лампочка с кнопкой, при нажатии которой лампочка меняет состояние - загорается или гаснет. Вначале все лампочки погашены. Задано конечное множество целых чисел - шаблон S. Его можно перемещать вдоль числовой оси как жесткую фигуру и, приложив в любом месте, поменять состояние множества всех лампочек, закрытых шаблоном.
Докажите, что при любом S за несколько операций можно добиться того, что будут гореть ровно две лампочки.
Б. Гинзбург

Задача 7.(5+2)
В квадрате клетчатой бумаги 10*10 вам нужно расставить корабли: 1*4 - один корабль, 1*3 - два, 1*2 - три и 1*1 - четыре корабля. Корабли не должны иметь общих точек (даже вершин) друг с другом, но могут прилегать к границам квадрата.
Докажите, что
а)(5) если расставлять их в указанном выше порядке (начиная с больших), то этот процесс всегда удается довести до конца, даже если вы в каждый момент заботитесь только об очередном корабле, не думая о будущих;
б)(2) если расставлять их в обратном порядке (начиная с малых), то может возникнуть ситуация, когда очередной корабль поставить нельзя (приведите пример).
К. Игнатьев

ПЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1994 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(4)
Треугольник ABC вписан в окружность. Точка A_1 диаметрально противоположна точке A, точка A_0 - середина отрезка BC, точка A_2 симметрична точке A_1 относительно точки A_0. Точки B_2 и C_2 определяются аналогично, исходя из точек B и C.
Докажите, что точки A_2, B_2 и C_2 совпадают.
А. Ягубьянц

Задача 2.(2+3)
Последовательность натуральных чисел a(1), a(2), ..., a(n), ... такова, что для всякого n уравнение $a(n+2)x^2+a(n+1)x+a_n=0$ имеет действительный корень.
Может ли число членов этой последовательности быть
а)(2) равным 10;
б)(3) бесконечным?
А. Шаповалов

Задача 3.(4)
Имеется шоколадка с пятью продольными и восемью поперечными углублениями, по которым её можно ломать (всего получается 9*6=54 дольки). Играют двое, ходят по очереди. Играющий за свой ход отламывает от шоколадки полоску шириной 1 и съедает её. Другой играющий за свой ход делает то же самое с оставшейся частью, и т. д. Тот, кто разламывает полоску шириной 2 на две полоски шириной 1, съедает одну из них, а другую съедает его партнер.
Докажите, что начинающий игру может действовать таким образом, что ему достанется по крайней мере на 6 долек больше, чем второму (при любых действиях второго).
Р. Фёдоров

Задача 4.(4)
10 фишек стоят на столе по кругу. Сверху фишки красные, снизу - синие. Разрешены две операции: а) перевернуть четыре фишки, стоящие подряд; б) перевернуть четыре фишки, расположенные так: xx0xx (x - фишка, входящая в четвёрку, 0 - не входящая).
Удастся ли, используя несколько раз разрешённые операции, перевернуть все фишки синей стороной вверх?
А. Толпыго

ПЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 13 марта 1994 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Существует ли бесконечное число троек целых чисел x, y, z таких, что
$x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3$?
Н. Васильев

Задача 2.(2+2)
$\{a_n\}$ - последовательность чисел между 0 и 1, в которой следом за x идет $1-|1-2x|$.
а)(2) Докажите, что если a_1 рациональное, то последовательность начиная с некоторого места периодическая.
б)(2) Докажите, что если последовательность начиная с некоторого места периодическая, то a_1 - рациональное.
Г. Шабат

Задача 3.(4)
У многочлена P(x) есть отрицательный коэффициент. Могут ли у всех его степеней $P^n(x)$, $n > 1$, все коэффициенты быть положительными?
О. Крижановский

Задача 4.(5)
На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. В треугольники ABD и ACD вписаны окружности, и к ним проведена общая внешняя касательная (отличная от BC), пересекающая AD в точке K. Докажите, что длина отрезка AK не зависит от выбора точки D.
И. Шарыгин

Задача 5.(5)
Найдите наибольшее натуральное число, десятичная запись которого не заканчивается нулями, которое при вычеркивании одной (не первой) цифры уменьшается в целое число раз.
А. Галочкин

Задача 6.(5)
Рассматривается выпуклый четырёхугольник ABCD. Пары его противоположных сторон продолжены до пересечения: AB и CD - в точке P, CB и DA - в точке Q. Пусть l_A, l_B, l_C и l_D - биссектрисы внешних углов четырёхугольника при вершинах соответственно A, B, C, D. Пусть l_P и l_Q - внешние биссектрисы углов соответственно APD и AQB (то-есть биссектрисы углов, дополняющих эти углы до развёрнутого). Обозначим через M_{AC} точку пересечения l_A и l_C, через M_{BD} - l_B и l_D , через M_{PQ} - l_P и l_Q .
Докажите, что, если все три точки M_{AC}, M_{BD} и M_{PQ} существуют, то они лежат на одной прямой.
С. Маркелов

Задача 7.(3+3+2)
Рассматривается произвольный многоугольник (возможно, невыпуклый).
а)(3) Всегда ли найдётся хорда этого многоугольника, которая делит его площадь пополам?
б)(3) Докажите, что найдётся такая хорда, что площадь каждой из частей, на которые она разбивает многоугольник, не меньше, чем 1/3 площади всего многоугольника.
в)(2) Можно ли в пункте б) заменить число 1/3 на большее?
(Хордой многоугольника называется отрезок, концы которого принадлежат контуру многоугольника, а сам он целиком принадлежит многоугольнику, включая контур).
В. Произволов

Шестнадцатый Турнир, 1994-1995

Осенний тур

Тренировочный вариант

(8-9 кл., 16, осень)
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Во время бала каждый юноша танцевал вальс с девушкой либо более красивой, чем на предыдущем танце, либо более умной, а один - с девушкой одновременно более красивой и более умной. Могло ли такое быть? (Юношей и девушек на балу было поровну.)
А.Я. Канель-Белов

Задача 2.(3)
На плоскости даны две окружности одна внутри другой. Построить такую точку O, что одна окружность получается из другой гомотетией относительно точки O (другими словами - чтобы растяжение плоскости от точки O с некоторым коэффициентом переводило одну окружность в другую).
Фольклор

Задача 3.(5)

Найдите какие-нибудь пять натуральных чисел, разность любых двух из которых равна наибольшему общему делителю этой пары чисел.
С.И. Токарев

Задача 4.(5)
В Простоквашинской начальной школе учится всего 20 детей. У любых двух из них есть общий дед. Докажите, что у одного из дедов в этой школе учится не менее 14 внуков и внучек.
А.В. Шаповалов

Осенний тур

Основной вариант

(8-9 кл., 16, осень, 23.11.1994)
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
В ящиках лежат орехи. Известно, что в среднем в каждом ящике 10 орехов, а среднее арифметическое квадратов чисел орехов в ящиках меньше 1000.
Докажите, что по крайней мере 10% ящиков не пустые.
А.Я. Канель-Белов

Задача 2.(4)
На плоскости дан квадрат 8*8, разбитый на клеточки 1*1. Его покрывают прямоугольными равнобедренными треугольниками (два треугольника закрывают одну клетку). Имеется 64 черных и 64 белых треугольника. Рассматриваются "правильные" покрытия - такие, что любые два треугольника, имеющие общую сторону, разного цвета. Сколько существует правильных покрытий?
Н.Б. Васильев

Задача 3.(4)
Взаимно перпендикулярные прямые l и m пересекаются в точке P окружности так, что они разбивают окружность на три дуги. Отметим на каждой дуге точку такую, что проведенная через неё касательная к окружности пересекается с прямыми l и m в точках, равноотстоящих от точки касания. Докажите, что три отмеченные точки являются вершинами равностороннего треугольника.
Е. Пржевальский

Задача 4.
Можно ли из последовательности 1, 1/2, 1/3, ... выбрать (сохраняя порядок)
а)(3) сто чисел,
б)(2) бесконечную подпоследовательность чисел,
из которых каждое, начиная с третьего, равно разности двух предыдущих ($a_k=a_{k-2}-a_{k-1}$)?
С. Токарев

Задача 5.(6)
Периоды двух последовательностей - 7 и 13. Какова максимальная длина начального куска, который может у них совпадать? (Период последовательности $\{a_n\}$ - это наименьшее натуральное число p, такое что для любого номера n выполняется равенство $a_n=a_{n+p}$).
А. Канель-Белов

Задача 6.(6)
Сумма шестых степеней шести целых чисел на единицу больше, чем их ушестерённое произведение. Докажите, что одно из чисел равно единице или минус единице, а остальные - нули.
Л. Курляндчик

Задача 7.(9)
Фигура Ф представляет собой пересечение N кругов (радиусы не обязательно одинаковы). Какое максимальное число криволинейных "сторон" может иметь фигура Ф? (Криволинейная сторон - это участок границы Ф, принадлежащий одной из окружностей и ограниченный точками пересечения с другими окружностями.)
Н. Бродский

Осенний тур

Тренировочный вариант

(10-11 кл., 16, осень)

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)

Во время бала каждый юноша танцевал вальс с девушкой либо более красивой, чем на предыдущем танце, либо более умной, но большинство (не меньше 80 процентов) - с девушкой одновременно более красивой и более умной. Могло ли такое быть? (Юношей и девушек на балу было поровну.)

А.Я. Канель-Белов

Задача 2.(4)

Докажите, что из шести ребер тетраэдра можно сложить два треугольника.

В.В. Произволов

Задача 3.(4)

Пусть a, b, c, d - вещественные числа, такие что $a^3+b^3+c^3+d^3=a+b+c+d=0$.

Докажите, что сумма каких-то двух из этих чисел равна нулю.

Л.Д. Курляндчик

Задача 4.(5)

Полоска 1*10 разбита на единичные квадраты. В квадраты записывают числа 1, 2, ..., 10. Сначала в один какой-нибудь квадрат пишут число 1, затем число 2 записывают в один из соседних квадратов, затем число 3 - в один из соседних с уже занятыми и т. д. (произвольными являются выбор первого квадрата и выбор соседа на каждом шагу). Сколькими способами это можно проделать?

А. Шень

Осенний тур

Основной вариант

(10-11 кл., 16, осень, 23.10.1994)
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Коэффициенты квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ изменили не больше, чем на 0,001. Может ли больший корень уравнения измениться больше, чем на 1000?
Фольклор

Задача 2.
Покажите, как разбить пространство
а)(2) на одинаковые тетраэдры,
б)(2) на одинаковые равногранные тетраэдры
(тетраэдр называется равногранным, если все его грани - равные треугольники).
Н. Б. Васильев

Задача 3.(4)
В треугольник ABC вписана окружность с центром O. Медиана AD пересекает её в точках X и Y. Найдите угол $\angle XOY$, если AC=AB+AD.
А. Федотов

Задача 4.(5)
Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, ..., a_n$ справедливо неравенство
$(1+(a_1^2/a_2))\ (1+(a_2^2/a_3))\ ...\ (1+(a_n^2/a_1)) \geq (1+a_1)\ (1+a_2)\ ...\ (1+a_n)$
Л.Д. Курляндчик

Задача 5.(6)
Периоды двух последовательностей - m и n - взаимно простые числа. Какова максимальная длина начального куска, который может у них совпадать?
(Период последовательности $\{a_i\}$ - это наименьшее натуральное число p, такое что для любого номера k выполняется равенство $a_k=a_{k+p}$.)
А.Я Канель-Белов

Задача 6.(7)
Рассматривается последовательность, n-ый член которой есть первая цифра числа 2^n.
Докажите, что количество различных "слов" длины 13 - наборов из 13 подряд идущих цифр - равно 57.
А. Канель-Белов

Задача 7.(8)
Фигура Ф представляет собой пересечение n кругов (радиусы не обязательно одинаковы). Какое максимальное число криволинейных "сторон" может иметь фигура Ф? (Криволинейная сторона - это участок границы Ф, принадлежащий одной из окружностей и ограниченный точками пересечения с другими окружностями.)
Н. Бродский

Весенний тур

Тренировочный вариант

(8-9 кл., 16, весна)

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(3)
У кассира было 30 монет: 10, 15 и 20 копеек на сумму 5 рублей.
Докажите, что 20-копеечных монет у него было больше, чем 10-копеечных.
Фольклор

Задача 2.(3)
Три кузнечика сидят на прямой так, что два крайних отстоят на 1 м от среднего. Каждую секунду один из кузнечиков прыгает через другого в симметричную точку (если A прыгает через B в точку A_1, то $AB=BA_1$). Через некоторое время кузнечики оказались на тех же местах, что и вначале, но в другом порядке.
Докажите, что поменялись местами крайние кузнечики.
А. Ковальджи

Задача 3.(4)
Известно, что вершины квадрата T_1 принадлежат прямым, содержащим стороны квадрата T_2, а вписанная окружность квадрата T_1 совпадает с описанной окружностью квадрата T_2.
Найдите углы восьмиугольника, образованного вершинами квадрата T_2 и точками касания окружности со сторонами квадрата T_1, и величины дуг, на которые вершины восьмиугольника делят окружность.
С. Маркелов

Задача 4.
Докажите, что число 40...09 - не полный квадрат (при любом числе нулей, начиная с 1).
В. Сендеров

Весенний тур

Основной вариант

(8-9 кл., 16, весна, 12.03.1995)
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(4)
Докажите, что если a, b, c - целые числа, и, кроме того,
(a/b) + (b/c) + (c/a) и (a/c) + (c/b) + (b/a) - также целые числа, то |a|=|b|=|c|.
А. Грибалко

Задача 2.(4)
Прямая отрезает от правильного 10-угольника ABCDEFGHIJ со стороной 1 треугольник PAQ, в котором PA+AQ=1.
Найдите сумму углов, под которыми виден отрезок PQ из вершин B, C, D, E, F, G, H, I, J.
В. Произволов

Задача 3.(4)
Дан равносторонний треугольник ABC. Найти геометрическое место точек P таких, что отрезки прямых AP и BP, лежащие внутри треугольника, равны.
Фольклор

Задача 4.(5)
Может ли быть простым число a+b+c+d, если a, b, c и d - целые положительные числа и ab=cd?
Фольклор

Задача 5.(8)
Есть 4 равных прямоугольных треугольника. Разрешается любой разрезать на два по высоте, опущенной на гипотенузу. С полученными треугольниками можно повторять эту операцию.
Докажите, что после любого числа таких операций среди треугольников найдутся равные.
А.В. Шаповалов

Задача 6.(8)
Может ли случиться, что 6 попарно непересекающихся параллелепипедов расположены в пространстве так, что из некоторой им не принадлежащей точки пространства не видно ни одной из их вершин? (Параллелепипеды непрозрачны.)
В. Произволов, С. Маркелов, А. Я. Канель-Белов

Задача 7.
Геологи взяли в экспедицию 80 банок консервов, веса которых все известны и различны (имеется список). Через некоторое время надписи на консервах стали нечитаемыми, и только завхоз знает, где что. Он может это всем доказать (то есть обосновать, что в какой банке находится), не вскрывая консервов и пользуясь только сохранившимся списком и двухчашечными весами со стрелкой, показывающей разницу весов.
Докажите, что для этой цели ему
а)(4) достаточно четырёх взвешиваний и
б)(4) недостаточно трёх.
А.К. Толпыго

Весенний тур

Тренировочный вариант

(10-11 кл., 16, весна)

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(3)
На отрезке [0,1] числовой оси расположены четыре точки: a, b, c, d.
Докажите, что найдётся точка x, принадлежащая [0,1], такая, что
$(1/|x-a|)+(1/|x-b|)+(1/|x-c|)+(1/|x-d|)<40$.
Л. Курляндчик

Задача 2.
Четыре кузнечика сидели в вершинах квадрата. Каждую секунду один из кузнечиков прыгает через другого в симметричную точку (если A прыгает через B в точку A_1, то векторы $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA_1}$ равны).
Докажите, что три кузнечика не могут оказаться
а)(3) на одной прямой, параллельной стороне квадрата;
б)(3) на одной произвольной прямой.
А. Ковальджи

Задача 3.
Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Прямые AC и BC вторично пересекают описанную окружность треугольника AOB в точках E и K.
Докажите, что прямые OC и EK перпендикулярны.
С. Маркелов

Задача 4.(4)
Докажите, что число a0...09 - не полный квадрат (при любом числе нулей, начиная с одного; a - цифра, отличная от 0).
В. Сендеров

Весенний тур

Основной вариант

(10-11 кл., 16, весна, 12.03.1995)

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(4)
Существует ли такая сфера, на которой имеется ровно одна рациональная точка? (Рациональная точка - точка, у которой все три декартовы координаты - рациональные числа.)
А. Рубин

Задача 2.(4)
При каких n можно раскрасить в три цвета все ребра n-угольной призмы (основания - n-угольники) так, что в каждой вершине сходятся все три цвета и у каждой грани (включая основания) есть стороны всех трёх цветов?
А.В. Шаповалов

Задача 3.(5)
На боковых сторонах трапеции как на диаметрах построены окружности.
Докажите, что все четыре касательные, проведенные к окружностям из точки пересечения диагоналей, равны между собой (если эта точка лежит вне окружностей).
С. Маркелов

Задача 4.(6)
На координатной плоскости отмечены некоторые точки с целыми координатами. Дано, что никакие четыре из них не лежат на одной окружности.
Докажите, что найдётся круг радиуса 1995, в котором не отмечено ни одной точки.
А.В. Шаповалов

Задача 5.
а)(3) Разбейте отрезок [0,1] на черные и белые интервалы так, чтобы для любого многочлена p(x) степени не выше второй сумма приращений p(x) по всем чёрным интервалам равнялась сумме приращений p(x) по всем белым интервалам. (Приращением p(x) по интервалу (a,b) называется число p(b)-p(a)).
б)(4) Удастся ли проделать аналогичную операцию для всех многочленов степени не выше 1995?
Г. В. Кондаков

Задача 6.(8)
Существует ли такой невыпуклый многогранник, что из некоторой точки M, лежащей вне него, не видна ни одна из его вершин? (Многогранник сделан из непрозрачного материала, так что сквозь него ничего не видно.)
А.Я. Канель-Белов, С. Маркелов

Задача 7.(10)
Докажите, что среди 50 человек найдутся двое, у которых чётное число общих знакомых (быть может, 0) среди остальных 48 человек.
С.И. Токарев

Семнадцатый Турнир, 1995-1996

СЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1995 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
На плоскости расположен квадрат, и невидимыми чернилами нанесена точка P. Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он отвечает на вопрос, по какую сторону от неё лежит P (если P лежит на прямой, то он говорит, что P лежит на прямой).
Какое наименьшее число таких вопросов необходимо задать, чтобы узнать, лежит ли точка P внутри квадрата?
А. Я. Канель-Белов

Задача 2.(3)
Существуют ли 100 натуральных чисел таких, что их сумма равна их наименьшему общему кратному?
(Среди чисел могут быть равные.)
С. Токарев

Задача 3.(3)
Прямоугольник ABCD площади 1 сложили по прямой так, что точка C совпала с A.
Докажите, что площадь получившегося пятиугольника меньше 3/4.
Фольклор

Задача 4.(5)
Через вершину A остроугольного треугольника ABC проведены биссектрисы AM и AN внутреннего и внешнего углов и касательная AK к описанной окружности треугольника ABC (точки M, K, N лежат на прямой BC).
Докажите, что MK=KN.
И. Шарыгин

СЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 22 октября 1995 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(5)
Докажите, что внутри остроугольного треугольника существует такая точка, что основания перпендикуляров, опущенных из неё на стороны, являются вершинами равностороннего треугольника.
Н. Васильев

Задача 2.(5)
Последовательность определяется так: первые её члены - 1, 2, 3, 4, 5. Далее каждый следующий (начиная с 6-го) равен произведению всех предыдущих членов минус 1.
Докажите, что сумма квадратов первых 70 членов последовательности равна их произведению.
Л. Курляндчик

Задача 3.(5)
AK - биссектриса треугольника ABC, P и Q - точки на двух других биссектрисах (или их продолжениях) такие, что PA=PK, QA=QK.
Докажите, что $\angle PAQ= 90^{\circ}-(1/2)\angle A$.
Фольклор

Задача 4.(3+3)
В компанию из N человек пришел журналист. Ему известно, что в этой компании есть человек Z, который знает всех остальных членов компании, но его не знает никто. Журналист может к каждому члену компании обратиться с вопросом: "Знаете ли вы такого-то?"
а)(3) Может ли журналист установить, кто из компании есть Z, задав меньше, чем N таких вопросов?
б)(3) Найдите наименьшее количество вопросов, достаточное для того, чтобы наверняка найти Z, и докажите, что меньшим числом вопросов обойтись нельзя.
(Все отвечают на вопросы правдиво. Одному человеку можно задавать несколько вопросов.)
Г. Гальперин

Задача 5.(5+2)
а)(2) Существуют ли два равных семиугольника, все вершины которых совпадают, но никакие стороны не совпадают?
б)(5) А три таких семиугольника?
(Напоминание: многоугольник на плоскости ограничен несамопересекающейся замкнутой ломаной.)
В. Произволов

Задача 6.(4+5)
Есть доска 1*1000, вначале пустая, и куча из n фишек. Двое ходят по очереди. Первый своим ходом "выставляет" на доску не более 17 фишек по одной на любое свободное поле (он может взять все 17 из кучи, а может часть - из кучи, а часть - переставить на доске). Второй снимает с доски любую серию фишек (серия - это несколько фишек, стоящих подряд, то есть без свободных полей между ними), и кладёт их обратно в кучу. Первый выигрывает, если ему удастся выставить все(!) фишки в ряд без пробелов.
а)(4) Докажите, что при n=98 первый всегда может выиграть.
б)(5) При каком наибольшем n первый всегда может выиграть?
А. Шаповалов

СЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1995 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
На плоскости расположен квадрат, и невидимыми чернилами нанесена точка P. Человек в специальных очках видит точку. Если провести прямую, то он отвечает на вопрос, по какую сторону от неё лежит P (если P лежит на прямой, то он говорит, что P лежит на прямой).
Какое наименьшее число таких вопросов необходимо задать, чтобы узнать, лежит ли точка P внутри квадрата?
Фольклор

Задача 2.(2+2)
а)(2) Существуют ли четыре таких различных натуральных числа, что сумма любых трёх из них есть простое число?
б)(2) Существуют ли пять таких различных натуральных чисел, что сумма любых трёх из них есть простое число?
В. Сендеров

Задача 3.(3)
Шестизначное число начинается с цифры 5.
Верно ли, что к нему всегда можно приписать справа 6 цифр так, чтобы получился полный квадрат?
А. Толпыго

Задача 4.(5)
На плоскости даны три точки A, B, C.
Через точку C проведите прямую так, чтобы произведение расстояний от этой прямой до A и B было максимальным. Всегда ли такая прямая единственна?
Н. Васильев

СЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 22 октября 1995 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(3+2)
Внутри выпуклого четырехугольника ABCD расположена точка P. Строятся биссектрисы PK, PL, PM и PN углов APB, BPC, CPD и DPA соответственно.
а)(3) Найдите хотя бы одну такую точку P, при которой четырёхугольник KLMN - параллелограмм.
б)(2) Найдите все такие точки.
С. Токарев

Задача 2.(5)
Дано n чисел, p - их произведение. Разность между p и каждым из этих чисел - нечётное целое число. Докажите, что все данные n чисел иррациональны.
Г. Гальперин

Задача 3.(5)
Прямоугольник разбит на прямоугольные треугольники, граничащие друг с другом только по целым сторонам, так, что общая сторона двух треугольников всегда служит катетом одного и гипотенузой другого.
Докажите, что отношение большей стороны прямоугольника к меньшей не менее 2.
А. Шаповалов

Задача 4.(6)
Кресла для зрителей вдоль лыжной трассы занумерованы по порядку: 1, 2, 3, ..., 1000. Кассирша продала n билетов на все первые 100 мест, но n больше 100, так как на некоторые места она продала больше одного билета (при этом $n<1000$). Зрители входят на трассу по одному.Каждый, подойдя к своему месту, занимает его, если оно свободно, если же занято, говорит "Ох!", идёт в сторону роста номеров до первого свободного места и занимает его. Каждый раз, обнаружив очередное место занятым, он говорит "Ох!".
Докажите, что все рассядутся и что число "охов" не зависит от того, в каком порядке зрители выходят на трассу.
А. Шень

Задача 5.(7)
На берегу круглого озера растут 6 сосен. Известно, что если взять такие два треугольника, что вершины одного совпадают с тремя из сосен, а вершины другого - с тремя другими, то в середине отрезка, соединяющего точки пересечения высот этих треугольников, на дне озера находится клад. Неизвестно только, как нужно разбить данные шесть точек на две тройки.
Сколько раз придётся опуститься на дно озера, чтобы наверняка отыскать клад?
С. Маркелов

Задача 6.(3+4+2)
Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия
а)(3) из 11,
б)(4) из 10000,
в)(2) из бесконечного числа натуральных чисел,
такая что последовательность сумм цифр её членов - также возрастающая арифметическая прогрессия?
А. Шаповалов

СЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1996 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(2)
Наибольший угол остроугольного треугольника в пять раз больше наименьшего.
Найдите углы этого треугольника, если известно, что все они выражаются целым числом градусов.
Г. Гальперин

Задача 2.(2+2)
Существует ли число n такое, что числа
а)(2) n-96, n, n+96;
б)(2) n-1996, n, n+1996
простые? (Все простые числа положительные.)
В. Сендеров

Задача 3.(4)
Под каким углом видна из вершины прямого угла прямоугольного треугольника проекция на гипотенузу вписанной окружности?
М. Евдокимов

Задача 4.(3+3)
Рассматриваются всевозможные шестизвенные замкнутые ломаные, все вершины которых лежат на окружности.
а)(3) Нарисуйте такую ломаную, которая имеет наибольшее возможное число точек самопересечения.
б)(3) Докажите, что большего числа самопересечений такая ломаная не может иметь.
Н. Васильев

Задача 5.(3+3)
Двое играют в крестики-нолики на доске 10*10 по следующим правилам. Сначала они заполняют крестиками и ноликами всю доску, ставя их по очереди (начинающий игру ставит крестики, его партнер - нолики). Затем подсчитываются два числа: К - число пятерок подряд стоящих крестиков и, аналогично, Н - число пятерок подряд стоящих ноликов. (Считаются пятерки, стоящие по горизонтали, по вертикали и параллельно диагонали; если подряд стоят шесть крестиков, то это даёт две пятерки, если семь, то три и т. д.) Число К-Н считается выигрышем первого игрока (проигрышем второго).
а)(3) Существует ли у первого игрока беспроигрышная стратегия?
б)(3) Существует ли у него выигрышная стратегия?
(Стратегия - это алгоритм игры, приводящий к цели при любой игре противника.)
А. Канель-Белов

СЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 3 марта 1996 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(3)
Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2-ab=c^2$.
Докажите, что $(a-c)(b-c)\leq 0$.
А. Егоров

Задача 2.(3)
Заданы две непересекающиеся окружности с центрами O_1 и O_2 и их общая внешняя касательная, касающаяся окружностей соответственно в точках A_1 и A_2. Пусть B_1 и B_2 - точки пересечения отрезка O_1O_2 с соответствующими окружностями, а C - точка пересечения прямых A_1B_1 и A_1B_1. Докажите, что прямая, проведенная через точку C перпендикулярно B_1B_2, делит отрезок A_1A_2 пополам.
Фольклор

Задача 3.(3)
В ряд выписаны действительные числа a_1, a_2, a_3, ..., a_{1996}.
Докажите, что можно выделить одно или несколько стоящих рядом чисел так, что их сумма будет отличаться от целого числа меньше, чем на 0,001.
А. Канель-Белов

Задача 4.(5)
В углу прямоугольной клетчатой доски размером m*n стоит ладья. Двое поочередно передвигают её по вертикали или по горизонтали на любое число полей; при этом не разрешается, чтобы ладья стала на поле или прошла через поле, на котором она уже побывала (или через которое уже проходила). Проигравшим считается тот, кому некуда ходить. Кто из играющих может обеспечить себе победу: начинающий или его партнер, и как ему следует играть?
Б. Бегун

Задача 5.(3+3)
а)(3) 8 учеников решали 8 задач. Оказалось, что каждую задачу решили 5 учеников. Докажите, что найдутся такие два ученика, что каждую задачу решил хотя бы один из них.
б)(3) Если каждую задачу решило 4 ученика, то может оказаться, что таких двоих не найдётся. Докажите это.
С. Токарев

Задача 6.(3+5)
В равностороннем треугольнике ABC на стороне AB взята точка D так, что AD=AB/n.
Докажите,что сумма n-1 углов, под которыми виден отрезок AD из точек, делящих сторону BC на n равных частей, равна 30^o:
а)(3) при n = 3;
б)(5) при произвольном n.
В. Произволов

СЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1996 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Сто человек ответили на вопрос: "Будет ли новый президент лучше прежнего?" Из них a человек считают, что будет лучше, b - что будет такой же, и c - что будет хуже. Социологи построили два показателя "оптимизма" опрошенных: m=a+b/2 и n=a-c. Оказалось, что m=40.
Найдите n.
А. Ковальджи

Задача 2.(3)
Девять цифр: 1, 2, 3, ..., 9 выписаны в некотором порядке (так что получилось 9-значное число). Рассмотрим все тройки цифр, идущих подряд, и найдём сумму соответствующих семи трехзначных чисел.
Каково наибольшее возможное значение этой суммы?
А. Галочкин

Задача 3.(4)
Рассмотрим произведение ста сомножителей: 1!, 2!, 3!, ..., 100!.
Можно ли выбросить один из этих сомножителей, чтобы произведение оставшихся было полным квадратом?
(Через n! обозначается произведение 1*2*3*...*n.)
С. Токарев

Задача 4.(4)
Можно ли разбить все пространство на правильные тетраэдры и правильные октаэдры? (Грани этих многогранников - правильные треугольники; у тетраэдра их 4, у октаэдра - 8.)
А. Канель-Белов

Задача 5.(5)
На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты ABMN, BCKL, ACPQ. На отрезках NQ и PK построены квадраты NQZT и PKXY. Разность площадей квадратов ABMN и BCKL равна d.
Найдите разность площадей квадратов NQZT и PKXY
а)(3) в случае, если угол ABC прямой,
б)(2) в общем случае.
А. Герко

СЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 3 марта 1996 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(4)
Существует ли в пространстве куб, расстояния от вершин которого до данной плоскости равны 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?
В. Произволов

Задача 2.
Кузнечик вначале сидит в точке M плоскости 0xy вне квадрата $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ (координаты M - нецелые, расстояние от M до центра квадрата равно d). Кузнечик прыгает в точку, симметричную M относительно самой правой (с точки зрения кузнечика) вершины квадрата.
Докажите, что за несколько таких прыжков кузнечик не сможет удалиться от центра квадрата более чем на 10d.
А. Канель-Белов

Задача 3.(3+4)
В равнобедренном треугольнике ABC (AB=AC) угол A равен α. На стороне AB взята точка D так, что AD=AB/n.
Найдите сумму n-1 углов, под которыми виден отрезок AD из точек, делящих сторону BC на n равных частей:
а)(3) при $n = 3$;
б)(4) при произвольном n.
В. Произволов

Задача 4.(6)
В некотором государстве человек может быть зачислен в полицию только в том случае, если он выше ростом, чем 80% (или больше) его соседей. Чтобы доказать свое право на зачисление в полицию, человек сам называет число R (радиус), после чего его "соседями" считаются все, кто живёт на расстоянии меньше R от него (число соседей, разумеется, должно быть не нулевое). В этом же государстве человек освобождается от службы в армии только в том случае, если он ниже ростом, чем 80% (или больше) его соседей. Определение "соседей" аналогично; человек сам называет число r (радиус) и т. д., причём R и r не обязательно совпадают. Может ли случиться, что не менее 90% населения имеют право на зачисление в полицию и одновременно не менее 90% населения освобождены от армии?
(Каждый человек проживает в определенной точке плоскости.)
Н. Константинов

Задача 5.(3+5)
Докажите, что существует бесконечно много троек чисел n-1, n, n+1 таких, что:
а)(3) n представимо в виде суммы двух квадратов натуральных (целых положительных) чисел, а n-1 и n+1 - нет;
б)(5) каждое из трёх чисел представимо в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.
В. Сендеров

Задача 6.(4+5)
В таблице из n столбцов и 2^n строк, в которых выписаны все возможные различные наборы из n чисел 1 и -1, некоторые числа заменены нулями.
Докажите, что можно выбрать некоторое непустое подмножество строк так, что:
а) сумма всех чисел в выбранных строках равна 0;
б) сумма всех выбранных строк есть нулевая строка.
(Строки складываются покоординатно как векторы.)
Г. Кондаков, В. Черноруцкий

Восемнадцатый Турнир, 1996-1997

ВОСЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1996 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Можно ли найти 10 таких последовательных натуральных чисел, что сумма их квадратов равна сумме квадратов следующих за ними 9 последовательных натуральных чисел?
Задача с картинки из старого учебника

Задача 2.(3)
При каких целых значениях n правильный треугольник со стороной n можно замостить плитками, имеющими форму равнобочной трапеции со сторонами 1, 1, 1, 2?
Н. Васильев

Задача 3.(2+2)
а)(2) Может ли случиться, что в компании из 10 девочек и 9 мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики - с одним и тем же числом девочек?
б)(2) А если девочек 11, а мальчиков 10?
Н. Васильев

Задача 4.(4)
Окружность пересекает каждую сторону ромба в двух точках и делит её на три отрезка. Обойдём контур ромба, начав с какой-нибудь вершины, по часовой стрелке, и покрасим три отрезка каждой стороны последовательно в красный, белый и синий цвета.
Докажите, что сумма (длин - *добавлено редактором*) красных отрезков равна сумме (длин) синих.
В. Произволов

ВОСЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 20 октября 1996 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(3)
Можно ли нарисовать на плоскости четыре красных и четыре чёрных точки так, чтобы для любой тройки точек одного цвета нашлась точка другого цвета такая, что эти четыре точки являются вершинами параллелограмма?
Н. Васильев

Задача 2.(2+2)
Существуют ли три различных простых числа p, q, r таких, что p^2+d делится на qr, q^2+d делится на rp, r^2+d делится на pq, если
а)(2) d=10,
б)(2) d=11?
В. Сендеров

Задача 3.(5)
Докажите неравенство:

$$\frac{2}{2!}+\frac{7}{3!}+\frac{14}{4!}+\frac{23}{5!}+\ldots+\frac{k^2-2}{k!}+\ldots+\frac{9998}{100!}<3$$

В. Сендеров

Задача 4.(2+4)
а)(2) Квадрат разрезан на равные прямоугольные треугольники с катетами 3 и 4 каждый. Докажите, что число треугольников чётно.
б)(4) Прямоугольник разрезан на равные прямоугольные треугольники с катетами 1 и 2 каждый. Докажите, что число треугольников чётно.
А. Шаповалов

Задача 5.(8)
Существует ли 6-значное число A такое, что среди чисел A, 2A, ..., 500000A нет ни одного числа, оканчивающегося шестью одинаковыми цифрами?
С. Токарев

Задача 6.(5+5)
Карточка матлото представляет собой таблицу 6*6 клеточек. Играющий отмечает 6 клеточек и отправляет карточку в конверте. После этого в газете публикуется шестёрка проигрышных клеточек. Докажите, что
а)(5) можно заполнить 9 карточек так, чтобы среди них обязательно нашлась "выигрышная" карточка - такая, в которой не отмечена ни одна проигрышная клеточка;
б)(5) восьми карточек для этого недостаточно.
С. Токарев

ВОСЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1996 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(3) Найдите геометрическое место точек, лежащих внутри куба и равноудаленных от трёх скрещивающихся ребер a, b, c этого куба.
В. Произволов

Задача 2.(3)
Можно ли бумажный круг с помощью ножниц перекроить в квадрат той же площади? (Разрешается сделать конечное число разрезов по прямым линиям и дугам окружностей.)
А. Канель-Белов

Задача 3.(4)
На координатной плоскости x0y построена парабола $y=x^2$. Затем начало координат и оси стёрли. Как их восстановить с помощью циркуля и линейки (используя имеющуюся параболу)?
А. Егоров

Задача 4.(4)
При каком $n>1$ может случиться так, что в компании из $n+1$ девочек и n мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики - с одним и тем же числом девочек?
Н. Васильев

ВОСЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 20 октября 1996 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(3)
Можно ли покрасить 4 вершины куба в красный цвет и 4 другие - в синий так, чтобы плоскость, проходящая через любые три точки одного цвета, содержала точку другого цвета?
А. Мёбиус, И. Шарыгин

Задача 2.(3)
а)(3) Докажите для всех n>2 неравенство:

$$3 - \frac{2}{(n-1)!} < \frac{2^2-2}{2!} + \frac{3^2-3}{3!} + \ldots + \frac{n^2-2}{n!} < 3$$

б)(3) Найдите какие-нибудь натуральные числа a, b, c такие, что для всех n>2

$$b - \frac{c}{(n-2)!} < \frac{2^3-a}{2!} + \frac{3^3-a}{3!} + \ldots + \frac{n^3-a}{n!} < b$$

В. Сендеров, Н. Васильев

Задача 3.(5)
Пусть A', B', C', D', E', F' - середины сторон AB, BC, CD, DE, EF, FA произвольного выпуклого шестиугольника ABCDEF. Известны площади треугольников ABC', BCD', CDE', DEF', EFA', FAB'. Найдите площадь шестиугольника ABCDEF.
А. Лопшиц, Н. Васильев

Задача 4.(10)
Докажите, что не существует никакой (даже разрывной) функции $y=f(x)$, что $f(f(x))=x^2-1996$ при всех x.
С. Богатый, М. Смуров

Задача 5.(4+6)
а)(4) Четыре порта 1, 2, 3, 4 расположены (в этом порядке) на окружности круглого острова. Их связывает плоская сеть дорог, на которых могут быть перекрёстки, то есть точки, где пересекаются, сходятся или разветвляются дороги. На всех участках дорог введено одностороннее движение так, что, выехав от любого порта или перекрёстка, нельзя вернуться в него снова.
Пусть f_{ij} означает число различных путей, идущих из порта i в порт j.
Докажите неравенство: $f_{14}f_{23} \geq f_{13}f_{24}$.
б)(6) Докажите, что если портов шесть: 1, 2, 3, 4, 5, 6 (по кругу в этом порядке), то
$f_{16}f_{25}f_{34}+ f_{15}f_{24}f_{36}+ f_{14}f_{26}f_{35} \geq f_{16}f_{24}f_{35}+ f_{15}f_{26}f_{34}+ f_{14}f_{25}f_{36}$
С. Фомин

Задача 6.(5+5)
Карточка матлото представляет собой таблицу 10*10 клеточек. Играющий отмечает 10 клеточек и отправляет карточку в конверте. После этого в газете публикуется десятка проигрышных клеточек. Докажите, что
а)(5) можно заполнить 13 карточек так, чтобы среди них обязательно нашлась "выигрышная" карточка - такая, в которой не отмечена ни одна проигрышная клеточка;
б)(5) двенадцати карточек для этого недостаточно.
С. Токарев

ВОСЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1997 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Сколько целых чисел от 1 до 1997 имеют сумму цифр, делящуюся на 5?
А. Галочкин

Задача 2.(3)
Барон Мюнхаузен утверждает, что пустил шар от борта бильярда, имеющего форму правильного треугольника, так, что тот, отражаясь от бортов, прошёл через некоторую точку три раза в трёх различных направлениях и вернулся в исходную точку. Могут ли слова барона быть правдой? (Отражение шара от борта происходит по закону "угол падения равен углу отражения".)
М. Евдокимов

Задача 3.(4)
F - выпуклая фигура с двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии. Через точку M, лежащую внутри фигуры и отстоящую от осей на расстояния a и b, провели прямые, параллельные осям. Эти прямые делят F на четыре области.
Найдите разность между суммой площадей большей и меньшей из областей и суммой площадей двух других.
Г. Гальперин, Н. Васильев

Задача 4.(4)
Квадрат разрезали на 25 квадратиков, из которых ровно у одного сторона имеет длину, отличную от 1 (у каждого из остальных сторона равна 1).
Найдите площадь исходного квадрата.
В. Произволов

Задача 5.(4)
В параллелограмме ABCD точка E - середина AD. Точка F - основание перпендикуляра, опущенного из B на прямую CE.
Докажите, что треугольник ABF равнобедренный.
М. А. Волчкевич

ВОСЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 2 марта 1997 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(3)
В треугольнике одна сторона в три раза меньше суммы двух других.
Докажите, что против этой стороны лежит наименьший угол треугольника.
А. Толпыго

Задача 2.(5)
Имеется 25 кусков сыра разного веса. Всегда ли можно один из этих кусков разрезать на две части и разложить сыр в два пакета так, что части разрезанного куска окажутся в разных пакетах, веса пакетов будут одинаковы и число кусков в пакетах также будет одинаково?
В. Л. Дольников

Задача 3.(5)
2n шахматистов дважды сыграли полный шахматный турнир, где каждый сыграл с каждым (за выигрыш даётся 1 очко, за проигрыш - 0, за ничью - 1/2 очка). Оказалось, что во втором турнире сумма очков каждого игрока изменилась не меньше, чем на n.
Докажите, что она изменилась ровно на n.
Б. Френкин

Задача 4.(6)
В выпуклом шестиугольнике AC'BA'CB': AB'=AC', BC'=BA', CA'=CB', и $\angle A+\angle B+\angle C=\angle A'+\angle B'+\angle C'$.
Докажите, что площадь треугольника ABC равна половине площади шестиугольника.
В. Произволов

Задача 5.(4+4)
Докажите, что число
а)(4) 97^{97},
б)(4) 1997^{17}
нельзя представить в виде суммы кубов нескольких идущих подряд натуральных чисел.
А. А. Егоров

Задача 6.(7)
P - внутренняя точка равнобедренного треугольника ABC (AB=BC). $\angle ABC=80^o$, $\angle PAC=40^o$, $\angle ACP=30^o$.
Найдите $\angle BPC$.
Г. Гальперин

Задача 7.(5+4)
Имеется набор гирь, веса которых в граммах: 1, 2, 4,... , 512 (последовательные степени двойки) - по одной гире каждого веса. Груз разрешается взвешивать с помощью этого набора, кладя гири на обе чашки весов.
а)(5) Докажите, что никакой груз нельзя взвесить этими гирями более чем 89 способами.
б)(4) Приведите пример груза, который можно взвесить ровно 89 способами.
А. Шаповалов, А. Кулаков

ВОСЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1997 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(3)
Куб разрезали на 99 кубиков, из которых ровно у одного ребро имеет длину, отличную от 1 (у каждого из остальных ребро равно 1).
Найдите объём исходного куба.
В. Произволов

Задача 2.(3)
a и b - натуральные числа. Известно, что a^2+b^2 делится на ab.
Докажите, что a=b.
Б. Френкин

Задача 3.(4)
Центр круга - точка с декартовыми координатами (a,b). Известно, что начало координат лежит внутри круга. Обозначим через S^+ общую площадь тех частей круга, в которых координаты точек имеют одинаковый знак; через S^- - противоположный знак.
Найдите величину S^+-S^-.
Г. Гальперин

Задача 4.(4)
Около правильного тетраэдра ABCD описана сфера. На его гранях как на основаниях построены во внешнюю сторону правильные пирамиды ABCD', ABDC', ACDB', BCDA', вершины которых лежат на этой сфере.
Найдите угол между плоскостями ABC' и ACD'.
А. Заславский

Задача 5.(4)
Играют двое, ходят по очереди. Первый ставит на плоскости красную точку, второй в ответ ставит на свободные места 10 синих точек. Затем опять первый ставит на свободное место красную точку, второй ставит на свободные места 10 синих, и т. д. Первый считается выигравшим, если какие-то три красные точки образуют правильный треугольник.
Может ли второй ему помешать?
А. Я. Канель-Белов

ВОСЕМНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 2 марта 1997 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(4)
Имеется 25 кусков сыра разного веса. Всегда ли можно один из этих кусков разрезать на две части и разложить сыр в два пакета так, что части разрезанного куска окажутся в разных пакетах, веса пакетов будут одинаковы и число кусков в пакетах также будет одинаково?
В. Л. Дольников

Задача 2.(5)
В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE. Известно, что DE - биссектриса угла ADC. Найдите величину угла $\angle A$.
С. И. Токарев

Задача 3.(3+3)
Имеется набор из 20 гирь, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 до 1997 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес - на другую). Каков минимально возможный вес самой тяжелой гири такого набора, если:
а)(3) веса гирь набора все целые,
б)(3) веса не обязательно целые?
М. Разин

Задача 4.(6+2)
Контуры выпуклых многоугольников F и G не имеют общих точек, причём G расположен внутри F. Хорду многоугольника F - отрезок, соединяющий две точки контура F, назовём опорной для G, если она пересекается с G только по точкам контура: содержит либо только вершину, либо сторону G.
а)(6) Докажите, что найдётся опорная хорда, середина которой принадлежит контуру G.
б)(2)Докажите, что найдутся две такие хорды.
П. Пушкарь, Дольников

Задача 5.(8)
Положительные числа a, b, c таковы, что abc=1.
Докажите неравенство:
$1/(1+a+b) + 1/(1+b+c) + 1/(1+c+a) \leq 1$.
Г. Гальперин

Задача 6.(8)
Пусть $1+x+x^2+...+x^{n-1}=F(x)G(x)$, где F и G - многочлены, коэффициенты которых - нули и единицы ($n>1$).
Докажите, что один из многочленов F, G представим в виде $(1+x+x^2+...+x^{k-1})T(x)$, где T(x) - также многочлен с коэффициентами 0 и 1 ($k>1$).
В. Сендеров, М. Вялый

Задача 7.(8)
На плоскости дано конечное число полосок, суммарная ширина которых равна 100, и круг радиуса 1. Докажите, что каждую из полосок можно параллельно перенести так, чтобы все они покрывали круг. (Полоска - часть плоскости, заключённая между двумя параллельными прямыми. - *примечание редактора*)
М. Смуров

Девятнадцатый Турнир, 1997-1998

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1997 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(3)
По неподвижному эскалатору человек спускается быстрее, чем поднимается.
Что быстрее: спуститься и подняться по поднимающемуся эскалатору или спуститься и подняться по спускающемуся эскалатору? (Предполагается, что все скорости, о которых идет речь, постоянны, причём скорости эскалатора при движении вверх и вниз одинаковы, а скорость человека относительно эскалатора всегда больше скорости эскалатора.)
Фольклор

Задача 2.(3)
Докажите, что уравнение $x^2+y^2-z^2=1997$ имеет бесконечно много решений в целых числах.
Н. Васильев

Задача 3.(4)
В квадрате ABCD точки K и M принадлежат сторонам BC и CD соответственно, причём AM - биссектриса угла KAD.
Докажите, что длина отрезка AK равна сумме длин отрезков DM и BK.
Фольклор

Задача 4.
а)(2) Каким наименьшим числом прямых можно разрезать все клетки шахматной доски 3*3? Нарисуйте такие прямые и докажите, что меньшим числом прямых обойтись нельзя. (Чтобы клетка была разрезана, прямая должна проходить через внутреннюю точку этой клетки.)
б)(4) Та же задача для доски 4*4.
М. Вялый

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 26 октября 1997 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(3)
Последовательность $\{x_n\}$ определяется условиями:
$x_1=19$; $x_2=97$; $x_{n+2}=x_n-(1/x_{n+1})$.
Докажите, что среди членов последовательности найдётся ноль. Найдите номер этогочлена.
А. Берзиньш

Задача 2.(3)
M - середина основания BC треугольника ABC.
Постройте прямую l, пересекающую треугольник и параллельную его основанию, такую, что её отрезок, заключенный внутри треугольника, виден из точки M под прямым углом.
Фольклор

Задача 3.(5)
Первоначально на каждом поле доски 1*n стоит шашка. Первым ходом разрешается переставить любую шашку на соседнюю клетку (одну из двух, если шашка не с краю), так что образуется столбик из двух шашек. Далее очередным ходом каждый столбик можно передвинуть в любую сторону на столько клеток, сколько в нём шашек (в пределах доски); если столбик попал на непустую клетку, он ставится на стоящий там столбик и объединяется с ним.
Докажите, что за n-1 ход можно собрать все шашки на одной клетке.
А. Шаповалов

Задача 4.(5)
Две окружности пересекаются в точках A и B. К ним проведена общая касательная, которая касается первой окружности в точке C, а второй - в точке D. Пусть B - ближайшая точка к прямой CD. Прямая CB пересекла вторую окружность второй раз в точке E.
Докажите, что AD - биссектриса угла CAE.
П. Кожевников

Задача 5.(8)
Раскрашенный в чёрный и белый цвета кубик с гранью в одну клетку поставили на одну из клеток шахматной доски и прокатили по ней так, что кубик побывал на каждой клетке ровно по одному разу.
Можно ли так раскрасить кубик и так прокатить его по доске, чтобы каждый раз цвета клетки и соприкоснувшейся с ней грани совпадали?
А. Шаповалов

Задача 6.(9)
Каждая сторона правильного треугольника разбита на 10 равных отрезков, и через все точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. Данный треугольник разбился на 100 маленьких треугольников-клеток. Треугольники, расположенные между двумя соседними параллельными прямыми, образуют полоску.
Какое максимальное число клеток можно отметить, чтобы никакие две отмеченные клетки не принадлежали одной полоске ни по одному из трёх направлений?
Р. Женодаров

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 1997 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(2+3)
а)(2) Каким наименьшим числом прямых можно разрезать все клетки шахматной доски 3*3? Нарисуйте такие прямые и докажите, что меньшим числом прямых обойтись нельзя. (Чтобы клетка была разрезана, прямая должна проходить через внутреннюю точку этой клетки.)
б)(3) Та же задача для доски 4*4.
М. Вялый

Задача 2.(3)
a и b - две данные стороны треугольника.
Как подобрать третью сторону c так, чтобы точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной c делили эту сторону на три равных отрезка? При каких a и b такая сторона c существует? (Рассматривается вневписанная окружность, касающаяся стороны c и продолжений сторон a и b.)
Фольклор

Задача 3.(4)
Докажите, что уравнение
$xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)=6$
имеет бесконечно много решений в целых числах.
Н. Васильев

Задача 4.(4)
На шахматной доске 5*5 расставили максимальное число коней так, чтобы они не били друг друга. Докажите, что такая расстановка - единственная.
А. Канель-Белов

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Осенний тур 26 октября 1997 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(4)
CM и BN - медианы треугольника ABC, P и Q - точки соответственно на AB и AC такие, что биссектриса угла C треугольника одновременно является биссектрисой угла MCP, а биссектриса угла B - биссектрисой угла NBQ. Оказалось, что AP=AQ. Следует ли из этого, что треугольник ABC равнобедренный?
В. Сендеров

Задача 2.(1+2+4)
Верны ли утверждения:
а)(1) Если многоугольник можно разбить ломаной на два равных многоугольника, то его можно разбить отрезком на два равных многоугольника.
б)(2) Если выпуклый многоугольник можно разбить ломаной на два равных многоугольника, то его можно разбить отрезком на два равных многоугольника.
в)(4) Если выпуклый многоугольник можно разбить ломаной на два многоугольника, которые можно перевести друг в друга с помощью движения, сохраняющего ориентацию (то есть с помощью поворота и параллельного переноса), то его можно разбить отрезком на два многоугольника, которые можно перевести друг в друга с помощью движения, сохраняющего ориентацию.
С. Маркелов

Задача 3.(3+3)
Перемножаются все выражения вида
$\pm 1^{1/2} \pm 2^{1/2} \pm \ldots \pm 99^{1/2} \pm 100^{1/2}$
(при всевозможных комбинациях знаков). Докажите, что результат
а)(3) целое число,
б)(3) квадрат целого числа.
А. Канель-Белов

Задача 4.(4+4)
а)(4) На стол положили (с перекрытиями) несколько одинаковых салфеток, имеющих форму правильного 6-угольника, причём у всех салфеток одна сторона параллельна одной и той же прямой.
Всегда ли можно вбить в стол несколько гвоздей так, что все салфетки будут прибиты, причём каждая - только одним гвоздём?
б)(4) Тот же вопрос про правильные 5-угольники.
А. Канель-Белов

Задача 5.(8)
Дима придумал секретный шифр: каждая буква заменяется на слово длиной не больше 10 букв. Шифр называется хорошим, если всякое зашифрованное слово расшифровывается однозначно. Серёжа убедился (с помощью компьютера), что если зашифровать слово длиной не больше 10000 букв, то результат расшифровывается однозначно.
Следует ли из этого, что шифр хороший? (В алфавите 33 буквы, под "словом" мы понимаем любую последовательность букв, независимо от того, имеет ли она смысл.)
Д. Пионтковский, С. Шалунов

Задача 6.(7+7)
Каждая сторона правильного треугольника разбита на n равных отрезков, и через все точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. Данный треугольник разбился на n^2 маленьких треугольников-клеток. Треугольники, расположенные между двумя соседними параллельными прямыми, образуют полоску.
а)(7) Какое наибольшее число клеток можно отметить, чтобы никакие две отмеченные клетки не принадлежали одной полоске ни по одному из трёх направлений, если n=10?
б)(7) Тот же вопрос для n=9.
Р. Женодаров

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1998 г.
8-9 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Аня, Боря и Вася составляли слова из заданных букв. Все составили разное число слов: больше всех - Аня, меньше всех - Вася. Затем ребята просуммировали очки за свои слова. Если слово есть у двух игроков, за него даётся 1 очко, у одного игрока - 2 очка, слова, общие у всех трёх игроков, вычёркиваются
Могло ли так случиться, что больше всех очков набрал Вася, а меньше всех - Аня?
А. Шаповалов

Задача 2.(3)
Шахматный король обошёл всю доску 8*8, побывав на каждой клетке по одному разу, вернувшись последним ходом в исходную клетку.
Докажите, что он сделал чётное число диагональных ходов.
В. Произволов

Задача 3.(3)
AB и CD - отрезки, лежащие на двух сторонах угла (O - вершина угла, A лежит между O и B, C - между O и D). Через середины отрезков AD и BC проведена прямая, пересекающая стороны угла в точках M и N (M, A и B лежат на одной стороне угла; N, C и D - на другой).
Докажите, что OM/ON=AB/CD.
В. Сендеров

Задача 4.(4)
Для каждого трёхзначного числа берём произведение его цифр, а затем эти произведения, вычисленные для всех трёхзначных чисел, складываем.
Сколько получится? (Пояснение: берётся произведение всех цифр трёхзначного числа, так что если хотя бы одна из цифр - ноль, то и произведение - ноль).
Г. Гальперин

Задача 4 (давалась в г. Кирове Кировской обл. вместо предыдущей задачи 4).
Незнайка решал уравнение, в левой части которого стоял многочлен третьей степени с целыми коэффициентами, а в правой - 0. Он нашёл корень 1/7. Знайка, заглянув к нему в тетрадь, увидел только первые два слагаемых многочлена: $19x^3+98x^2$ и сразу сказал, что ответ не верен.
Обоснуйте ответ Знайки.
И. С. Рубанов

Задача 5.(5)
Барон Мюнхгаузен утверждает, что смог разрезать некоторый равнобедренный треугольник на три треугольника так, что из любых двух можно сложить равнобедренный треугольник.
Не хвастает ли барон?
А. Шаповалов

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1 марта 1998 г.
8-9 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Существует ли такой набор из 10 натуральных чисел, что каждое не делится ни на одно из остальных, а квадрат каждого делится на каждое из остальных?
Фольклор

Задача 2.(3)
На стороне AB параллелограмма ABCD (или на её продолжении) взята точка M такая, что $\angle MAD=\angle AMO$, где O - точка пересечения диагоналей параллелограмма.
Докажите, что MD=MC.
М. Смуров

Задача 3.(4)
Шесть игральных костей нанизали на спицу так, что каждая может вращаться независимо от остальных (протыкаем через центры противоположных граней). Спицу положили на стол и прочитали число, образованное цифрами на верхних гранях костей.
Докажите, что можно так повернуть кости, чтобы это число делилось на 7. (На гранях стоят цифры от 1 до 6, сумма цифр на противоположных гранях равна 7.)
Г. Гальперин

Задача 4.(4)
Путешественник посетил деревню, каждый житель которой либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Жители деревни стали в круг лицом к центру, и каждый сказал путешественнику про соседа справа, правдив ли он. На основании этих сообщений путешественник смог однозначно определить, какую долю от всех жителей составляют лжецы.
Определите и вы, чему она равна.
Б. Френкин

Задача 5.(7)
Квадрат разбит прямыми на 25 квадратиков-клеток. В некоторых клетках нарисована одна из диагоналей так, что никакие две диагонали не имеют общей точки (даже общего конца).
Каково наибольшее возможное число нарисованных диагоналей?
И. С. Рубанов

Задача 6.(8)
За круглым столом сидят десять человек, перед каждым - несколько орехов. Всего орехов - сто. По общему сигналу каждый передает часть своих орехов соседу справа: половину - если у него(*у того, **кто** передаёт* - Ред.) было чётное число или один орех плюс половину остатка - если нечётное число. Такая операция проделывается второй раз, затем третий и так далее, до бесконечности.
Докажите, что через некоторое время у всех станет по десять орехов.
А. Шаповалов

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1998 г.
10-11 кл., тренировочный вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты)

Задача 1.(3)
Барон Мюнхгаузен утверждает, что ему удалось составить некоторый прямоугольник из нескольких подобных между собой непрямоугольных треугольников.
Можно ли ему верить? (Среди подобных треугольников могут быть иравные).
А. Федотов

Задача 2.(3)
Для каждого четырёхзначного числа берём произведение его цифр, а затем эти произведения, вычисленные для всех четырёхзначных чисел, складываем.
Сколько получится? (Пояснение: берётся произведение всех цифр четырёхзначного числа, так что если хотя бы одна из цифр - ноль, то и произведение - ноль).
Г. Гальперин

Задача 3.(3)
В какое наибольшее число цветов можно раскрасить шахматную доску 8*8 так, чтобы каждая клетка граничила по стороне хотя бы с двумя клетками своего цвета? (Каждая клетка закрашивается целиком в один цвет.)
А. Шаповалов

Задача 4.(4)
Положительные числа A, B, C и D таковы, что система уравнений

$x^2 + y^2 = A$
$|x| + |y| = B$

имеет m решений, а система уравнений

$x^2 + y^2 + z^2 = C$
$|x| + |y| + |z| = D$

имеет n решений. Известно, что $m > n > 1$.
Найдите m и n.
Г. Гальперин

Задача 5.(5)
В угол вписана окружность, O - её центр. Через точку A, симметричную точке O относительно одной из сторон угла, провели к окружности касательные, точки пересечения которых с дальней от точки A стороной угла - B и C.
Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC лежит на биссектрисе данного угла.
И. Шарыгин

ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ
Весенний тур 1 марта 1998 г.
10-11 кл., основной вариант.
(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты, очки за пункты одной задачи суммируются)

Задача 1.(4)
Докажите неравенство:
$a^3/(a^2+ab+b^2) + b^3/(b^2+bc+c^2) + c^3/(c^2+ca+a^2) \geq (a+b+c)/3$.
(a, b, c - положительные числа).
Г. Алиханов

Задача 2.(4)
Квадрат со стороной 1 разрезан на прямоугольники. В каждом прямоугольнике выбрали одну из двух меньших сторон (если прямоугольник - квадрат, то выбрали любую из четырёх сторон).
Докажите, что сумма всех выбранных сторон не меньше 1.
Фольклор

Задача 3.(2+3)
а)(2) На доске выписаны числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128. Разрешается стереть любые два числа и вместо них выписать их разность - неотрицательное число. После семи таких операций на доске будет только одно число. Может ли оно равняться 97 ?
б)(3) На доске выписаны числа 1, 2^1, 2^2, 2^3, ..., 2^{10}. Разрешается стереть любые два числа и вместо них выписать их разность - неотрицательное число. После нескольких таких операций на доске будет только одно число.
Чему оно может быть равно?
А. Шаповалов

Задача 4.(5)
Внутренняя точка M выпуклого четырёхугольника ABCD такова, что треугольники AMB и CMD - равнобедренные (AM=MB, CM=MD) и у каждого угол при вершине M равен 120^o.
Докажите, что найдётся точка N такая, что треугольники BNC и DNA - правильные.
И. Шарыгин

Задача 5.(6)
Назовём лабиринтом шахматную доску 8*8, где между некоторыми полями вставлены перегородки. Если ладья может обойти все поля, не перепрыгивая через перегородки, то лабиринт называется хорошим, иначе - плохим.
Каких лабиринтов больше - хороших или плохих?
А. Шаповалов

Задача 6.(6+6)
а)(6) Двое показывают карточный фокус. Первый снимает пять карт из колоды, содержащей 52 карты (предварительно перетасованной кем-то из зрителей), смотрит в них и после этого выкладывает их в ряд слева направо, причём одну из карт кладет рубашкой вверх, а остальные - картинкой вверх. Второй участник фокуса отгадывает закрытую карту.
Докажите, что они могут так договориться, что второй всегда будет угадывать карту.
б)(6) Второй фокус отличается от первого тем, что первый участник выкладывает слева направо четыре карты картинкой вверх, а одну не выкладывает. Могут ли в этом случае участники фокуса так договориться, чтобы второй всегда угадывал невыложенную карту?
Г. Гальперин по мотивам книги М. Гарднера