Теорема о простим бројевима

Лука Милићевић
децембар 2012.
lukavert@gmail.com

Једноставне процене у вези са простим бројевима

Пример 1. (РММ 2010) За дати коначан скуп простих бројева P, обележимо са $m(P)$ највећи могући број узастопних природних бројева таквих да је сваки дељив неким елементом из P.
(i) Доказати да $m(P) \geq |P|$ и да једнакост важи ако и само ако $\min P > |P|$.
(ii) Доказати да $m(P) < (|P|+1)(2^{|P|}-1)$.

Пример 2. Нека је за сваки природан број k, са p_k задат k-ти најмањи прост број. Тада је $\sum_{k=1}^{\infty} 1/p_k = \infty$ и $\prod_{k=1}^{\infty}(1-1/p_k) = 0$.

Теорема о простим бројевима

Број простих бројева мањих или једнаких природном броју n обележавамо са $\pi(n)$.

Теорема 3. (Еуклид) За сваки природан број n важи $\pi(n) > \log_2 \log_2 n$.

Теорема 4. (Ердош) За сваки природан број n важи $\pi(n) > \log_2 n / \log 4$.

Пример 5. (Ердош, Кина 2010) Нека је дат скуп X који се састоји од $2^{k-1}3$ природних бројева, за неки природан број k. Посматрајмо скуп $S = \{a+b : a, b \in X\}$ свих сума парова чланова скупа X. Тада постоји бар $k+1$ прост делилац елемената скупа S.

Последица 6. За сваки природан број n важи $\pi(n) > \log_2 n - \log_2 3$.

Теорема 7. (Бертранов постулат) За сваки природан број $n \geq 2$ постоји прост број између n и $2n$.

Пример 8. Сваки природан број $n > 6$ се може написати као сума различитих простих бројева.

Теорема 9. (Теорема о простим бројевима) Постоје реални бројеви $C_1, C_2 > 0$ такви да за сваки природан број n важи $C_1 n/\log n < \pi(n) < C_2 n/\log n$.

Пример 10. (ММТ 2012) Да ли је скуп природних бројева n таквих да $n! + 1$ дели $(2012n)!$ коначан или бесконачан?