# ТЕОРИЈА БРОЈЕВА

## ДОДАТНА НАСТАВА:
уторак 3. 12. 2002. у 12:00

предавач:
ЂОРЂЕ КРТИНИЋ

1. Нека је $n \in \mathbb{N}$.Доказати да $\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$

није рационалан број.

2. Наћи све просте бројеве облика $\dfrac{n(n+1)}{2}-1$.

3. Наћи све просте бројеве $p$ за које је $2p+1$ трећи степен природног броја.

4.Збир неколико узастопних природних бројева је 1000. Наћи те бројеве.

5. Нека је $p$ прост,а $n$ природан број,тако да $p|n^2+n+3$. Доказати да постоји природан број $k$ ,тако да $p|k^2+k+25$.

6. Решити једначину $p_1^2+\cdots+p_8^2+992=4p_1\cdot\ldots\cdot p_8$ ,где су $p_1,...,p_8$ прости бројеви.

7. Нека је $\tau(n)$ број, а $\sigma(n)$ збир свих делилаца броја $n$. Доказати:

а) $\tau(n)=[\frac{n}{1}]+[\frac{n}{2}]+\cdots+[\frac{n}{n}]$.

б) $\sigma(n)=[\frac{n}{1}]+2[\frac{n}{2}]+\cdots+n[\frac{n}{n}]$.

8. Нека су $d_1,...,d_k$ сви делиоци броја $n$.Доказати да је $(d_1\cdot\ldots\cdot d_k)^2=n^k$.

9. Доказати да је $\sqrt{n}\le\dfrac{\sigma(n)}{\tau(n)}\le\dfrac{3}{4}n$.

10. Нека је $n>1$ природан број.Ако је $[\frac{n}{1}]+[\frac{n}{2}]+\cdots+[\frac{n}{n}]=2+[\frac{n-1}{1}]+\cdots[\frac{n-1}{n-1}]$, доказати да је н прост.

11. Нека су $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n$ природни бројеви $(n>1)$,такви да важи $\dfrac{a_1}{b_1}=...=\dfrac{a_n}{b_n}$. Доказати да је $a_1+\cdots+a_n+b_1+\cdots+b_n$ сложен број.

12. Нека је $p$ прост број,а $x$ и $m$ природни бројеви $(m>1)$. Решити једначину $2^p+3^p=x^m$.

13. Нека је $p_1=2<p_2=3<p_3=5<\cdots$ ,низ простих бројева.Доказати да се између $p_1+\cdots+p_n$ и $p_1+\cdots+p_n+p_{n+1}$ налази квадрат природног броја.

14. Нека су $m,n$ природни бројеви.Доказати да важи: $(m+\dfrac{3}{2})(m+\dfrac{7}{2})(m+\dfrac{11}{2})\cdot\ldots\cdot(m+\dfrac{4n-1}{2})>\sqrt{\dfrac{(m+2n)!}{m!}}$.

15. Нека је $S(n)$ збир, а $P(n)$ производ цифара природног броја $n$. Наћи све $n$,за које је $S(n)+P(n)=n$.

16. Раставити број 2003 на збир што је могуће више сложених бројева.

17. Раставити број 2002 на збир природних бројева чији је производ највећи могући.

18. Наћи природан број, ако је декадни запис његовог шестог степена састављен од цифара 0,2,3,4,4,7,8,8,9.

19. Нека су $m$ и $n$ природни бројеви за које важи $\sqrt{7}-\dfrac{m}{n}>0$. Доказати да је тада $\sqrt{7}-\dfrac{m}{n}>\dfrac{1}{mn}$.

20. Нека је $p_n$ $n-$ти прост број(као у задатку 13.), $\pi(n)$ број простих бројева не већих од $n$, $A=\{n+p_n|n\in\mathbb{N}\},B=\{n+\pi(n)+1|n\in\mathbb{N}\}$. Доказати да је $A\cap B=\emptyset$ и $A\cup B=\mathbb{N}\setminus\{1\}$.