Matematička gimnazija, Beograd
Dodatna nastava za treći i četvrti razred, šk. 2005/06.

METODA MINIMALNOG REŠENJA. PITAGORINE TROJKE

1. (IMO 1988, 6 zad) Ako $ab+1$ deli a^2+b^2 dokazati da je $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ potpun kvadrat.

2. (Kvant M1225) Ako $ab-1$ deli a^2+b^2 dokazati da je $\dfrac{a^2+b^2}{ab-1}=5$.

3. (Moldavija 2001) Ako ab deli a^2+b^2+1 dokazati da je $\dfrac{a^2+b^2+1}{ab}=3$.

4. (Moldavija 2001) Ako su m i n prirodni brojevi iste parnosti takvi da je $m>n$ i $m^2-n^2+1 \mid m^2$, dokazati da je m^2-n^2+1 potpun kvadrat.

5. Dokazati da ako jednačina $a^2+b^2+c^2=nabc$ ima rešenja da je onda $n=3$.

6. Dokazati da ako jednačina $a^2+a+b^2=nab$ ima rešenja da je onda $n=3$.

7. (BMO 2005) Odrediti sve proste brojeve p takve da je p^2-p+1 potpun kub prirodnog broja.

8. (Rumunija 2004) Neka su a i b prirodni brojevi. Odrediti sve moguće celobrojne vrednosti izraza $\dfrac{a^2+ab+b^2}{ab-1}$.

9. (Vijetnam 2002) Naći sve vrednosti prirodnog broja n za koje jednačina $x+y+z+u=n\sqrt{xyzu}$ ima rešenja u skupu celih brojeva.

10. (Interno 2004, izmenjena forma) Neka je a prirodan broj i $d=a^2-1$. Ako su x,y celi brojevi i $m=x^2-dy^2$ manje po apsolutnoj vrednosti od $2a+1$, dokazati da je $|m|$ potpun kvadrat.

11. (AMM) Odrediti sve prirodne brojeve koji se mogu predstaviti kao $\dfrac{(x+y+z)^2}{xyz}$, gde su x,y i z prirodni brojevi.

12. Ako je $\dfrac{x^2+1}{y^2}+4$ potpun kvadrat, dokazati da je on jednak 9.

13. (IMO 1992, predlog) Neka je m prirodan broj, a x_0 i y_0 uzajamno prosti celi brojevi takvi da x_0 deli y_0^2+m i y_0 deli x_0^2+m. Dokazati da postoje uzajamno prosti prirodni brojevi x i y, takvi da $x \mid y^2+m, y \mid x^2+m$ i $x+y \le m+1$.

14. (Indija 1998) Neka je PQR jednakokrari trougao ($PQ=PR$) čije se tačke nalaze u temenima celobrojne rešetke i kome su dužine svih stranica celobrojne. Dokazati da se središte stranice QR takođe nalazi u temenu celobrojne rešetke i da je dužina visine PM ceo broj.

15. Dokazati da ne postoji tačka na jednoj od pravih određenih stranicama jediničnog kvadrata, takva da su rastojanja od nje do svakog od temena datog kvadrata racionalni brojevi.

16. Dokazati da ako je $(xy+1)(yz+1)(zx+1)$ potpun kvadrat da je onda svaki od brojeva $xy+1, yz+1, zx+1$ potpun kvadrat.

17. (IBM Challenge, Februar 2004) Dati su pravougli trougao $\triangle ABC$ i jednakokraki trougao $\triangle KLM$ sa celobrojnim dužinama stranica i pri tome su dužine stranica trougla $\triangle ABC$ u parovima uzajamno proste. Ako su površine i obimi trouglova $\triangle ABC$ i $\triangle KLM$ jednaki naći dužine njihovih stranica.

18. (IMO 2003, 2 zad) Odrediti sve parove (a,b) prirodnih brojeva takve da je $\dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}$ prirodan broj.

19. (Bugarska 2003) Dat je niz prirodnih brojeva $y_1=y_2=1$,

$$y_{n+2}=(4k-5)y_{n+1}-y_n+4-2k,\ n\ge 1.$$

Naći sve moguće vrednosti brojeva k za koje je svaki član ovog niza potpun kvadrat.

20. (Koreja 2003) Dokazati da ne postoje prirodni brojevi x,y,z koji zadovoljavaju jednakost

$$2x^4+2x^2y^2+y^4=z^2.$$

radmarko@yahoo.com
novembar 2005.