Matematička gimnazija, Beograd
Priprema za Savezno takmičenje za II - IV razred

RAZNI ZADACI IZ TEORIJE BROJEVA

1. Odrediti sve prirodne brojeve n takve da ukoliko su a i b prirodni brojevi i ukoliko n deli a^2b+1, tada n deli i a^2+b.

2. Prirodni brojevi u, v, w zadovoljavaju jednakosti

$$14w^2 = 4uv - 5(u+v)w, \quad u - v = 2p$$

gde je p prost broj. Dokazati da skup $\{9w+1, 18w+4\}$ sadrži potpun kvadrat za sve $w > 1$.

3. Neka su a i b prirodni brojevi za koje je broj $p = \frac{b}{4}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$ prost. Koja je maksimalna vrednost broja p?

4. Odrediti sve cele brojeve a i b takve da ab deli $c(c^2-c+1)$ i da c^2+1 deli $a+b$.

5. Dokazati da jednačina $x^2y^2 = z^2(z^2-x^2-y^2)$ nema rešenja u prirodnim brojevima.

6. Naći sumu svi razlomaka $\frac{1}{xy}$, gde su x i y uzajamno prosti brojvi i važi $x \le n$ i $y \le n$ i $x+y > n$.

7. Neka je PQR jednakokrari trougao ($PQ = PR$) čije se tačke nalaze u temenima celobrojne rešetke i kome su dužine svih stranica celobrojne. Dokazati da se središte stranice QR takođe nalazi u temenu celobrojne rešetke i da je dužina visine PM ceo broj.

8. Neka je p prost broj oblika $4n-1$, gde je n prirodan broj. Dokazati da je

$$\prod_{k=1}^{p}(k^2+1) \equiv 4 \pmod{p}.$$

9. U skupu prirodnih brojeva rešiti jednačinu $2^x + 3 = 11^y$.

10. Odrediti sve trojke (x, y, n) prirodnih brojeva takvih da je $(x, n+1) = 1$ i $x^n + 1 = y^{n+1}$.

11. Neka je $\{a_n\}_{n\ge1}$ niz različitih prirodnih brojeva, takav da postoji konstanta $a > 0$ za koju je $a_n \le an$, za svaki prirodan broj n. Dokazati da:

(a) Ako je $a < 5$ niz sadrži beskonačno mnogo brojeva čija suma cifara (u dekadnom zapisu) nije deljiva sa 5.

(b) Dokazati da (a) ne važi za $a = 5$.

12. Odrediti sve prirodne brojeve $n \ge 2$ takve da za svaka dva cela broja a, b uzajamno prosta sa n važi

$$a \equiv b \pmod{n} \Longleftrightarrow ab \equiv 1 \pmod{n}.$$

13. Neka je n paran prirodan broj. S je skup prirodnih brojeva a takvih da je $1 < a < n$ i da je $a^{a-1} - 1$ deljivo sa n. Dokazati da ako je $S = \{n-1\}$ onda je $n = 2p$, gde je p prost broj.

14. Posmatra se sistem jednačina

$$x + y = z + u, \qquad 2xy = zu.$$

Odrediti najveću vrednost realne konstante m tako da je $m \le \frac{x}{y}$ za sve prirodne brojeve (x, y, z, u) koji su rešenja datog sistema i kod kojih je $x \ge y$.

15. Neka su x, a, b prirodni brojevi takvi da je $x^{a+b} = a^b b$. Dokazati da je $a = x$ i $b = x^x$.

16. Neka je $\{f_n\}_{n\ge0}$ Fibonačijev niz. Dokazati da ukoliko je p prost broj oblika $5k \pm 1$, da tada $p \mid f_{p-1}$, a ukoliko je p oblika $5k \pm 2$, da tada $p \mid f_{p+1}$.

17. Neka je n prirodan broj koji nije deljiv niti jednim potpunim kvadratom. Dokazati da tada ne postoje uzajamno prosti prirodni brojevi x i y takvi da

$$(x+y)^3 \mid x^n + y^n.$$

18. Dokazati da postoji niz prirodnih brojeva $\{a_n\}_{n\ge1}$ u kome se svaki prirodan broj pojavljuje tačno jednom i za svaki prirodan broj k važi

$$k \mid a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

19. Dokazati da za svaki prirodan broj s postoji prirodan broj n sa zbirom cifara s koji je deljiv sa s.

20. Odrediti sve prirodne brojeve $m, n \ge 2$ takve da je $\dfrac{1 + m^{3^n} + m^{2\cdot 3^n}}{n}$ ceo broj.

radmarko@yahoo.com