Matematička gimnazija, Beograd
Dodatna nastava za II razred, šk. 2006/07.

POTPUN SISTEM OSTATAKA. POLJE $\mathbf{Z}_p$

Definicija. Za skup celih brojeva $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ kažemo da je POTPUN SISTEM OSTATAKA po modulu n ukoliko ne postoje dva elementa ovog skupa koja daju isti ostatak po modulu n.

Teorema. Ukoliko je $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ potpun sistem ostataka po modulu n, tada su $\{a_1 + c, a_2 + c, \ldots, a_n + c\}$ i $\{ba_1, ba_2, \ldots, ba_n\}$ takođe potpuni sistemi ostataka po modulu n, gde je $b, c \in \mathbf{Z}$ i $(b, n) = 1$.

1. Neka je $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ potpun sistem ostataka po modulu n i $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ potpun sistem ostatak po modulu m. Dokazati da je skup brojeva $\{a_i m + b_j n \,|\, 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m\}$ potpun sistem ostatak po modulu nm.

2. Odrediti broj prirodnih brojeva x koji zadovoljavaju sledeće uslove:

1. $x < 10^{2006}$;
2. $x^2 - x$ je deljivo sa 10^{2006}.

3. Dokazati da za sve prirodne brojeve m i n važi jednakost $\mathrm{NZD}(m,n) = m + n - mn + 2\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\left[\frac{kn}{m}\right]$.

4. Neka su $a, b \in \mathbf{Z}$ i $n \in \mathbf{N}$. Dokazati da je sledeći izraz ceo $\dfrac{a(a+b)(a+2b)\cdots(a+(n-1)b)b^{n-1}}{n!}$.

5. Odrediti sve prirodne brojeve $n > 1$ za koje postoji permutacija $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ brojeva $0, 1, \ldots, n-1$ takva da je:

(a) $a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_n$,
(b) $a_1, a_1a_2, \ldots, a_1a_2\cdots a_n$,

potpun sistem ostataka po modulu n.

6. Odrediti sve prirodne brojeve n takve da postoji n brojeva koji sadrže samo:

(a) jedinice,
(b) jedinice i nule,

koji čine potpun sistem ostataka po modulu n.

7. (IMO 2001, 4 zad) Neka je n neparan prirodan broj veći od 1 i nea su $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbf{Z}$. Za permutaciju $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ brojeva $\{1, \ldots, n\}$ definišemo $S(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i a_i$. Dokazati da postoje permutacije $a \ne b$ takve da $n!$ deli $S(a) - S(b)$.

8. (IMO 2005, 2 zad) Neka je $a_1, a_2, \ldots$ niz celih brojeva koji sadrži beskonačno mnogo pozitivnih i negativnih članova. Neka za svaki prirodan broj n brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ daju n različitih ostatak po modulu n. Dokazati da se svaki ceo broj pojavljuje tačno jednom u nizu.

Teorema. Ukoliko je p prost broj, skup $\mathbf{Z}_p = \{0, 1, 2 \ldots, p-1\}$ je polje u odnosu na sabiranje i množenje po modulu p.

Prethodna teorema znači da za svako $a \ne 0$ iz $\mathbf{Z}_p$ postoji jedinstven broj a' takav da je $aa' \equiv_p 1$. Samim tim možemo uvesti i deljenje tako da je $1/a = a'$ i pri tome se broj a' naziva INVERZ broja a. Primetimo da $\mathbf{Z}_p$ predstavlja potpun sistem ostataka po modulu p.

9. Dokazati da za svaki prost broj $p > 2$ i $1 \le k < p$ važi $\dbinom{p-1}{k} \equiv_p (-1)^k$ i $\dbinom{p-2}{k} \equiv_p (-1)^k(k+1)$.

10. (Republičko 1982, 3 raz) Ako je p prost broj i $n > p$, dokazati da je $\dbinom{n}{p} \equiv_p \left[\dfrac{n}{p}\right]$.

11. (IMO 2005, 4 zad) Niz $\{a_n\}$ definisan je sa $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$, za $n \ge 1$. Odrediti sve prirodne brojeve koji su uzajamno prosti sa svim članovima niza.

12. Neka je p dati prost broj, veći od 2. Odrediti parnost broja

$$N = \left\lfloor \frac{(p-1)!}{p \cdot (p-2)} \right\rfloor.$$

radmarko@yahoo.com
oktobar 2006.