Matematička gimnazija, Beograd
Priprema za Savezno takmičenje za I razred

RAZNI ZADACI IZ TEORIJE BROJEVA

1. Odrediti za koje prirodne brojeve n postoji prirodan broj m tako da n deli sve brojeve

$$m+1, \quad m^m+1, \quad m^{m^m}+1, \quad \ldots, \quad m^{m^{\cdot^{\cdot^{\cdot^m}}}}+1.$$

2. Odrediti sve prirodne brojeve n takve da $[\sqrt{n}] \mid n$.

3. Dokazati da je broj $\frac{1}{25}\sum_{k=0}^{2005}\left[\frac{2^k}{25}\right]$ ceo.

4. Odrediti sve prirodne brojeve a, b, c koji zadovoljavaju jednakost $a! + 2001 \cdot b! = c!$.

5. Odrediti sve parove prirodnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju jednakost $2^x = y! + 304$.

6. Dokazati da za svaki prirodan broj n broj $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ ima bar n različitih prostih delilaca.

7. Odrediti sve trojke prirodnih brojeva (x, y, z) koje zadovoljavaju jednakost $x^y - 2^z = 1$.

8. Odrediti sve prirodne brojeve n takve da postoji ceo broj x za koji je

$$499 \cdot (1997^n + 1) = x^2 + x.$$

9. Neka su a i b prirodni brojevi, takvi da su $15a + 16b$ i $16a - 15b$ kvadrati prirodnih brojeva. Naći najmanju moguću vrednost koju može imati minimum ta dva kvadrata.

10. Neka su x i y prirodni brojevi takvi da je $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Dokazati da je $x - y$ potpun kvadrat.

11. Neka je $n \in \mathbf{N}$ i $d \mid 2n^2$. Da li broj $n^2 + d$ može biti kvadrat celog broja?

12. Odrediti sve parove prirodnih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju jednakost

$$5^x = 1 + 4y + y^4.$$

13. (a) Naći sve parove različitih prirodnih brojeva a i b takvih da $(b^2+a) \mid (a^2+b)$ i da je b^2+a potpun stepen prostog broja.

(b) Neka su a i b različiti prirodni brojevi veći od 1 takvi da $(b^2 + a - 1) \mid (a^2 + b - 1)$. Dokazati da $b^2 + a - 1$ ima bar dva prosta delioca.

14. Naći sve parove (x, y) različitih prirodnih brojeva, takvih da važi: zamenom mesta poslednjim dvema ciframa broja x^2 dobija se broj y^2.

15. Odrediti sve u parovima uzajamno proste prirodne brojeve k, l, m takve da je

$$(l + m + n)\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \quad \text{ceo broj.}$$

16. Dužine stranica četvorougla su prirodni brojevi. Ako je svaki od tih brojeva delilac zbira ostala tri, onda među tim brojevima ima bar dva jednaka. Dokazati.

17. Ako je p prost broj, dokazati da je broj

$$\underbrace{11\ldots1}_{p}\underbrace{22\ldots2}_{p}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p}-123456789$$

deljiv sa p.

18. Neka su a i b različiti prirodni brojevi takvi da je $ab(a + b)$ deljivo sa $a^2 + ab + b^2$. Dokazati da je $|a - b| > \sqrt[3]{ab}$.

19. Neka su m i n prirodani brojevi takvi da

$$m \mid n^2,\ n^2 \mid m^3,\ m^3 \mid n^4,\ n^4 \mid m^5,\ \ldots$$

Dokazati da je $m = n$.

20. Neka je n prirodan broj. Dokazati da ne postoje prirodni brojevi x i y takvi da važi

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{x} + \sqrt{y} < \sqrt{4n+2}.$$

21. Dokazati da je broj pozitivnih delilaca broj n oblika $4k+1$ ne manji od broja delilaca oblika $4k+3$.

22. Dokazati da se svaki prirodan broj k može na beskonačno mnogo načina predstaviti u obliku $k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm m^2$ odabirom znakova $+$ ili $-$ i prirodnog broja m.

23. Dokazati da ne postoje prirodni brojevi x, y, z, gde je $z > 1$, takvi da važi

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 + \ldots + (x+99)^2 = y^z.$$

24. Odrediti sve petorke prirodnih brojeva (x, y, z, t, n) koje zadovoljavaju jednakost

$$n^x + n^y + n^z = n^t.$$

25. Dati su realni brojevi x i y, takvi da je svaki od brojeva

$$x + \sqrt{y}, y + \sqrt{x}, \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

ceo. Dokazati da su i brojevi x i y celi.

26. Dati su prirodni brojevi a i b, takvi da $a^2 + ab + b^2$ deli $a^3 + b^3$ i da je $a - b$ prost broj. Dokazati da je broj $a^3 - b^3$ potpun četvrti stepen prirodnog broja.

27. Za prirodne brojeve a, b, c, d važi $\dfrac{a^2 + b}{a + c} = d$. Dokazati da je $d \leq b + (c-1)^2$.

28. Odrediti sve prirodne brojeve n kod kojih je suma kvadrata njegovih delilaca manjih od n jednaka $2n + 2$.

29. Dokazati da se svaki prirodan broj može predstaviti kao suma nekoliko članova Fibonačijevog niza.

30. (a) Dokazati da među bilo kojih tri uzastopnih prirodnih brojeva > 7 barem jedan ima ne manje od dva prosta delioca.

(b) Dokazati da među bilo kojih 24 uzastopnih prirodnih brojeva ≥ 6 barem jedan ima ne manje od tri prosta delioca.

31. Dužine stranica pravougaonika jednake su neparnim prirodnim brojevima. Dokazati da u tom pravougaoniku ne postoji tačka čije je rastojanje od svakog temena jednako prirodnom broju.

32. Neka su a i b prirodni brojevi takvi da je $a < b$. Dokazati da se među proizvoljnih b uzastopnih prirodnih brojeva mogu naći dva čiji je proizvod deljiv sa ab.

33. Da li broj

$$S(n,k) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+13} + \ldots + \frac{1}{n+13k},$$

gde su n i k prirodni brojevi, može da bude prirodan?

34. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje među brojevima

$$n, \tau(n), \tau(\tau(n)), \tau(\tau(\tau(n))), \ldots$$

nema nijednog potpunog kvadrata ($\tau(n)$ označva broj pozitivnih delilaca broja n).

35. Neka je n neparan prirodan broj veći od 1 i neka su $k_1, k_2, \ldots, k_n$ dati celi brojevi. Za svaku od $n!$ permutacija $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ neka je

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i.$$

Dokazati da postoje dve permutacije b i c, $b \neq c$, takve da je $n!$ delilac broja $S(b) - S(c)$.

36. Neka je p_n n-ti prost broj i neka je $\pi(n)$ broj prostih brojeva koji nisu veći od n. Ako je

$$A = \{n + p_n \mid n \in \mathbf{N}\}, \quad B = \{n + \pi(n) + 1 \mid n \in \mathbf{N}\},$$

dokazati da je $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbf{N} \backslash \{1\}$.

37. Naći sva rešenja jednačine $x^y + y = y^x + x$ u skupu prirodnih brojeva.

radmarko@yahoo.com