Gimnazija Svetozar Marković, Niš
Dodatna nastava iz matematike

predavač - Aleksandar Ilić
Niš 08.11.2003. godine

Razni zadaci

1. Brojevi $1, 2, 3, ..., 2n-1, 2n$ razbijeni su u dve disjunktne grupe od po n brojeva. Neka su $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ brojevi prve grupe, a $b_1 > b_2 > \ldots > b_n$ brojevi druge grupe. Dokazati da zbir $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n|$ ne zavisi od podele u nizove i izračunati ga.

2. Dokazati da ako su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$ tada važi

$$1 + \frac{3}{a+b+c} \geq \frac{6}{ab+bc+ac}$$

3. Dve kružnice se seku u tačkama A i B. Neka je C tačka prve kružnice, različita od A i B. Označimo sa D tačku preseka prave CA sa drugom kružnicom, različitu od A. Neka su M i N središta lukova BC i BD, koji ne sadrži tačku A, a K središte duži CD. Dokazati da je $\angle MKN$ prav.

4. Dokazati da niz a sadrži sve prirodne brojeve osim kvadrata.

$$a_n = \lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \rfloor$$

5. Neparan prost broj može da se predstavi kao zbir kvadrata dva prirodna broja na najviše jedan način.

6. Naći sumu svih razlomaka $\frac{1}{xy}$, gde su x i y uzajamno prosti brojevi i važi $x \leq n$ i $y \leq n$ i $x + y > n$.

7. U kompaniji radi $2n + 1$ ljudi. Za svakih n ljudi postoji čovek koji ih sve poznaje. Ako je poznanstvo uzajamno, pokazati da postoji čovek koji poznaje sve ostale.

8. Neka je ABC trougao. Van trougla ABC konstruisani su jednakokraki trouglovi BCD, CAE, ABF, sa bazama BC, CA, AB. Dokazati da se normale iz A, B, C na duži EF, FD, DE respektivno, seku u jednoj tački.

9. Neka je D tačka na stranici AB trougla ABC, i neka je E tačka unutrašnja tačka preseka duži CD i zajedničke spoljašnje tangente upisanih krugova u trouglove ACD i BCD. Ako D prolazi duži AB, dokazati da tačka E ide po luku nekog kruga.

10. Dato je n pravih u ravni, tako da se nikoje tri ne seku u istoj tački. Dokazati da je medju delovima ravni ograničenim ovim pravama pojavljuju bar $\lfloor \frac{2n-2}{3} \rfloor$ trougla.

11. Na tabli je dato n pozitivnih realnih brojeva. Tada se bilo koja dva odabrana broja a i b obrišu i umesto njih upiše broj $\frac{a+b}{4}$. Ovo se ponavlja dok ne ostane jedan broj na tabli. Ako su početni brojevi bili jedinice, dokazati da je poslednji broj veći ili jednak od $\frac{1}{n}$.

12. Neka je $1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leq n$ niz celih brojeva, takav da je $NZS(a_i, a_j) > n$. Dokazati da je

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} \leq \frac{3}{2}$$

13. Dokazati da se u koordinatnoj ravni može nacrtati kružnica koja ne prolazi ni kroz jednu tačku sa celobrojnim koordinatama, a u čijoj se unutrašnjosti nalaze tačno 2003 takve tačke.

14. Naći sve $a, b \in N$ za koje je broj prirodan

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{a}{b+1} \in N$$

15. Unutar trougla ABC data je tačka O. Prave AO, BO, CO seku naspramne stranice trougla u P, Q, R. Dokazati

$$\frac{AO}{OP} \cdot \frac{BO}{OQ} \cdot \frac{CO}{OR} \geq 8$$