Dodatna nastava iz matematike u MG-u

Predavač: Peki

Neka su $n = a_kp^k + \ldots + a_1p + a_0$ i $m = b_kp^k + \ldots + b_1p + b_0$ zapisi brojeva m i n u sistemu sa osnovom p, gde je p prost broj i $n \geq m$. ($a_k \neq 0$, a b_k ne mora da bude). Tada je $\binom{n}{m} \equiv \binom{a_k}{b_k} \ldots \binom{a_1}{b_1}\binom{a_0}{b_0}$ (mod p) (**Lukasova teorema**)

1. Zbirovi uglova u temenima A i B tetraedra $ABCD$ su po 180 stepeni. Dokazati da je $AB \leq CD$.

2. Naći sve $f : R \to R$ takve da je
$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y.$$

3. ABC je oštrougli trougao sa centrom upisanog kruga I i centrom opisanog kruga O. AD i BE su visine, a AP i BQ simetrale uglova. Dokazati da su tačke D, I, E kolinearne akko su tačke P, O, Q kolinearne.

4. Neka se prave AA_1, BB_1, CC_1 seku u tački P, gde su A_1, B_1, C_1 redom tačke na stranicama BC, CA, AB trougla ABC. Neka je $\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}} = \frac{z}{y}, \frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}} = \frac{x}{z}, \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}} = \frac{y}{x}$. Tada je $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PA_1}} = \frac{y+z}{x}$ i $\frac{\overrightarrow{AQ}}{\overrightarrow{QA_1}} = \frac{y+z}{2x}$(**Van Obelova teorema**)

5. Neka je ABC trougao i ω njegov upisani krug. Neka su D_1 i E_1 redom tačke u kojima ω dodiruje BC i AC. Označimo sa D_2 i E_2 tačke na stranicama BC i AC redom takve da je $CD_2 = BD_1$ i $CE_2 = AE_1$ i neka je P presek pravih AD_2 i BE_2. Krug ω seče AD_2 u dve tačke od kojih je bliža temenu A označena sa Q. Dokazati da je $AQ = D_2P$.

6. Za dato $a > 2$ definišemo niz $a_0, a_1, \ldots$ sa $a_0 = 1, a_1 = a, a_{n+2} = a_{n+1}(\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} - 2)$. Dokazati da je $\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} < \frac{2+a-\sqrt{a^2-4}}{2}$. $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Pokazati da je
$$0 \leq ab + bc + ca - abc \leq 2.$$

7. Ako za članove niza $a_1, \ldots, a_{2n+1}$ važi $a_i \leq \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{2}$ za $i = 2, 3, \ldots, 2n$. Dokazati da je
$$\frac{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}}{n+1} \geq \frac{a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}}{n}.$$

8. Neka su $(x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n), (z_1, \ldots, z_n)$ tri n-torke pozitivnih realnih brojeva takvih da je $x_iy_i > z_i^2$ za svako $1 \leq i \leq n$. Pokazati nejednakost
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_iy_i - z_i^2} \geq \frac{n^3}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^n z_i\right)^2}.$$

9. Neka su $x_1, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi. Dokazati da je:
$$\frac{x_1}{1 + x_1^2} + \frac{x_2}{1 + x_1^2 + x_n^2} + \ldots \frac{x_n}{1 + x_1^2 + \ldots + x_n^2} < \sqrt{n}.$$

10. Naći sve tačke D u trouglu ABC takve da je $DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA$.

11. Neka je $A = \{a_i, a_2, \ldots, a_n\}$ kolekcija celih brojeva (jedan isti broj se može javiti više od jedanput). $A + A$ je kolekcija brojeva $a_i + a_j$ gde je $a < i < j \leq n$. Ako je $A + A = B + B$, gde je $B = \{b_1, \ldots, b_n\}, B \neq A$, dokazati da je n stepen dvojke. $A + A$ i $B + B$ se posmatraju kao multiskupovi.

12. Dat je trougao ABC. Krug kroz teme C tangentan sa AB u A i krug kroz teme B tangentan sa AC u A imaju različite poluprečnike i drugi put se seku u tački D. Neka je E tačka na pravoj AB takva da je $AB = BE$. Neka je F druga tačka preseka prave CA sa krugom opisanim oko trougla ADE. Dokazati da je $AF = AC$.

13. Pretpostavimo da se u nekom društvu od n osoba svake dve osobe ili vole ili ne vole i da ima q parova koji se vole ($q \in N$). Ako u svakom društvu od 3 osobe postoje dve koje se ne vole, dokazati da postoji bar jedan član društva takav da medju onima sa kojima se ne voli ima najviše $q(1 - \frac{4q}{n^2})$ parova koji se vole. Pretpostavomo i to da je "voljenje" simetrična relacija.

14. Dokazati da ne postoji broj n takav da medju binomnim koeficijentima n-tog reda ima jednak broj parnih i neparnih brojeva.

15. Neka je S skup svih nizova $(a_1, a_2, ..., a_n)$ čiji su članovi elementi skupa $\{0, 1, 2\}$. Pod elementarnom tranformacijom podrazumevamo zamenu a_j sa b_j, pri čemu se nijedan od brojeva a_j, b_j, ne pojavljuje i nizu $a_1, ..., a_{j-1}$. Dokazati da se svaki niz iz S može dobiti od niza $(0, ..., 0)$ uzastopnom primenom elementarnih transformacija.

16. Ako jednačina $ax^2 + (c - b)x + (e - d) = 0$ ima realne korene veće od 1, gde je $a, b, c, d, e \in R$, dokazati da jednačina $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ima bar jedan realan koren.

17. Brojevi $1, 2, ..., n$ upisani su u tablicu $n \times n$ svaki po n puta.
    (a) Za svako $i \in \{1, 2, ..., n\}$ označimo sa v_i i k_i redom brojeve različitih vrsta i kolona u kojima se on pojavljuje. Dokazati da je $v_i + k_i \geq 2\sqrt{n}$.
    (b) Takodje, označimo sa s_j i c_j redom brojeve različitih brojeva u $j - toj$ vrsti i $j - toj$ koloni. Dokazati da je $\sum_{i=1}^{n}(v_i + k_i) = \sum_{i=1}^{n}(c_i + s_i)$.
    (c) Dokazati da postoji kolona ili vrsta koja sadrži bar $[\sqrt{n}]$ različitih brojeva.

18. Krugovi k_1 i k_2 sa poluprečnicima r_1 i r_2 se dodiruju spolja u tački G pri čemu prvi od njih dodiruje stranice CD, DA (u E), AB, a drugi stranice AB, BC (u F), CD konveksnog četvorougla $ABCD$. Dokazati da je $EO + OF \leq 2r_1 + 2r_2$, gde je O tačka preseka dijagonala četvorougla $ABCD$.

19. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje postoji prirodan broj d veći od 1 takav da su brojevi $\binom{n}{1,}...\binom{,n}{n-1}$ deljivi sa d.

20. Neka je $n > 2$ prirodan broj i X podskup skupa $\{1, 2, ..., n^3\}$ od $3n^2$ elemenata. Dokazati da postoji 9 različitih brojeva $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ iz X takvih da sistem jednačina $a_1x + b_1y + c_1z = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z = 0$, $a_3x + b_3y + c_3z = 0$ ima celobrojno rešenje koje ne sadrži nulu.

21. Naći sve realne vrednosti a za koje postoje nenegativni realni brojevi koji zadovoljavaju relacije: $\sum_{i=1}^{5} ix_i = a$, $\sum_{i=1}^{5} i^3x_i = a^2$, $\sum_{i=1}^{5} i^5x_i = a^3$.

22. Od 1600 poslanika u skupštini formirano je 80 poslaničkih klubova od kojih svaki ima po 80 poslanika. Dokazati da postoje dva kluba sa bar 4 zajednička člana.

23. Staza od tačke $(0, 0)$ do (n, n) u koordinatnom sistemu je niz od $2n$ poteza, svaki nadesno ili nagore. Korakom nazivamo niz od dva uzasopna poteza od kojih je prvi nadesno i drugi nagore. Dokazati da je broj staza koje ne idu iznad prave $y = x$ i koje imaju tačno k koraka jednak $\frac{1}{k}\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k-1}$.

24. Dokazati da suma cifara u dekadnom zapisu broja 2^n neograničeno raste.

25. Da se dokaže da je broj rešenja jednačine $x^3 + y^2 = z^3 + t^2 + 1$ medju prirodnim ne većim od milion manji od rešenja iz istog skupa jednačine $x^3 + y^2 = z^3 + t^2$