Pripreme u MG-u za Savezno takmičenje iz matematike

Predavač: Peki

1. Dato je 7 nenegativnih realnih brojeva čiji je zbir jednak 1. Dokazati da se oni mogu rasporediti po krugu tako da zbir svih proizvoda susednih parova ne bude veći od $\frac{1}{7}$.

2. Neka su $n > 5$ i $3 \leq p \leq n - p$. p temena pravilnog $n-$tougla je obojeno u crveno, a $n - p$ u plavo. Dokazati da postoje dva podudarna mnogougla, od kojih svaki ima bar $[\frac{p}{2}] + 1$ temena, jedan sa crvenim, jedan sa plavim temenima.

3. Da se nadju sve funkcije $f : R \setminus \{0\} \to R$ takve da je

$$xf(x + \frac{1}{y}) + yf(y) + \frac{y}{x} = yf(y + \frac{1}{x}) + xf(x) + \frac{x}{y}$$

za sve $x, y \in R \setminus \{0\}$.

4. Posmatrajmo jedinični disk u ravni, tj. $D = \{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Pod *trakom* podrazumevamo oblast izmedju dve paralelne prave, a *duzina trake* je rastojanje izmedju te dve prave. Ako konačan broj traka u potpunosti prekriva disk, dokazati da je suma njihovih dužina veća ili jednaka 2.

5. Dat je triedar $Oabc$. Dokazati da na ivicama a, b, c postoje redom tačke A, B, C različite od O takve da je $\angle OAB = \angle OBC = \angle OCA$.

6. Neka je S skup svih nizova $(a_1, a_2, ..., a_n)$ čiji su članovi elementi skupa $\{0, 1, 2\}$. Pod elementarnom tranformacijom podrazumevamo zamenu a_j sa b_j, pri čemu se nijedan od brojeva a_j, b_j, ne pojavljuje i nizu $a_1, ..., a_{j-1}$. Dokazati da se svaki niz iz S može dobiti od niza $(0, ..., 0)$ uzastopnom primenom elementarnih transformacija.

7. Neka je $SABCD$ jednakoivična četvorostrana piramida sa vrhom S i neka su M i N redom tačke na pravama SA i BC takve da je prava MN normalna na SA i BC. Naći odnose $SM : MA$ $BN : NC$.

8. Dokazati da se za svako $n \in N$ skup $\{1, 2, ..., 2^n\}$ može podeliti na dva disjunktna podskupa tako da su sume $k-tih$ stepena njihovih elemenata medjusobno jednake za sve prirodne brojeve k manje od n.

9. Naći sve neprekidne funkcije $f : R \to R$ takve da je $f(x) = f(x^2 + \frac{1}{4})$

10. Neka je X skup sa n elemenata i $\mathcal{F}$ familija njegovih troelementnih podskupova takvih da svaka dva imaju najviše 1 zajednički element. Dokazati da postoji podskup od X koji ne sadrži nijedan od njih i ima bar $\sqrt{2n}$ elemenata.

11. Stranice pravilnog 2^n-ougla su obojene u crveno i plavo. Jedan korak predstavlja prebojavanje po sledećem pravilu: stranica se boji u crveno ako su susedi bili istobojni pre početka novog koraka, a u plavo u suprotnom. Dokazati da će posle 2^{n-1} koraka sve strane biti crvene. Ima li bolja procena?

12. Dat je niz $a_1 = 1$ i $a_n = a_{n-1} + a_{[\frac{n}{2}]}$. Dokazati da ovaj niz sadrži beskonačno mnogo članova deljivih sa 7.

13. Neka je $x_0 = 1990$ i $x_n = -\frac{1990}{n}(x_0 + ... + x_{n-1})$ za $n \leq 1$. Izračcunati $x_0 + 2x_1 + ... + 2^{1990}x_{1990}$.

14. Naći sve realne brojeve t za koje postoje realni brojevi x, y, z takvi da je

$$3x^2 + 3xz + z^2 = 1, 3y^2 + 3yz + z^2 = 4, x^2 - xy + y^2 = t.$$

15. Nad trojkom (x, y, z) realnih brojeva može da se izvrši jedna od sledeće tri transformacije $(x, y, z) \to (yz - x, y, z)$; $(x, y, z) \to (x, xz - y, z)$; $(x, y, z) \to (x, y, xy - z)$. Može li se polazeći od trojke $(1, 2, 3)$ dobiti trojka

(a) $(17, 49, 3)$;

(b) $(13, 141, 11)$?

16. Pokazati da za dato $k \in N$ postoji prirodan broj čije su sve dekadne cifre neparne i deljiv je sa 5^k.

17. Ako su prirodni brojevi a i b takvi da je broj $\frac{a}{b} + \frac{b+1}{a}$ prirodan ,onda je on jednak 3. Dokazati.

18. Dokazati da je $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n-k}{k} 2^{2n-2k} = 2n + 1$

19. Odrediti maksimalnu vrednost prirodnog broja k za koju skup $\{1, 2, ..., 2n - 1\}$ sadrži $k-$točlani podskup takav da nijedan broj iz tog podskupa nije deljiv drugim brojem iz tog podskupa.

20. Svaka ivica konveksnog poliedra označena je jednim od znakova $+$ i $-$. Dokazati da postoji teme poliedra medju čijim ivičnim uglovima ima manje od 4 čiji su kraci različiti označeni.

21. Neka je $S(n)$ zbir cifara prirodnog broja n. Da li postoji n tako da važe jednakosti $S(n) = 2006$ i $S(n^2) = 2006^2$?

22. Da li postoji prirodan broj n takav da se skup $\{n, n + 1, ..., n + 1997\}$može predstaviti u obliku unije medjusobno disjunktnih skupova $A_1 \bigcup A_2 \bigcup ... \bigcup A_k$, gde je $k \geq 2$, tako da su proizvodi brojevaa u svakom od tih skupova medjisobno jednaki.

23. Dat je niz tačaka $A_i(x_i, y_i), 0 < x_i < 1, 0 < y_i < 1, i = 1, 2, ..., n^2$. Dokazati da postoji permutacija $(i_1, ..., i_n)$ brojeva $1, 2, ..., n^2$ takva da dužina izlomljene linije $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_{n^2}}$ nije veća od $2n + 1$.

24. Neka je q prost broj veći od 5. i $1 \leq p < q$. Pretpostavimo da je broj $\frac{p}{q}$ u decimalnom zapisu čisto periodičan sa periodom od $2n$ cifara. Dokazati da je zbir broja koji formiraju prvih n cifara perioda i poslednjih n cifara perioda jednak $10^n - 1$.

25. Da li je moguće razloži trougao na konačan broj konveksnih petouglova? A šestouglova?

26. Dati us prirodni brojevi $a_1, ...a_n$ takvi da važi

    (a) $a_1 = 1$

    (b) $a_i \leq a_{i+1} \leq 2a_i$ za $i = 1, 2..., n - 1$;

    (c) $a_1 + ... + a_n = 2006$.

    Da li je moguće date brojeve podeliti u dve grupe, tako da je zbir brojeva u jednoj jednak zbiru brojeva u drugoj grupi?

27. (a) Odrediti najveću konstantu C tako da nejednakost $x^6 + y^6 + z^6 \geq Cx^3y^2z$. važi za sve realne x, y, z.

    (b) Dokazati da je $3(a_1 + \sqrt{a_1a_2} + \sqrt[3]{a_1a_2a_3}) \leq 4(a_1 + a_2 + a_3)$ za sve pozitivne realne brojeve a_1, a_2, a_3.

28. Dati su realni brojevi $0 = x_1 < x_2 < ... < x_{2n} < x_{2n+1} = 1$. Pokazati nejednakost

$$\frac{1-h}{2} < \sum x_{2i}(x_{2i+1} - x_{2i-1}) < \frac{1+h}{2}.$$

29. Neka su a, b, c prirodni brojevi takvi da je i broj $t = \frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$ prirodan. Dokazati da je $t = 1$ ili $t = 3$.

30. Odrediti sve prirodne brojeve koji se mogu predstaviti u obliku $\frac{a^2+b^2}{ab-1}$, gde su a i b takodje prirodni brojevi.