Летњи математички камп

Зборник предавања

Шабац, август 2010.
(Радна верзија)

Садржај

I Предавања за професоре **15**

1 Примитивни корени **16**
1.1 Увод . . . 16
1.2 Модули по којима постоје примитивни корени . . . 19
1.3 Основне особине примитивних корена . . . 22
1.4 Проблеми у вежи са примитивним коренима . . . 23
1.5 Примена примитивних корена . . . 24
1.6 Два отворена проблема . . . 26
1.6.1 Најмањи примитиван корен по простом модулу . . . 26
1.6.2 Артинова хипотеза . . . 26

2 Тополошки простори и многострукости 1 **29**
2.1 Непрекидност . . . 29
2.2 Отворени скупови . . . 31
2.3 Непрекидност и отворени скупови . . . 33
2.4 Тополошки простори . . . 35

3 Тополошки простори и многострукости 2 **40**
3.1 Тополошке особине . . . 40
3.2 Хомеоморфизми . . . 43
3.3 Тополошке многострукости . . . 44
3.4 Диференцијабилне многострукости . . . 45

4 Свођење математичког модела жице која осцилује на систем линерних једначина **48**
4.1 Таласна једначина . . . 48
4.2 Фуријеова метода . . . 51
4.3 Апроксимација помоћу коначних разлика . . . 53

5 Испитивање особина сферних и планарних сочива на бази метаматеријала **55**
5.1 Увод . . . 55
5.2 Модели . . . 57
5.2.1 Планарно сочиво од метаматеријала . . . 58

5.2.2 Сферно сочиво од метаматеријала 59
5.3 Резултати и дискусија 60
5.3.1 суперсочиво 60
5.3.2 Сферно сочиво 61
5.4 Закључак 64

6 Хиперболичка геометрија, увод и модели 67
6.1 Увод 67
6.2 Линије и углови у хиперболичкој геометрији 68
6.3 Сакеријев и Ламбертов четвороугао 70
6.4 Поенкареов полуравански модел 71
6.5 Поенкареов диск модел 73
6.6 Додатак 74

7 Пробабилистички метод у теорији графова 76
7.1 Увод 76
7.2 Случајни графови 80
7.3 Граничне функције 83
7.4 Ердошева теорема 89
7.5 Лема о пресецима 91
7.6 Литература 93

8 Борсук-Уламова теорема 95
8.1 Увод 95
8.2 Еквивалентне верзије Борсук-Уламове теореме 96
8.3 Генерализација Борсук-Уламове теореме 98

II Предавања за учитеље 100

9 Нумерација и друга пребројавања 101
9.1 Задаци за рад 101
9.2 Задаци за домаћи рад 103

10 Метода дужи у решавању проблемских задатака 105
10.1 Задаци за рад 105
10.2 Задаци за домаћи рад 107

11 Логичко комбинаторни задаци 110
11.1 Задаци за рад 110
11.2 Задаци за домаћи рад 112

12 Пребројавања у геометрији 114
12.1 Задаци за рад 114
12.2 Задаци за домаћи рад 115

13 Корпице **118**
13.1 Задаци за рад . . . 118
13.2 Задаци за домаћи рад . . . 120

14 Венови дијаграми **122**
14.1 Задаци за рад . . . 122
14.2 Задаци за домаћи рад . . . 126

15 Метода теразија **128**
15.1 Задаци за рад . . . 128
15.2 Задаци за домаћи рад . . . 130

III Предавања за средњу школу **132**

16 Идентитети са биномним коефицијентима **133**
16.1 Теоријски увод . . . 133
16.2 Задаци за рад . . . 133
16.3 Задаци за домаћи рад . . . 136

17 Хомотетија **139**
17.1 Теоријски увод . . . 139
17.2 Задаци за рад . . . 139
17.3 Задаци за домаћи рад . . . 144

18 Комбинаторна геометрија **147**
18.1 Теоријски увод . . . 147
18.2 Задаци за рад . . . 147
18.3 Задаци за домаћи рад . . . 151

19 Полиноми **153**
19.1 Теоријски увод . . . 153
19.2 Задаци за рад . . . 153
19.3 Задаци за домаћи рад . . . 157

20 Разни задаци из теорије бројева **160**
20.1 Задаци за рад . . . 160
20.2 Задаци за домаћи рад . . . 164

21 Три теореме елементарне теорије бројева **166**
21.1 Теоријски увод . . . 166
21.2 Задаци за рад . . . 166
21.3 Задаци за домаћи рад . . . 168

22 Елементарна геометрија 1 **170**
22.1 Теоријски увод 170
22.2 Задаци за рад 171
22.3 Задаци за домаћи рад 174

23 Стереометрија **176**
23.1 Теоријски увод 176
23.2 Задаци за рад 178
23.3 Задаци за домаћи рад 178

24 Теорија графова **180**
24.1 Теоријски увод 180
24.2 Задаци за рад 181
24.3 Задаци за домаћи рад 185

25 Елементарна геометрија 2 **187**
25.1 Задаци за рад 187
25.2 Задаци за домаћи рад 190

26 Неједнакости **193**
26.1 Теоријски увод 193
26.2 Задаци за рад 194
26.3 Задаци за домаћи рад 196

27 Рационални алгебарски изрази **198**
27.1 Задаци за рад 198
27.2 Задаци за домаћи рад 200

28 Теорија игара **203**
28.1 Теоријски увод 203
28.2 Задаци за рад 203
28.3 Задаци за домаћи рад 210

29 Нестандардни задаци из теорије бројева **212**
29.1 Теоријски увод 212
29.2 Задаци за рад 212
29.3 Задаци за домаћи рад 215

30 Рачунске методе у геометрији **218**
30.1 Теоријски увод 218
30.2 Задаци за рад 218
30.3 Задаци за домаћи рад 221

IV Предавања за 8. разред 223

31 Целобројна решетка 224
31.1 Теоријски увод . . . 224
31.2 Задаци за рад . . . 225
31.3 Задаци за домаћи рад . . . 230

32 Основне функције теорије бројева 233
32.1 Теоријски увод . . . 233
32.2 Задаци за рад . . . 233
32.3 Задаци за домаћи рад . . . 235

33 Дељивост 237
33.1 Теоријски увод . . . 237
33.2 Задаци за рад . . . 238
33.3 Задаци за домаћи рад . . . 240

34 Елементарна геометрија 1 242
34.1 Теоријски увод . . . 242
34.2 Задаци за рад . . . 242
34.3 Задаци за домаћи рад . . . 244

35 Елементарна геометрија 2 247
35.1 Теоријски увод . . . 247
35.2 Задаци за рад . . . 247
35.3 Задаци за домаћи рад . . . 251

36 Логичко-комбинаторни задаци (Дирихлеов и екстремални принцип) 253
36.1 Теоријски увод . . . 253
36.2 Задаци за рад . . . 253
36.3 Задаци за домаћи рад . . . 257

37 Математичка индукција 259
37.1 Теоријски увод . . . 259
37.2 Задаци за рад . . . 260
37.3 Задаци за домаћи рад . . . 265

38 Пребројавања 267
38.1 Теоријски увод . . . 267
38.2 Задаци за рад . . . 267
38.3 Задаци за домаћи рад . . . 271

39 Стереометрија 273
39.1 Теоријски увод . . . 273
39.2 Задаци за рад . . . 275
39.3 Задаци за домаћи рад . . . 277

40 Теорија графова **279**
40.1 Теоријски увод . . . 279
40.2 Задаци за рад . . . 280
40.3 Задаци за домаћи рад . . . 284

41 Логичко-комбинаторни задаци (бојења и инваријанте) **286**
41.1 Задаци за рад . . . 286
41.2 Задаци за домаћи рад . . . 290

42 Неједнакости **292**
42.1 Теоријски увод . . . 292
42.2 Задаци за рад . . . 293
42.3 Задаци за домаћи рад . . . 295

43 Диофантове једначине **298**
43.1 Теоријски увод . . . 298
43.2 Задаци за рад . . . 298
43.3 Задаци за домаћи рад . . . 301

44 Нестандарни задаци из теорије бројева **303**
44.1 Теоријски увод . . . 303
44.2 Задаци за рад . . . 303
44.3 Задаци за домаћи рад . . . 306

45 Полиноми **309**
45.1 Теоријски увод . . . 309
45.2 Задаци за рад . . . 309
45.3 Задаци за домаћи рад . . . 312

46 Рачунске методе у геометрији **314**
46.1 Теоријски увод . . . 314
46.2 Задаци за рад . . . 314
46.3 Задаци за домаћи рад . . . 317

V Предавања за 7. разред **319**

47 Дељивост и конгруенције **320**
47.1 Теоријски увод . . . 320
47.2 Задаци за рад . . . 322
47.3 Задаци за домаћи рад . . . 324

48 Дељивост и конгруенције 2 **326**
48.1 Задаци за рад . . . 326
48.2 Задаци за домаћи рад . . . 328

49 Логичко-комбинаторни задаци (инваријанте и бојења) 330
49.1 Теоријски увод 330
49.2 Задаци за рад 331
49.3 Задаци за домаћи рад 335

50 Полиноми 337
50.1 Теорјски увод 337
50.2 Задаци за рад 338
50.3 Задаци за домаћи рад 341

51 Пребројавања 343
51.1 Теоријски увод 343
51.2 Задаци за рад 343
51.3 Задаци за домаћи рад 346

52 Степени 348
52.1 Теоријски увод 348
52.2 Задаци за рад 348
52.3 Задаци за домаћи рад 350

53 Да ли је број рационалан или није? 352
53.1 Теоријски увод 352
53.2 Задаци за рад 352
53.3 Задаци за домаћи рад 357

54 Елементарна геометрија 1 - подударност 359
54.1 Теоријски увод 359
54.2 Задаци за рад 359
54.3 Задаци за домаћи рад 362

55 Елементарна геометрија 2 - круг 364
55.1 Теоријски увод 364
55.2 Задаци за рад 364
55.3 Задаци за домаћи рад 367

56 Елементарна геометрија 3 - четвороугао 369
56.1 Теоријски увод 369
56.2 Задаци за рад 370
56.3 Задаци за домаћи рад 372

57 Рачунање и докази у геометрији 2 (Питагорина теорема) 374
57.1 Теоријски увод 374
57.2 Задаци за рад 374
57.3 Задаци за домаћи рад 377

58 Дирихлеов принцип **379**
58.1 Задаци за рад 379
58.2 Задаци за домаћи рад 382

59 Многоугао **384**
59.1 Теоријски увод 384
59.2 Задаци за рад 384
59.3 Задаци за домаћи рад 388

60 Рачунање и докази у геометрији (Питагорина теорема) **390**
60.1 Теоријски увод 390
60.2 Задаци за рад 390
60.3 Задаци за домаћи рад 392

61 Једнакости површина **395**
61.1 Теоријски увод 395
61.2 Задаци за рад 395
61.3 Задаци за домаћи рад 398

VI Предавања за 6. разред **400**

62 Елементарна геометрија 1 (подударност) **401**
62.1 Ставови о подударности 401
62.2 Задаци за рад 401
62.3 Задаци за домаћи рад 404

63 Елементарна геометрија 2 (подударност) **406**
63.1 Теоријски увод 406
63.2 Задаци за рад 407
63.3 Задаци за домаћи рад 409

64 Осна симетрија **412**
64.1 Теоријски увод 412
64.2 Задаци за рад 413
64.3 Задаци за домаћи рад 418

65 Пребројавања са стилом **420**
65.1 Задаци за рад 420
65.1.1 Геометријска пребројавања 420
65.1.2 Пребројвања 421
65.2 Задаци за домаћи рад 422

66 Скуп целих бројева **425**
66.1 Теоријски увод 425
66.2 Задаци за рад 425
66.3 Задаци за домаћи рад 428

67 Задаци везани за кретање **430**
67.1 Теоријски увод 430
67.2 Задаци за рад 430
67.3 Задаци за домаћи рад 432

68 Логичко-комбинаторни задаци (графови, логички) **435**
68.1 Терийски увод 435
68.2 Задаци за рад 436
68.3 Задаци за домаћи рад 440

69 Рационални бројеви **443**
69.1 Теоријски увод 443
69.2 Задаци за рад 443
69.3 Задаци за домаћи рад 446

70 Троугао **448**
70.1 Теоријски увод 448
70.2 Задаци за рад 449
70.3 Задаци за домаћи рад 452

71 Апсолутне вредности **454**
71.1 Теоријски увод 454
71.2 Задаци за рад 454
71.3 Задаци за домаћи рад 455

72 Примена Диофантових једначина **458**
72.1 Теоријски увод 458
72.2 Задаци за рад 458
72.3 Задаци за домаћи рад 461

73 Задаци везани за часовник **463**
73.1 Задаци за рад 463
73.2 Задаци за домаћи рад 465

74 Дељивост и прости бројеви **468**
74.1 Теоријски увод 468
74.2 Задаци за рад 469
74.3 Задаци за домаћи рад 471

75 Дирхлеов принцип **474**
75.1 Теоријски увод 474
75.2 Задаци за рад 474
75.3 Задаци за домаћи рад 477

VII Предавања за 5. разред **479**

76 Проблемски задаци са једначинама **480**
76.1 Теоријски увод . . . 480
76.2 Задаци за рад . . . 480
76.3 Задаци за домаћи рад . . . 483

77 Дељивост **485**
77.1 Теоријски увод . . . 485
77.2 Задаци за рад . . . 485
77.3 Задаци за домаћи рад . . . 488

78 Прости бројеви **490**
78.1 Теоријски увод . . . 490
78.2 Задаци за рад . . . 490
78.3 Задаци за домаћи рад . . . 492

79 Скупови **495**
79.1 Теоријски увод . . . 495
79.2 Задаци за рад . . . 495
79.3 Задаци за домаћи рад . . . 498

80 Задаци везани за кретање **500**
80.1 Теоријски увод . . . 500
80.2 Задаци за рад . . . 500
80.3 Задаци за домаћи рад . . . 502

81 Дирихлеов принцип **504**
81.1 Теоријски увод . . . 504
81.2 Задаци за рад . . . 504
81.3 Задаци за домаћи рад . . . 506

82 Елементарне Диофантове једначине **508**
82.1 Теоријски увод . . . 508
82.2 Задаци за рад . . . 509
82.3 Задаци за домаћи рад . . . 511

83 Графови **514**
83.1 Задаци за рад . . . 514
83.2 Задаци за домаћи рад . . . 517

84 Пребројавања **519**
84.1 Задаци за рад . . . 519
84.2 Задаци за домаћи рад . . . 522

85 Скупови (Венови дијаграми, примена) 524
85.1 Задаци за рад . . . 524
85.2 Задаци за домаћи рад . . . 529

86 Углови 531
86.1 Теоријски увод . . . 531
86.2 Задаци за рад . . . 531
86.3 Задаци за домаћи рад . . . 533

87 Највећи заједнички делилац и најмањи заједнички садржалац535
87.1 Теоријски увод . . . 535
87.2 Задаци за рад . . . 535
87.3 Задаци за домаћи рад . . . 537

88 Разломци (операције и једначине) 540
88.1 Теоријски увод . . . 540
88.2 Задаци за рад . . . 540
88.3 Задаци за домаћи рад . . . 542

89 Разломци (проширивање, скраћивање и упоређивање) 545
89.1 Теоријски увод . . . 545
89.2 Задаци за рад . . . 545
89.3 Задаци за домаћи рад . . . 548

90 Правоугаоник и квадрат (проблеми обима и површине) 550
90.1 Теоријски увод . . . 550
90.2 Задаци за рад . . . 550
90.3 Задаци за домаћи рад . . . 552

VIII Предавања за 4. разред 555

91 Дешифровања 556
91.1 Теоријски увод . . . 556
91.2 Задаци за рад . . . 556
91.3 Задаци за домаћи рад . . . 559

92 Проблеми обима и површине 561
92.1 Теоријски увод . . . 561
92.2 Задаци за рад . . . 561
92.3 Задаци за домаћи рад . . . 563

93 Задаци сустизања и престизања 566
93.1 Теоријски увод . . . 566
93.2 Задаци за рад . . . 566
93.3 Задаци за домаћи рад . . . 568

94 Задаци везани за кретање 571
94.1 Теоријски увод 571
94.2 Задаци за рад 571
94.3 Задаци за домаћи рад 573

95 Једначине и изрази 576
95.1 Теоријски увод 576
95.2 Задаци за рад 576
95.3 Задаци за домаћи рад 578

96 Мерења и пресипања 580
96.1 Задаци за рад 580
96.2 Задаци за домаћи рад 583

97 Површине правоугаоника у решавању проблемских задатака 585
97.1 Теоријски увод 585
97.2 Задаци за рад 585
97.3 Задаци за домаћи рад 587

98 Пребројавање геометријских фигура 589
98.1 Теоријски увод 589
98.2 Задаци за рад 589
98.3 Задаци за домаћи рад 593

99 Пребројавања (низови, нумерације) 595
99.1 Задаци за рад 595
99.2 Задаци за домаћи рад 597

100 Проблемски задаци са једначинама 600
100.1 Задаци за рад 600
100.2 Задаци за домаћи рад 602

101 Конфигурације у геометрији са условима 604
101.1 Задаци за рад 604
101.2 Задаци за домаћи рад 607

102 Конструкције бројева помћу цифара и операција 609
102.1 Задаци за рад 609
102.2 Задаци за домаћи рад 610

103 Логичко-комбинаторни задаци 613
103.1 Задаци за рад 613
103.2 Задаци за домаћи рад 615

104 Проблемски задаци са једначинама 2 **617**
104.1Теоријски увод 617
104.2Задаци за рад 617
104.3Задаци за домаћи рад 619

105 Венови дијаграми **621**
105.1Теоријски увод 621
105.2Задаци за рад 622
105.3Задаци за домаћи рад 625

Део I

Предавања за професоре

Предавање 1

Примитивни корени

Душан Милијанчевић, Математичка гимназија

1.1 Увод

У овом одељку приказаћемо неопходан теоријски материјал потребан за праћење рада. За почетак дефинишимо једну од најзначајнијих релација у скупу целих бројева, релацију конгруенције.

Дефиниција 1. Кажемо да су цели бројеви a и b конгруентни по модулу n ($n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$) и пишемо $a \equiv_n b$ ако важи $n|a-b$.

Релација конгруенције има веома сличне особине као и релација једнакости и сада ћемо доказати неке од њих.

Теорема 1. Ако су a, b, c, d цели бројеве и $n \in \mathbf{Z}\{0\}$ онда важи:

1° $a \equiv_n a$.

2° Ако је $a \equiv_n b$, онда је и $b \equiv_n a$.

3° Ако је $a \equiv_n b$ и $b \equiv_n c$, онда је $a \equiv_n c$.

4° Ако је $a \equiv_n b$ и $c \equiv_n d$, онда је $a + c \equiv_n b + d$ и $ac \equiv_n bd$.

5° Ако је $a \equiv_n b$, онда је $a^k \equiv_n b^k$ за сваки природан број k.

6° Ако је $ad \equiv_n bd$ и $d \neq 0$, онда је $a \equiv_{\frac{n}{(n,d)}} b$, где је (n, d) ознака за највећи заједнички делилац бројева n и d.

Доказ:

1° Доказ следи из дефиниције релације конгруенције.

2° Како је $a \equiv_n b$, то је $a = kn+b$, за неки цео број k, па је $b = -kn+a$, односно $b \equiv_n a$.

3° Како је $a \equiv_n b$ то је $a = kn+b$, $k \in Z$ и како је $b \equiv_n c$ то је $b = tn+c$, $t \in Z$ и како је $b = -kn + a$ то је $-kn + a = tn + c$ па је $a = tn + kn + c$ односно $a = n(t + k) + c$ па је $a \equiv_n c$.

4° Како је $a \equiv_n b$ и $c \equiv_n d$ то је $a = kn + b$ и $c = tn + d$, за неке целе бројеве k и l, па је $a+c = kn+b+tn+d$. Онда је $a+c = (k+t)n+b+d$ тј. важи $a+c \equiv_n b+d$. Слично је и $ac = (kn+b)(tn+d) = ktn^2+knd+btn+bd = n(ktn + kd + bt) + bd$ односно $ac \equiv_n bd$.

5° Доказ ћемо извести методом математичке индукције. За $k = 1$ добијамо $a \equiv_n b$ што је услов задатка. Претпоставимо да теорема важи за $k = r$ и доказаћмо да важи за $k = r + 1$. Онда је $a^r \equiv_n b^r$, па користећи Теорему 1 под 4 добијамо $a^r \cdot a \equiv_n b^r \cdot b$, односно $a^{r+1} \equiv_n b^{r+1}$ чиме је доказан индукцијски корак, па самим тим и тражено тврђење.

6° Како је $ad \equiv_n bd$ то је $ad = kn + bd$ за неки цео број k. Онда $d|kn$, односно $\frac{d}{(n,d)}|k\frac{n}{(n,d)}$. Пошто је $(\frac{d}{(n,d)}, \frac{n}{(n,d)}) = 1$, то важи $\frac{d}{(n,d)}|k$, па постоји цео број l такав да је $k = l\frac{d}{(n,d)}$. Онда је $ad = \frac{lnd}{(n,d)} + bd$, па је $a = \frac{ln}{(n,d)} + b$, односно $a \equiv_{\frac{n}{(n,d)}} +b$. $\triangle$

Докажимо лему које ћемо користити у доказу Ојлерове теореме.

Лема 1. Нека је $n \in \mathbf{N}$ и $(a, n) = 1$ $(a \in \mathbf{Z})$. Ако су $a_1, a_2, ..., a_{\varphi(n)}$ природни бројеви мањи од n и узајамо прости са n, онда су бројеви $aa_1, aa_2, ..., aa_{\varphi(n)}$ конгруентни бројевима $a_1, a_2, ..., a_{\varphi(n)}$ по модулу n у неком редоследу (овакав скуп бројева назива се редукован систем остатака по модулу m).

Доказ: Докажимо да сваки од бројева $aa_1, aa_2, ..., aa_{\varphi(n)}$ даје различит остатак при дељењу са n. Претпоставимо супротно тј. да је $aa_i \equiv_n aa_j$, за неке $1 \leq i < j \leq \varphi(n)$. Онда $a|a(a_i - a_j)$, па због $(a, n) = 1$ добијамо $a_i \equiv_n a_j$, што је контрадикција са избором бројева a_i и a_j. Овим је лема доказан.$\triangle$

Дефиниција 2. Функција која сваком природном броју n додељује број природних бројева који нису већи од n и узајамно су прости са n назива се Ојлерова функиција и обележава се са $\varphi(n)$.

Дефиницију Ојлерове функције илуструјемо примерима. $\varphi(8) = 4$ јер су бројеви $1, 3, 5$ и 7 узајамно прости са 8 (а $2, 4, 6, 8$ нису), $\varphi(7) = 6$ јер су бројеви $1, 2, 3, 4, 5$ и 6 узајмно прости са 7 (а 7 није).

Теорема 2. (Ојлерова теорема) Ако је n природан број и $(a, n) = 1$ онда је $a^{\varphi(n)} \equiv_n 1$.

Доказ: Нека су $a_1, a_2, ..., a_{\varphi_{(n)}}$ природни бројеви не већи од n и узајамо прости са n. Како је $(a, n) = 1$ из Леме 1 имамо да су бројеви $aa_1, aa_2, ..., aa_{\varphi_{(n)}}$ конгруентни бројевима $a_1, a_2, ..., a_{\varphi_{(n)}}$ по модулу n у неком редоследу. Онда $aa_1 \equiv_n a'_1$, $aa_2 \equiv_n a'_2$, ... $aa_{\varphi(n)} \equiv_n a'_{\varphi(n)}$, где су бројеви $a'_1, a'_2, ..., a'_{\varphi_{(n)}}$ бројеви $a_1, a_2, ..., a_{\varphi_{(n)}}$ у неком редоследу. Узимајући производ датих конгуренција добијамо

$$(aa_1)(aa_2)...(aa_{\varphi_{(n)}}) \equiv_n a'_1 a'_2 ... a'_{\varphi_{(n)}} \equiv_n a_1 a_2 ... a_{\varphi_{(n)}},$$

па је $a^{\varphi(n)} a_1 a_2 ... a_{\varphi_{(n)}} \equiv_n a_1 a_2 ... a_{\varphi_{(n)}}$. Како је $(a_i, n) = 1$ за $1 \leq i \leq \varphi(n)$, то је $(a_1 a_2 ... a_{\varphi_{(n)}}, n) = 1$, па скраћивањем последње конгруенције добијамо $a^{\varphi(n)} \equiv_n 1$, што је требало доказати. $\triangle$

Приметимо да за прост број p важи $\varphi(p) = p - 1$, па је $a^{p-1} \equiv_p 1$ ако p не дели a, што је Мала Фермаова теорема. Дакле, Ојлерова теорема је уопштење Мале Фермаове теореме.

Дефиниција 3. Ако су цели бројеви a и n узајамно прости, поредак броја a по модулу n је најмањи природан број k такав да је $a^k \equiv_n 1$.

Ради лакшег схватања дефиницију поретка илуструјемо примером. Поредак броја 2 по модулу 5 је 4 зато што $2^1 \equiv_5 2$, $2^2 \equiv_5 4$, $2^3 \equiv_5 3$, $2^4 \equiv_5 1$.

Сада ћемо доказати неколико својстава поретка по модулу.

Теорема 3. Ако је поредак броја a по модулу n једнак k онда $a^l \equiv_n 1$ $(l \in \mathbf{N})$, ако и само ако $k|l$.

Доказ: Прво ћемо доказати да ако је $a^l \equiv_n 1$, онда $k|l$. Претпоставимо супротно да је $l = kx + r$ и $0 < r < k$, за неке $x, r \in \mathbf{N}_0$. Онда је $a^l = a^{kx+r} = a^{kx} \cdot a^r = (a^k)^x \cdot a^r$, па како је $a^k \equiv_n 1$ онда је и $(a^k)^x \equiv_n 1$. Због $a^l \equiv_n 1$ добијамо $a^l \equiv_n (a^k)^x \cdot a^r \equiv_n a^r$, односно $a^r \equiv_n 1$ па како је $r < k$ добијамо контрадикцију са претпоставком да је k поредак броја a по модулу n. Дакле $k|l$ што је и требало доказати. Сада ћемо доказати да ако $k|l$ онда и $a^l \equiv_n 1$. Нека је $l = tk$ за неко природно t. Сада је $a^l = a^{tk} = (a^k)^t$ и како је $a^k \equiv_n 1$, то је и $a^l \equiv_n 1$ што је и требало доказати. $\triangle$

Теорема 4. Ако је поредак броја a по модулу n једнак k, онда је $a^i \equiv_n a^j$, ако и само ако $i \equiv_k j$.

Доказ: Прво ћемо доказати да ако је $a^i \equiv_n a^j$, онда је $i \equiv_k j$. Како је $a^i \equiv_n a^j$ и a^j и n су узајамно прости(зато што су и a и n узајамно прости), можемо написати $a^{i-j} \equiv_n 1$, па по Теореми 2. добијамо $k|(i-j)$ односно $i \equiv_k j$ по дефиницији релације конгруенције. Сада ћемо доказати да ако је $i \equiv_k j$ онда је и $a^i \equiv_n a^j$. Како је $i \equiv_k j$ то $k|(i-j)$, па по Теореми 2. имамо да је $a^{(i-j)} \equiv_n 1$. Множењем са a^j обе стране конгруенције добијамо $a^i \equiv_n a^j$, што је и требало доказати. $\triangle$

Теорема 5. Ако цео број a има поредак k по модулу n ($n \in Z \setminus \{0\}$), онда бројеви a, a^2, ..., a^k дају сви различите остатке при дељењу са n.

Доказ: Заиста ако то не би било тачно односно ако би постојали различити бројеви i и j такви да $a^i \equiv_n a^j$ и $0 < i, j < k$ према претходној теореми бисмо имали да је $i \equiv_k j$ и како $0 < i, j < k$, односно $i = j$, што је немогуће.

У даљем тексту ћемо користити ознаку $ord_n(a)$ за поредак броја a по модулу n.

Дефиниција 4. Ако је поредак броја a по модулу m ($m \in N \setminus \{0\}$) једнак $\varphi(m)$ тада се број a назива примитивни корен по модулу m.

1.2 Модули по којима постоје примитивни корени

Примитивни корени не постоје по свим модулума, што се једноставно може проверити. За почетак ћемо доказати да по сваком простом модулу постоји примитивни корен.

Теорема 6. Za svaki prost broj p postoji primitivan korena po tom modulu.

Доказ: У даљем доказу претпостављамо да је p непаран прост број, јер је случај $p = 2$ тривијалан (1 је примитиван корен по модулу 2). Докажимо леме које ћемо користити у доказу.

Лема 2. Нека је $ord_p(a) = k$ и нека за неки природан број d важи $d|k$. Тада постоји $c \in \mathbf{Z}_p$ такво да је $ord_p(c) = d$.

Доказ: Докажимо да је $ord_p(a^{\frac{k}{d}}) = d$. Нека је $ord_p(a^{\frac{k}{d}}) = m$. Онда је $a^{\frac{km}{d}} \equiv_p 1$, па $k|\frac{km}{d}$, односно $d|m$. Како је $(a^{\frac{k}{d}})^d \equiv_p a^k \equiv_p 1$, то је заиста $ord_p(a^{\frac{k}{d}}) = d$.$\triangle$

Лема 3. Нека је $ord_p(a) = k$, $ord_p(b) = l$ и $(k,l) = 1$. Тада постоји $c \in \mathbf{Z}_p$ такво да је $ord_p(c) = kl$.

Доказ: Докажимо да је $ord_p(ab) = kl$. Нека је $ord_p(ab) = m$. Онда је $a^m b^m \equiv_p 1$, па је и $a^{km} b^{km} \equiv_p 1$ из чега следи да је $b^{km} \equiv_p 1$, односно $l|km$. Како је $(k,l) = 1$ закључујемо да $l|m$, а слично се добија да и $k|m$. Због $(k,l) = 1$ имамо $kl|m$. Како је $(ab)^{kl} \equiv_p (a^k)^l (b^l)^k \equiv_p 1$, то је заиста $ord_p(ab) = kl$.

Лема 4. Нека је $ord_p(a) = k$, $ord_p(b) = l$. Тада постоји $c \in \mathbf{Z}_p$ такво да је $ord_p(c) = [k,l]$.

Доказ: Нека је $[k,l] = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_n^{a_n}$ растављање броја $[k,l]$ на просте чиниоце. На основу претходне леме постоје низ природних бројева $b_1, b_2, ..., b_n$ таквих да је $ord_p(b_i) = p_i^{a_i}$ за $1 \leq i \leq n$. Користећи претходну лему због $(p_1^{a_1}, p_2^{a_2}) = 1$ то постоји природан број чији је поредак $p_1^{a_1} p_2^{a_2}$. Сличним поступком због $(p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_i^{a_i}, p_{i+1}^{a_{i+1}}) = 1$ за $1 \leq i \leq n-1$ добијамо да постоји природан број чији је поредак $[k,l]$ чиме завршавамо доказ.

Пређимо на доказ теореме. Нека је m најмањи природан број такав да је $x^m \equiv_p 1$ за све $m \in \mathbf{Z}_p$. Онда за $M = [ord_p(1), ord_p(2), ..., ord_p(p-1)]$ важи $M|m$, зато што постоји $c \in \mathbf{Z}_p$ такав да је $ord_p(c) = M$. Како је $x^M \equiv_p 1$ за све $x =\in \mathbf{Z}_p$ то $m|M$. Из овога закључујемо да је $m = M$. Довољно је показти да је $m = p-1$.

Због Ојлерове теореме имамо да $m|p-1$, односно да је $p-1 \geq m$. Полином $P(x) = x^m - 1$, $P(x) \in \mathbf{Z}_p[x]$ има највише m нула у $\mathbf{Z}_p$, а како је $P(i) \equiv_p 0$ за $i \in \mathbf{Z}_p$ то је $m \geq p-1$, па је $m = p-1$, чиме завршавамо доказ. $\triangle$

На основу ове теореме можемо извести и постојање примитивних корена по модулу p^k, где је p непаран прост број и $k \in \mathbf{N}$.

Теорема 7. За сваки број облика p^k, где је p непаран прост број, а $k \in \mathbf{N}$ постоји примитивни корен по том модулу.

Доказ: Прво ћемо показати да постоји примитвни корен по модулу p^2, пошто постоји примитивни корен по модулу p (**Teorema 4.**). Претпоставимо да g и $g+p$ нису примитвни корени по модулу p^2, где је g примитиван корен по модулу p. Имамо да $p-1|ord_{p^2}(g)$. Како $ord_{p^2}(g)|p(p-1)$, а g није примитивни корен по p^2, то је $ord_{p^2}(g) = p-1$. Слично се добија да је $ord_{p^2}(g+p) = p-1$. Онда је $1 \equiv_{p^2} (g+p)^{p-1} \equiv_{p^2} \binom{p-1}{1} g^{p-2} p + \binom{p-1}{0} g^{p-1} \equiv_{p^2} -pg^{p-2} + g^{p-1}$, из чега добијамо да је $-pg^{p-2} \equiv_{p^2} 0$, односно $p|g$, што је контрадикција. Значи постоји примитвни корен по модулу p^2.

У наставку доказа прво доказујемо једну лему.

Лема 5. Ако је h примитвни корен по модулу p^2, онда је $h^{\varphi(p^k)} \not\equiv_{p^{k+1}} 1$, за $h \in \mathbf{N}$.

Доказ: Тврђење леме доказујемо математичком индукцијом по k. База индукције $k = 1$ је очигледна јер је h већ примитивни корен по модулу p^2. Претпоставимо да тврђење важи за неко $k \in \mathbf{N}$. Онда је $h^{\varphi(p^k)} = 1 + ap^k$, за неко $a \in \mathbf{N}$ за које је $(a, p) = 1$. Из овога следи да је $h^{\varphi(p^{k+1})} = (1 + ap^k)^p \equiv_{p^{k+2}} \binom{p}{1} ap^k + \binom{p}{0} \equiv_{p^{k+2}} ap^{k+1} + 1$. Претпоставимо да је $ap^{k+1} + 1 \equiv_{p^{k+2}} 1$. Из овога следи да $p|a$ што је контрадикција. Овим је лема доказана.$\triangle$

Сада ћемо показати да је примитивни корен h по модулу p^2 уједно и примитивни корен по модулу p^k за $k \in \mathbf{N}, k \geq 2$ математичком индукцијом по k. База инудкције је очигледна. Претпоставимо да је h примитивни корен по модулу p^k за неко $k \in \mathbf{N}, k \geq 2$. Онда је $ord_{p^{k+1}}(h)|p^k(p-1)$ и $p^{k-1}(p-1)|h$, па је $ord_{p^{k+1}}(h) = p^{k-1}(p-1)$ или $ord_{p^{k+1}}(h) = p^k(p-1)$. Ако је $ord_{p^{k+1}}(h) = p^k(p-1)$ онда је h примитивни корен по модулу p^{k+1} што је и требало доказати. Међутим, ако је $ord_{p^{k+1}}(h) = p^{k-1}(p-1)$ онда је $h^{\varphi(p^k)} \equiv_{p^{k+1}} 1$, што је у контрадикцији са претходном. Овим је доказ завршен.$\triangle$

Комбинацијом претходних теорема добијамо следеће уопштење.

Теорема 8. Примитивни корени постоје по модулима $1, 2, 4, p^k, 2p^k$ где је p непаран прост број, а $k \in \mathbf{N}$.

Доказ: Није тешко проверити да је 1 примитивни корен по модулима 1 и 2, а 3 примитивни корен по модулу 4. Такође из Теореме 4 следи постојање примитивног корена по модулу p^k, што је очигледно и примитиван корен по модулу $2p^k$.$\triangle$

Природно се поставља питање да ли постоји још неки модул сем наведених по којима постоји примитивни корен. Следећа теорема даје негативан одговор на то питање.

Теорема 9. Примитивни корени постоје само по модулима $1, 2, 4, p^k$ и $2p^k$ где је p непаран прост број и $k \in \mathbf{N}$.

Доказ: Као и у претходним доказима на почетку доказујемо помоћно тврђење.

Лема 6. Нека су m и n узајамно прости природни бројеви већи од 2. Онда не постоји примитивни корен по модулу mn.

Доказ: Пошто је $m, n > 2$ то су $\varphi(m)$ и $\varphi(n)$ парни бројеви. Претпоставимо да постоји примитивни корен g по модулу mn. Онда важи $g^{\frac{\varphi(m)\varphi(n)}{2}} \equiv_m (g^{\varphi(m)})^{\frac{\varphi(n)}{2}} \equiv_m 1$. Слично је и $g^{\frac{\varphi(m)\varphi(n)}{2}} \equiv_n 1$, па због $(m, n) = 1$ важи $g^{\frac{\varphi(mn)}{2}} \equiv_{mn} 1$. Из овога следи да g не може да буде примитивни корен по модулу mn што је контрадицкија.

Из овога следи да примитивни корени могу постојати само по модулима $1, 2, 4, 8, p^k, 2p^k, 4p^k$, где је p непаран прост број и $k \in \mathbf{N}$. Из Теореме 6 следи да је довољно доказати да примитивни корени не постоје по модулима $8, 4p^k$. Како је $ord_8(1) = ord_8(3) = ord_8(5) = ord_8(7) = 2$, не постоји примитивни корен по модулу 8. Претпоставимо да постоји примитиван корен g по модулу $4p^k$. Онда је $ord_{4p^k}(g) = 2p^{k-1}(p-1)$. Како је $g^{p^{k-1}(p-1)} \equiv_{p^k} 1$ и $(g^{2p^k})^{\frac{p-1}{2}} \equiv_4 1$, то је $ord_{4p^k}(g) \leq p^{k-1}(p-1)$, што је контрадикција. Овим је доказ завршен.$\triangle$

1.3 Основне особине примитивних корена

Сада ћемо доказатаих неколико основних својстава примитивних корена.

Теорема 10. Нека је g примитиван корен по простом модулу $p > 2$. Онда је $g^{\frac{p-1}{2}} \equiv_p -1$.

Доказ: Имамо да је $(g^{\frac{p-1}{2}})^2 \equiv_p 1$, $p|(g^{\frac{p-1}{2}}+1)(g^{\frac{p-1}{2}}-1)$. Ако $p|g^{\frac{p-1}{2}}-1$, добијамо да је $g^{\frac{p-1}{2}} \equiv_p 1$, што је немогуће јер је поредак број g по модулу p једнак $p-1$. Значи $p|g^{\frac{p-1}{2}}+1$, па је $g^{\frac{p-1}{2}} \equiv_p -1$, што је и требало доказати.

Теорема 11. Ако по модулу m $(m \in \mathbf{N})$ постоји примитивни корен g тада бројеви g^i за $1 \leq i \leq \varphi(m)$ чине редукован систем остатака по модулу m.

Доказ: Број елемената редукованог система остатака по модулу m је $\varphi(m)$, па је довољно доказати да међу елементима g^i, за $1 \leq i \leq \varphi(m)$ нема једнаких по модулу m. Претпоставимо супротно, тј. да је $g^i \equiv_m g^j$, за неке $1 \leq i < j \leq \varphi(m)$ и $i \neq j$. Онда $m|g^i(g^{j-i}-1)$, а како је $(m, g^i) = 1$ добијамо да $m|g^{j-i}-1$, односно да је $ord_m(g) \leq j-i$. Како је $0 < j-i < \varphi(m)$ добијамо контрадикцију, чиме смо завршили доказ.$\triangle$

Теорема 12. Ако је g примитиван корен по модулу m, онда је и његов инверз g' примитиван корен по модулу m.

Доказ: Нека је $ord_m(g') = x$ $(1 \leq x \leq \varphi(m))$. Онда је $g'^x \equiv_m 1$, па је и $g^{\varphi(m)}g'^x \equiv_1$. Међутим, $g^{\varphi(m)}g'^x \equiv_m g^{\varphi(m)-x} \equiv_m 1$, из чега закључујемо да је $x = \varphi(m)$, па је и g' примитивни корен по модулу m.

Теорема 13. Нека је g примитивни корен по модулу m. Тада је и g^k примитивни корен модулу m ако и само ако је $(k, \varphi(m)) = 1$.

Доказ: Нека је $(k, \varphi(m)) = 1$ и $ord_m(g^k) = l$. Онда је $g^{kl} \equiv_m 1$, па $\varphi(m)|kl$. Због $(k, \varphi(m)) = 1$ добијамо да $\varphi(m)|l$, а како је $(g^k)^{\varphi(m)} \equiv_m 1$ то је $l = \varphi(m)$, па је g^k заиста примитиван корен по модулу m.

Нека је g^k примитивни корен по модулу m и нека је $(k, \varphi(m)) = d$. Онда је $(g^k)^{\frac{\varphi(m)}{d}} \equiv_m (g^{\varphi(m)})^{\frac{k}{d}} \equiv_m 1$, што повлачи да је $ord_m(g^k) = \varphi(m) \leq \frac{\varphi(m)}{d}$, из чега следи да је $d = 1$, што је и требало доказати.$\triangle$

Теорема 14. Ако по модулу m постоји примитивни корен онда постоји тачно $\varphi(\varphi(m))$ примитивних корена по том модулу између 0 и m.

Доказ: Нека је g примитиван корен по модулу m. Како скуп бројева $g^i mod\ m$ за $0 \leq i \leq \varphi(m)$ по **Teoremi 9.** обухвата све елементе редукованог система остатака по модулу m, он обухвата и све примитивни корене по модулу m. По Теореми 11. g^i је примитивни корен ако и само ако је $(i, \varphi(m)) = 1$. Бројева i, $1 \leq i \leq \varphi(m) - 1$ које важи претходна релација има тачно $\varphi(\varphi(m))$, па толико има и примитивних корена по модулу m.$\triangle$

1.4 Проблеми у вежи са примитивним коренима

У овом одељку приказаћемо неке занимљиве проблеме у вези са примитивним коренима.

Задатак 1. Нека је g примитивни корен по простом модулу $p > 3$, за који важи $p|g^2 - g - 1$. Доказати да је

а) $g - 1$ је такође примитивни корен по модулу p;
б) Ако је $p = 4k + 3$ (за неко $k \in \mathbf{N}_0$) онда је и $g - 2$ примитиван корен по модулу p.

Решење: Како је $g(g-1) \equiv_p g^2 - g \equiv_p 1$, то је $g - 1$ инверз од g по модулу p, па је и $g-1$ примитивни корен Теореми 10, чиме је завршен задатак под а). Пошто је $g - 1$ примитивни корен по модулу p то је $(g-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv_p -1$, па важи

$$(g-1)^{2k+3} \equiv_p (g-1)^2 \cdot (g-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv_p -(g^2-2g+1) \equiv_p g-2.$$

По Теореми 11 довољно је доказати да је $(2k+3, p-1) = 1$, тј. да је $(2k+3, 4k+2) = 1$ што је очигледно тачно.

Задатак 2. Нека је $p > 3$ прост број. Доказати да производ примитивних корена g по модулу p таквих да је $1 \le g \le p-1$ даје остатак 1 при дељењу са p.

Решење: Ако је g примитивни корен, онда је и његов инверз g' такође примитиван корен по модулу p Теореми 10. Довољно је доказати да је $g \not\equiv_p g'$. Претпоставимо да је $g \equiv_p g'$. Онда је $g^2 \equiv_p 1$, а како је $p-1 > 2$, то је контрадикција са избором броја g. Овим смо доказали тврђење задатка.

Задатак 3. Нека је n природан број. Доказати да постоји бесконачно много простих бројева p таквих да је најмањи позитиван примитиван корен по модулу p већи од n.

Решење овог проблема користи једну неелемнтарну теорему, па га нећемо овде наводити.

1.5 Примена примитивних корена

У овом одељку приказаћемо како се помоћу наведене теорије о примитивним коренима могу на једноставан начин доказати разне ствари из теорије бројева.

1. (Вилсонова теорема) Ако је p број онда је

$$(p-1)! \equiv_p -1.$$

Доказ: Нека је g примитиван корен по модулу p. Онда по Теореми 9. важи

$$(p-1)! \equiv_p g^{0+1+\ldots+p-2} \equiv_p g^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}}.$$

На основу Теореме 8. је $g^{\frac{p-1}{2}} \equiv_p -1$, па је $g^{\frac{(p-1)(p-2)}{2}} \equiv_p -1$, што завршава доказ теореме.$\triangle$

2. Нека је $S_k = \sum_{i=1}^{p-1} i^k$, за неки непаран прост број p и $k \in \mathbf{N}$. Наћи остатак од S_k при дељењу p.

Решење: Нека је g примитиван корен по модулу p. Онда за свако $1 \le i \le p-1$ постоји јединствено $0 \le j \le p-2$ такво да је $g^j \equiv_p i$, па је

$$S_k = \sum_{i=0}^{p-2} g^{ki} = \frac{g^{k(p-1)} - 1}{g^k - 1}.$$

Ако $k|p-1$, онда је $S_k \equiv_p -1$, а ако $p-1 \not| k$, онда је $(g^k-1, p) = 1$, па је $S_k \equiv_p 0$, чиме смо завршили задатак.$\triangle$

3. За дати непаран прост број p наћи све функције $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ такве да важи
(1) $f(m) = f(n)$ за све $m, n \in \mathbf{Z}$ за које $m \equiv_p n$;
(2) $f(mn) = f(m)f(n)$ за све $m, n \in \mathbf{Z}$.

Решење: Означимо са g примитиван корен по модулу p. Из друге једнакости за $m = n = 0$ добијамо да је $f(0) = f(0)^2$, а за $m = n = 1$ добијамо $f(1) = f(1)^2$, па важи $f(0), f(1) \in \{0, 1\}$. Имамо следеће слуцхајеве:

(1) $f(1) = 0$: Онда је $f(m) = f(m)f(1) = 0$, па је $f(m) = 0$ за $m \in \mathbf{Z}$.

(2) $f(1) = 1$: Како је $g^{p-1} \equiv_1 p$, то је $f(g)^{p-1} = 1$, па је $f(g) \in \{-1, 1\}$, што нам поново даје случајеве:

(21) $f(g) = 1$: Онда је $f(g^i) = f(g)^i = 1$, чиме је одређена функција за све вредности аргумента које нису дељиви са p. Како је $f(0) \in \{0, 1\}$ добијамо две могућности $f(m) = 1$ за све $m \in \mathbf{Z}$ или $f(m) = 1$ за $m \in \mathbf{Z}, p \not| n$ и $f(m) = 0$ за $p|n$.

(22) $f(g) = -1$: Онда је $f(0) = f(0 \cdot g) = -f(0)$, па је $f(0) = 0$. Такође је $f(g^k) = (-1)^k$, што одређује Лежандров симбол, па је $f(m) = (\frac{x}{p})$, тј. остатак од $x^{\frac{p-1}{2}}$ при дељењу са p.

Очигледно све ове функције испуњавају услове задатка, па су оне заиста решење. Овим смо завршили задатак.$\triangle$

4. Нека је p прост број већи од 3. Да ли је могуће распоредити бројеве $1, 2, ..., p-1$ у темена $p-1$-тоугла тако да за свака три суседна броја a, b, c таква да је b између a и c важи $p|b^2 - ac$.

Решење: Могуће је. Нека је g било који примитиван корен по модулу p. Број $g^{i-1} mod\ p$ ставимо у i-то теме многоугла за $1 \leq i \leq p-1$. Овим су по Теореми 9. обухваћени сви тражени бројеви. За узастопна три темена a, b, c важи $b^2 - ac = (g^i)^2 - g^{i-1}g^{i+1} \equiv_p 0$, што завршава задатак.$\triangle$

1.6 Два отворена проблема

1.6.1 Најмањи примитиван корен по простом модулу

Питање које се поставља после претходног проблема је одређивање најмањег примитивног корена по датом модулу. Оно што је занимљиво је да је ово још увек отворен проблем. Овде ћемо издвојити неке од значајнијих резултата из ове области. Наравно, нећемо наводити доказе ових теорема, јер су далеко од елементарних. Ради лакшег сналажења означимо са $g(p)$ најмањи позитиван примитиван корен по простом модулу p. Прва значајна теорема из ове области је следећа:

Теорема 15. (Виноградов, 1930) Важи следећа неједенакост (где је са m означен број различитих простих фактора од $p-1$):

$$g(p) \leq 2^m \frac{p-1}{\varphi(p-2)}\sqrt{p}.$$

Нешто касније направљено је побољшање у виду следеће теореме.

Теорема 16. (Хуа, 1942) Важи следећа неједенакост (где је са m означен број различитих простих фактора од $p-1$):

$$g(p) < 2^{m+1}\sqrt{p}.$$

Занимљиво је и напоменути то да уколико би се уопштена Риманова хипотеза показала тачном, из ње би се могло извести да је најмањи примитиван корен по простом модулу p није већи од $70(\ln p)^2$, што је много боља процена од наведених.

1.6.2 Артинова хипотеза

Једно од најзначајнијих питању у вези примитивних корена односи се на скуп бројева који имају цео број a за примитиван корен. Прву хипотезу о овом скупу поставио је Емил Артин у 1927. години. Формулација хипотезе је следећа:

Хипотеза 1. (Артин) Нека је a цео број различит од -1 који није потпун квадрат. Означимо са $S(a)$ скуп простих бројева који имају примитиван корен a. Тада $S(a)$ има позитивну густину у скупу простих бројева (што значи да је $S(a)$ бесконачан). Ако број a није дељив квадратом већим од 1 густина је независна од a и износи:

$$\prod(1-\frac{1}{p(p-1)}),$$

где се производ врши по свим простим бројевима.

Број из претходне дефиниције назива се Артинова константа.

У 1967. години Холеј је први доказао претходну хипотезу ослањајући се на специјалне случајеве уопштене Риманове хипотезе, чиме је хипотеза још увек остала отворена. У 1984. години двојица математичара Рам и Гупта показали су да је хипотеза тачна за бесконачно много бројева a. Највећи напредак у доказивању учинио је Рошер Хит-Браун показавши да постоје највише два проста броја за која је Артинова хипотеза нетачна. Иако је претходни математичар Ђскоро доказао хипотезу још увек се не зна за које просте бројеве је она можда нетачна. Оно што је занимљиво је да се још увек не зна ни једна вредност броја a за коју је она тачна.

Литература

[1] Д. Милијанчевић, В. Стојисављевић *Примитивни корени*, Регионални центар за таленте

Предавање 2

Тополошки простори и многострукости-интуитивни приступ

Лука Ненадовић, Висока технолошка школа, Шабац,

Alma mater: Физички факултет, Београд

Овим предавањем желео бих да дам релативно брз и интуитивно јасан опис тополошког простора. При томе се водим искључиво потребом да објасним због чега се уводи појам тополошког простора и намера ми је да текст буде више педагошки него комплетан. Овом приликом бих хтео да се захвалим Душану Милијанчевићу на корисним сугестијама при писању текста. Такође бих био јако захвалан свима онима који ме буду упозорили на грешке, са обзиром на то да је текст настао у веома кратком року. Све примедбе и сугестије су добродошле на lnenadovic@ipb.ac.rs.

2.1 Непрекидност

Да би се створила наивна слика непрекидности довољно је рећи да, ако неку функцију можемо да нацртамо, а да при томе не одвојимо креду од табле, онда је та функција нужно непрекидна. Најједноставнији пример је функција $f(x) = 1/x$. Ова функција није дефинисана за $x = 0$, тако да са сигурношћу не можемо да нацртамо график ове функције не дижући креду од табле. Да бисмо нацртали ову функција морамо да прескочимо нулу. Како бисмо строжије дефинисали непрекидност, неопходно је да функцију посматрамо локално. Потребно је уверити се да је функција непрекидна око сваке тачке свог домена.

Када цртамо график неке функције $f(x)$, ако је ова функција непрекидна у тачки x_0, ми можемо и ако не уцртамо тачку $f(x_0)$, захваљујући интуицији, да предвидимо коју вредност ће имати функција у тој тачки. У случају функције $f(x) = x^2$ то је очигледно јер је ова функција непрекидна. Размотримо, на пример, функцију дефинисану са:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ако } x \neq 0, \\ 1 & \text{ако } x = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Ова функција очигледно није непрекидна јер посматрајући околину тачке $x = 0$ ни на који начин не можемо да наслутимо да ће функција да скочи у тој тачки и да има вредност $f(0) = 1$. Наравно, да ће искусан математичар увек да претпостави и такву могућност. Ово је последица интуитивног ограничења и нееднозначности оваквог начина резоновања. Због тога је потребна строга и једнозначна дефиниција појма непрекидности.

Добар начин да стожије дефинишемо непрекидност јесте да посматрамо граничне вредности функције у околини неке тачке. Да бисмо видели да ли је нека функција непрекидна у тачки x_0, довољно је да посматрамо низ $x_1, x_2, x_3, \dots$ који конвергира у x_0 и да нађемо лимес низа $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$ па да очекујемо да ће то бити вредност функције f у тачки x_0.

На пример, за функцију:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{ако } x < 0, \\ 1 & \text{ако } x > 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

можемо да испитамо низ $x_n = \frac{1}{n}$ који конвергира у $x = 0$. Низ функција $f(x_n)$ тада конвергира ка $f(0) = 1$ и очекујемо да ће вредност функције у тачки $x = 0$ бити 1. Са друге стране можемо да испитамо понашање ове функције за низ $x_n = -\frac{1}{n}$ који такође конвергира ка $x = 0$, али са леве стране. После испитивања конвергенције функције закључујемо да низ функција конвергира у $f(0) = -1$. Из овог разматрања следи да не можемо да закључимо која је вредност функције у тачки $x = 0$, односно, можемо да закључимо да функција има прекид у $x = 0$.

Формално нам ни понашање низа не гарантује да ли ћемо моћи да кажемо да ли је функција непрекидна самим тим што није увек могуће наћи све низове који теже некој вредности аргумента функције. Зато ћемо применити следеће резоновање. Посматраћемо низ $x_1, x_2, x_3, \dots$ који се приближава тачки x_0 тако да се низ функција $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots$ све више приближава вредности $f(x_0)$. То значи да ако посматрамо вредности x које су све ближе тачки x_0, тада ће вредности $f(x)$ бити све ближе $f(x_0)$. Конкретно, ако узмемо било какав број ϵ, тада ако је x довољно близу x_0 разлика вредности функције $f(x)$ и $f(x_0)$ мора бити мања од тог броја ϵ. Одатле следи да, ако је функција непрекидна, увек можемо да нађемо неки број $\delta > 0$ тако да је растојање између $f(x)$ и $f(x_0)$ мање од ϵ кад год је растојање између x и x_0 мање од δ. Ово резоновање може да се преточи у следећу дефиницију:

Дефиниција 1. Нека је на скупу $S \subset \mathbb{R}$ дефинисана функција $f : S \to \mathbb{R}$. Ова функција је **непрекидна у тачки** x_0 ако:

$$(\forall \epsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$$

Функција $f : S \to \mathbb{R}$ је **непрекидна**, ако је непрекидна у свакој тачки у S.

Нека је функција дата са $f(x) = x^2$. Тврдимо да је ова функција непрекидна, на пример, у тачки $x_0 = 0$. Тада за било које $\epsilon > 0$ које изаберемо, морамо наћи $\delta > 0$ тако да је $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, кад год је $|x - x_0| < \delta$. Ако изаберемо $\epsilon = 1$ треба да нађемо такво δ да важи $|f(x) - f(x_0)| < 1$ кад год је $|x - 1| < \delta$. То значи да је $-1 < x^2 < 1$ кад је $-\delta < x < \delta$. Ако изаберемо, на пример $\delta = \frac{1}{4}$, онда $-\frac{1}{4} < x - 1 < \frac{1}{4}$, то јест, $\frac{3}{4} < x < \frac{5}{4}$, што имплицира $0 < \frac{9}{16} < x^2 < \frac{25}{16} < 2$, што задовољава постављени услов $\epsilon = 1$. Међутим, ни овај задовољени услов нам не гарантује да је функција нужно непрекидна јер дефиниција мора да важи за било које ϵ.

2.2 Отворени скупови

У стандардној литератури тополошки простор се дефинише увођењем неколико постулата, при чему, некоме ко се први пут сусреће са материјом, није интуитивно јасно зашто се за дефиницију уводе баш ти постулати. У овом одељку ћемо доказати два теорема, који ће нас мотивисати да дефинишемо математички објекат који ће имати баш такву структуру какву има тополошки простор.

Кренућемо од познате дефиниције за отворни интервал. Ако су a и b два реална броја тада скуп (a, b) називамо **отворени интервал** ако важи: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$. Овај скуп се састоји од свих реалних бројева између a и b осим њих самих. Ако укључимо и крајње тачке добијамо **затворени интервал**: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$.. Комбиновањем ове две дефиниције добијамо **полу-отворени интервал**, тј. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$, односно $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$.

Унија два отворена интервала неће нужно бити отворени интервал. На пример, $(0, 1) \cup (2, 3)$ не може да се напише као (a, b). Због тога је нужно да дефинишемо отворени скуп:

Дефиниција 2. Нека је скуп $S \subset \mathbb{R}$. Кажемо да је скуп S **отворен**, ако за сваку тачку $x \in S$ постоји неки отворени интервал $(x - \delta_x, x + \delta_x)(\delta_x > 0)$ који је садржан у S.

Интервал $(x - \delta_x, x + \delta_x)$ се назива **отворена околина** тачке x. Отворену околину можемо да схватимо као простор за дисање тачке x у скупу S. У том духу можемо да интерпретирамо отворени скуп као скуп чија свака тачка има око себе неки простор за дисање. Довољно је да замислимо путнике у градском превозу.

На основу претходне дефиниције, интервал $(0, 2)$ је отворен зато што свака тачка $x \in (0, 2)$ има отворену околину. Ако је $x \leq 1$, тада ако узмемо

$\delta_x = x$ тако да $(x - \delta_x, x + \delta_x) = (x - x, x + x) = (0, 2x) \subset (0, 2)$ за $x \leq 1$. Et vice versa, за $x \geq 1$, ако узмемо $\delta_x = 2 - x$, онда је $(x - \delta_x, x + \delta_x) = (x - (2 - x), x + 2 - x) = (2x - 2, 2) \subset (0, 2)$ док год је $x \geq 1$.

Исто тако, на основу претходне дефиниције, можемо да видимо да унија два отворена интервала представља отворени скуп. Узмимо, на пример, инију $(0, 2) \cup (3, 4)$ Ако $x \in (0, 2)$, можемо као у претходном примеру да узмемо $\delta_x = x$ или $\delta_x = 2 - x$, а ако $x \in (3, 4)$ тада опет можемо да поделимо разматрање на два случаја. За $x \in (3, 3\frac{1}{2}]$ ако изаберемо $\delta_x = \frac{1}{2}(x - 3)$ тада $(x - \delta_x, x + \delta_x) = (x - \frac{1}{2}(x - 3), x + \frac{1}{2}(x - 3)) = (\frac{x}{2} + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}) \subset (3, 4)$. За $x \in [3\frac{1}{2}, 4)$ можемо да узмемо $\delta_x = \frac{1}{2}(4 - x)$ и тада је $(x - \delta_x, x + \delta_x) = (x - \frac{1}{2}(4 - x), x + \frac{1}{2}(4 - x)) = (\frac{3}{2}x - 2, \frac{1}{2}x + 2) \subset (3, 4)$.

Бесконачни отворени интервал, на пример $(3, \infty)$, је отворени скуп, што можемо да видимо ако узмемо $\delta_x = x - 3$, тј. за $x \geq 3$, $(x - \delta_x, x + \delta_x) = (x, 2x - 3) \subset (3, \infty)$.

Како свака тачка отвореног скупа припада неком отвореном интервалу, можемо да тврдимо да је отворени скуп унија отворених интервала. Како је скуп S непребројиви подскуп скупа реалних бројева, онда је он унија бесконачно много отворених интервала, заправо, унија околина сваке своје тачке. Ово тврђење могуће је преточити у следећи

Теорем 1. Унија произвољно много отворених скупова је отворени скуп.

Доказ. Нека је $\{S_i\}$ колекција отворених скупова, $i \in \mathbb{I}$. Ако $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{I}} S_i$, то значи да тачка x сигурно припада неком од S_i. Како је S_i отворен, постоји нека околина тачке x у S_i, тј. $(\exists \delta_x > 0)((x - \delta_x, x + \delta_x) \in S_i)$. Како је ова околина садржана у S_i, онда је она такође садржана и у унији $\bigcup_{i \in \mathbb{I}} S_i$. Овим смо доказали да $(\forall x \in \bigcup_{i \in \mathbb{I}} S_i)(\exists (x - \delta_x, x + \delta_x) \in \bigcup_{i \in \mathbb{I}} S_i)$, што значи да је унија $\bigcup_{i \in \mathbb{I}} S_i$ отворен скуп. $\Box$

На следећем примеру ћемо видети да кад причамо о пресеку више отворених скупова морамо да будемо опрезнији. Наиме, посматрајмо колекцију отворених скупова:

$$S_1 = (-1, 1),\ S_2 = (-1, \frac{1}{2}),\ S_3 = (-1, \frac{1}{3}), \ldots,\ S_i = (-1, \frac{1}{i}), \ldots,$$

и нека је P пресек ових скупова $P = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap \ldots \cap S_i \cap \ldots$. Видимо да је скуп P заправо интервал $(-1, 0]$ који није отворен, тј. тачка 0 не може слободно да дише. Новонастли проблем је регулисан следећим теоремом:

Теорем 2. Било који коначни пресек колекције отворених скупова је отворен скуп.

Доказ. Нека је $S_1, S_2, \ldots, S_n$ коначна колекција отворених скупова. Ако $x \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i$, како је сваки од ових скупова отворен, важи следећи исказ $(\forall i)(\exists \delta_{x,i} > 0)((x - \delta_{x,i}, x + \delta_{x,i}) \in S_i)$. Нека је $\delta_x = min(\delta_{x,1}, \ldots, \delta_{x,n})$. Како има кончно много позитивних бројева $\delta_{x,i}$, и њихов минимум ће такође бити позитиван, тако да ће да важи: $(\forall i)(\exists (x - \delta_x, x + \delta_x) \subset (x - \delta_{x,i}, x + \delta_{x,i}) \subset S_i)$. Овде видимо да је отворени интервал $(x - \delta_x, x + \delta_x)$ садржан у сваком S_i, што за последицу има да је овај интервал садржан и у пресеку свих ових скупова, одакле закључујемо да је и пресек свих ових отворених скупова отворен скуп. □

Постоје и два екстремна примера отворених скупова. Први је цео скуп реалних бројева $\mathbb{R}$ јер $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \delta_x > 0)(x - \delta_x, x + \delta_x) \in \mathbb{R})$, а други је празан скуп $\emptyset$. Према дефиницији отворени скуп захтева да свака тачка има простор за дисање, што је за празан скуп аутоматски задовољено јер празан скуп $\emptyset$ нема тачака.

После дефиниције отвореног купа потребно је дефинисати и комплемент овог скупа, тј. затворени скуп.

Дефиниција 3. Подскуп $S \subset \mathbb{R}$ је **затворен** ако је његов комплемент $\mathbb{R} \backslash S$ отворен скуп.

Скуп $[a, b]$ је, на основу ове дефиниције, затворен јер је његов комплемент $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$, као унија два отворена скупа, отворен скуп. Јасно је да су ова два интервала отворена, што може да се види ако узмемо $\delta_x = a - x$ за $x < a$, односно $\delta_x = x - b$ за $x > b$. На основу исте дефиниције можемо да видимо да скуп $(2, 3)$ није затворен јер његов комплемент $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$ није отворен док на пример, скуп $(2, 3]$ није ни отворен ни затворен. Овај скуп није отворен зато што није отворени интервал, а са друге стране није ни затворен јер његов комплемент $(-\infty, 2] \cup (3, \infty)$ није отворени скуп. То међутим не важи и за бесконачни полу-отворени интервал који је затворени скуп. То можемо да видимо на примеру $(-\infty, 2]$ јер је његов комплемент отворени интервал $(2, \infty)$.

2.3 Непрекидност и отворени скупови

На крају овог одељка биће формулисан кључни теорем који је неопходан да би се у потпуности интуитивно јасно прешло на концепт непрекидности у тополошком смислу. Дати теорем се односи на везу између појма отвореног скупа и појма непрекидности. Често се у стандардним текстовима о топологијама креће од дефиниције непрекидности за пресликавање једног тополошког простора у други, али без јасне интуитивне представе зашто се то тако дефинише. Овај одељак, као и претходна два, имају управо ту функцију да надокнаде недостајућу везу. Најпре ћемо увести неколико додатних појмова.

Дефиниција 4. Нека је $f : D \to C$ функција. Скуп D у том случају нзивамо **домен функције**, а скуп C **кодомен функције**. Ако је $S \subset C$ подскуп кодомена, тада је **предлик** скупа S, $f^{-1}(S)$ подскуп домена D, дефинисан као:

$$f^{-1}(S) = \{x \in D | f(x) \in S\}.$$

Другим речима, предлик скупа S се састоји од свих тачака које се у S пресликавају функцијом f.

Узмимо, на пример, функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ која је дефинисана са $f(x) = x^2 - x$. Тада важе следећа тврђења која се виде непосредно из дефиниције: $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f^{-1}[-1, \infty) = \mathbb{R}$, $f^{-1}[0, \infty) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. На овом примеру можемо да видимо да предлик може да буде и само једна тачка, то јест: $f^{-1}(-\infty, -1] = \{\frac{1}{2}\}$ или чак празан скуп: $f^{-1}(-\infty, -1) = \emptyset$.

Пре него што докажемо следећи важан теорем, потребно је показати понашање предликова функције у комбинацији са основним скуповним операторима.

Лема 1. Нека је дата функција $f : S \to T$ и нека су $U, V \subset T$, тада важе следећи искази:

i) $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$,

ii) $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$,

iii) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$,

iv) $f^{-1}(T) = S$.

Доказ. *i)* $x \in f^{-1}(U \cap V) \Rightarrow f(x) \in U \cap V$, односно, $f(x) \in U \wedge f(x) \in V \Rightarrow x \in f^{-1}(U) \wedge x \in f^{-1}(V)$, то јест, $x \in f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$. *ii)* $x \in f^{-1}(U \cup V) \Rightarrow f(x) \in U \cup V$, односно, $f(x) \in U \vee f(x) \in V \Rightarrow x \in f^{-1}(U) \vee x \in f^{-1}(V)$, то јест, $x \in f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. *iii)* Предлик $f^{-1}(\emptyset)$ је увек празан скуп, јер када би садржао неки елемент s, тада би важило $f(s) = \emptyset$, што је немогуће јер је у контрадикцији са дефиницијом функције. *iv)* $f^{-1}(T) = S$ јер је $(\forall s \in S)(f(s) = T)$. $\square$

И коначно, очекивани теорем, који даје везу између товорених скупова и непрекидности:

Теорем 3. Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функција. Ако је f непрекидна функција, тада је $f^{-1}(S)$ отворен скуп, кад год је $S \subset \mathbb{R}$ отворен скуп. Важи и обрнуто: Ако је $f^{-1}(S)$ отворен скуп, кад год је S отворени подскуп скупа $\mathbb{R}$, тада је f непрекидна функција.

Доказ. Неопходност доказујемо тако што полазимо од претпоставке да је f непрекидна, што значи да $(\forall x_0 \in \mathbb{R})(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon))$. Нека је сада S отворени подскуп у $\mathbb{R}$. Да бисмо показали да је $f^{-1}(S)$ отворен, узећемо да је x_0 било која тачка у $f^{-1}(S)$ и наћи ћемо позитиван број δ, такав да је $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset f^{-1}(S)$. Ако $x_0 \in f^{-1}(S)$, тада $f(x_0) \in S$, па како је S отворен $(\exists \epsilon > 0)(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) \subset S$. Како је f непрекидна функција то значи да $(\exists \delta > 0)(x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon))$. Интервал $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon) \subset S$, видимо да $f(x) \in S$ кад год $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. То значи да $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \in f^{-1}(S)$, што значи да је $f^{-1}(S)$ отворен. Q.E.D.

Довољност доказујемо тако што претпоставимо да је $f^{-1}(S)$ отворен кад год је S отворен. Нека је x_0 тачка из домена функције f, а $\epsilon > 0$ реалан број. Интервал $(f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$ је отворен, тако да је и његов предлик

$f^{-1}(f(x_0)-\epsilon, f(x_0)+\epsilon)$ отворен. Овај предлик садржи тачку x_0 зато што је $f(x_0)$ садржано у $(f(x_0)-\epsilon, f(x_0)+\epsilon)$. Како је предлик отворен, можемо да нађемо интервал $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ који је садржан у предлику. Отуда $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset f^{-1}(f(x_0)-\epsilon, f(x_0)+\epsilon) \Rightarrow f(x) \in (f(x_0)-\epsilon, f(x_0)+\epsilon)$, што значи да је f непрекидна. Q.E.D. □

2.4 Тополошки простори

Сада желимо да дефинишемо ширу класу математичких објеката која ће да задржи неке особине поља реалних бројева, али при томе хоћемо да та шира класа математичких објеката поседује уопштење појма отвореног скупа. Ми можемо да уопштимо дефиницију непрекидности, ослањајући се на дефиницију уопштења отвореног скупа са којим је појам непрекидности у нераскидивој вези, што смо демонстрирали последњим теоремом. Оно што је наш крајњи циљ јесте једна широка класа структура над којом ћемо моћи да дефинишемо непрекидност као једну од најфундаменталнијих особина пресликавања. Управо су тополошки простори једна тако широка класа објеката. У дефиницију тополошког простора ћемо да уградимо оне особине које имају отворени скупови на пољу реалних бројева, а при томе ћемо оствити слободу да одредимо шта ће то бити проглашено за отворени скуп.

Дефиниција 5. Тополошки простор је уређени пар $(X, \mathcal{T}(X))$, скупа X и подскупа његовог партитивног скупа $\mathcal{T}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ који задовољава следеће аксиоме:

$\tau1$. Скуп X је отворен.

$\tau2$. Празан скуп $\emptyset$ је отворен.

$\tau3$. Произвољна унија отворених скупова је отворен скуп.

$\tau4$. Коначан пресек отворених скупова је отворен скуп.

Колекција отворених подскупова скупа X, $\mathcal{T}(X)$ назива се **топологија** на X, а елементе скупа X ћемо звати **тачке**. Аксиоми $\tau1-\tau4$ се заснивају на особинама отворених скупова које смо претходно размотрили. То нам гарантује да ће се отворени скупови било ког тополошког простора понашати као отворени подскупови у $\mathbb{R}$.

Први пример тополошког простора је онај који смо већ имали пред собом, тополошки простор $\mathbb{R}$. Већ смо видели да су цео $\mathbb{R}$ и $\emptyset$ отворени скупови, а да је на пољу реалних бројева произвољна унија отворених скупова отворен скуп и да је коначан пресек отворених скупова отворен скуп, видели смо на основу теорема 1 и 2, респективно.

Ако имамо скуп $X=\{a,b\}$, који се састоји од само два елемента, можемо на овом скупу да задамо топологију на више начина. Најпре, можемо да се сложимо да празан скуп $\emptyset$ и цео скуп $\{a,b\}$ назовемо отвореним скупом. У том случају су задовољени аксиоми $\tau1$ и $\tau2$. Аксиом $\tau3$ је такође задовољен јер је једина могућа унија $\emptyset \cup \{a,b\} = \{a,b\}$ отворен скуп. Задовољен је и аксиом $\tau 4$ јер је пресек $\emptyset \cap \{a,b\} = \emptyset$ исто тако отворен скуп.

На овом скупу сада можемо да задамо неку топологију. Скуп X ћемо топологизовати тако што ћемо његове подскупове, на пример, $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$ назвати отвореним. Тиме смо на скупу X задали топологију $\mathcal{T}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$. Ово није био једини избор. Могли смо да се определимо и за топологију $\mathcal{T}'(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}$ тиме што подскуп $\{b\}$ не бисмо прогласили отвореним скупом. Уређени пар $(X, \mathcal{T}(X))$ је тополошки простор. Аксиоми $\tau 1$ и $\tau 2$ су задовољени јер су и цео скуп X и празан скуп $\emptyset$ отворени скупови, а аксиоми $\tau 3$ и $\tau 4$ су такође задовољени јер су уније и пресеци отворени скупови зато што су сви подскупови скупа X отворени.

На датом скупу X имамо више начина да се конструишемо тополошки простор. Као што смо већ видели, можемо да прогласимо отвореним скуповима само цео скуп X и празан скуп и у том случају имамо **индискретну топологију**. Ако, насупрот томе, све подскупове скупа X прогласимо отвореним, тада смо задали **дискретну топологију**. Само задавање топологије на неком скупу дефинише шта су то отворени подскупови. По аналогији са скупом реалних бројева, и овде можемо да дефинишемо шта је то затворени скуп.

Дефиниција 6. Нека је дат тополошки простор $(X, \mathcal{T})$. Подскуп $Y \subset X$ је **затворен** ако је комплемент $X \backslash Y$ отворен.

У претходно наведеном примеру где смо имали индискретну топологију $\mathcal{T}(X) = \{\emptyset, \{a,b\}\}$ на скупу $X = \{a,b\}\}$, једини отворени скупови су били $\emptyset$ и $\{a,b\}\}$. Ови подскупови скупа X су у исто време и затворени јер су њихови комплементи, респективно, $\{a,b\}\}$ и $\emptyset$ отворени скупови. Остали подскупови скупа X су $\{a\}$ и $\{b\}$, а они нису затворени јер њихови комплементи $\{b\}$ и $\{a\}$ нису отворени скупови. Дакле ови подскупови нису ни отворени ни затворени. У случају топологије $\mathcal{T}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$, сваки комплемент ових отворених скупова је неки од отворених скупова, тако да су сви ови скупови у исто време и затворени.

Ми смо дефинисали тополошки простор како бисмо могли да уопштимо дефиницију непрекидности на много ширу класу математичких објеката.

Дефиниција 7. Функција $f : X \to Y$ која пресликава један тополошки простор на други је **непрекидна** ако је њен предлик $f^{-1}(U)$ било ког отвореног скупа $U \subset Y$ отворен скуп у X.

Када причамо о тополошким просторима уобичајено је да се уместо термина функција користи термиин **мапа** и при томе се обично мисли на непрекидну функцију.

Нека скуп $X = \{a,b\}$ из ранијих примера има дискретну топологију $\mathcal{T}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$. Ако дефинишемо пресликавање $f : X \to \mathbb{R}$ следећим релацијама $f(a) = -1$ и $f(b) = 1$. Потребно је да проверимо да ли је ова функција непрекидна. Нека је U отворени скуп у $\mathbb{R}$. Тада су предликови дати са:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \{a\} & \text{ако} \quad -1 \in U \wedge 1 \notin U, \\ \{b\} & \text{ако} \quad -1 \notin U \wedge 1 \in U, \\ \{a,b\} & \text{ако} \quad -1 \in U \wedge 1 \in U, \\ \emptyset & \text{ако} \quad -1 \notin U \wedge 1 \notin U. \end{cases}$$

У сваком од ових случајева, предликови су отворени скупови, па је f непрекидна мапа.

Нека је скуп $X = \{a,b\}$ опремљен дискретном топологијом $\mathcal{T}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$, а скуп $Y = \{a,b\}$ индискретном топологијом $\mathcal{T}(Y) = \{\emptyset, \{a,b\}\}$. дефинишемо пресликавање $f : X \to Y$ тако да $f(a) = a$ и $f(b) = b$. Тада су предликови отворених скупова из Y: $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ и $f^{-1}(Y) = Y$ отворени скупови, па је f непрекидна мапа. Ако имамо инверзно пресликавање $g : Y \to X$ такво да је $g(a) = a$ и $g(b) = b$ видећемо да ово пресликавање није непрекидно јер је, на пример, $\{a\}$ отворени скуп у X, а $g^{-1}(\{a\}) = \{a\}$ није отворени скуп у Y, тако да ово пресликавање није непрекидно.

Видели смо да је преко дефиниције тополошког простора могуће проширити појам непрекидности и на дискретне математичке објекте, али оно што је од интереса за даља разматрања, јесу вишедимензионални континууми, као што су $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, простор Минковског, итд. Један од кључних тополошких објеката помоћу којег ове скупове можемо да опремимо топологијом је **отворена лопта**.

У случају дводимензионалног еуклидског простора $\mathbb{R}^2$, за било коју тачку $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ и било који реални број $\delta > 0$ можемо да дефинишемо отворену лопту као:

$$B_\delta(x,y) = \{(x',y') | \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} < \delta\}.$$

Овај скуп се назива дводимензионална отворена лопта радијуса δ и представља аналогон отвореном интервалу у $\mathbb{R}$. Подскуп $Q \subset \mathbb{R}^2$називамо отвореним, ако $(\forall (x,y) \in Q)(\exists \delta > 0)(B_\delta(x,y) \in Q)$. Интуитивно је јасно да је $(\mathbb{R}^2, B_\delta)$ тополошки простор. Аксиом $\tau 1$ је задовољен јер је цео $\mathbb{R}^2$ садржан у лопти B_∞, а за празан скуп је аксиом $\tau 2$ аутоматски задовољен. Аксиоми $\tau 3$ и $\tau 4$ су задовољени праволинијским уопштавањем теорема 1 и 2 на дводимензионални случај.

На основу овог разматрања, ми можемо да топологизујемо еуклидски простор $\mathbb{R}^n$ на исти начин као и у случају $\mathbb{R}^2$ увођењем отворене лопте:

$$B_\delta(\vec{x}) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n | d(\vec{x}, \vec{y}) < \delta\},$$

где је $d(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$ за $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. И тада, кажемо да је неки подскуп $\mathbb{R}^n$ отворен, ако око сваке тачке тог скупа може да се нађе отворена лопта која припада том подскупу. Простор опремљен мером дужине $d(\vec{x}, \vec{y})$ назива се **метрички простор**.

Како у отвореном подскупу скупа $\mathbb{R}^n$ око сваке тачке може да се опише отворена лопта која је садржана у том подскупу, отуда је тај подскуп унија свих тих отворених лопти. Онда можемо да тврдимо да је сваки отворени скуп унија отворених лопти, што нас доводи до следеће дефиниције.

Дефиниција 8. У тополошком простору $(X, \mathcal{T}(X))$ колекција $\mathcal{B}$ отворених подскупова скупа X назива се **базис топологије** на X, ако сваки отворени скуп у X представља унију скупова из $\mathcal{B}$.

У случају скупа $\mathbb{R}$ базис топологије је колекција свих коначних отворених интервала (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$ јер сваки отворени скуп садржи отворени интервал око сваке тачке, и самим тим, представља унију тих отворених интервала.

У случају скупа $\{a, b, c\}$ са дискретном топологијом, сваки подскуп је отворени скуп и тада скупови $\{a\}$,$\{b\}$ и $\{c\}$ чине базис топологије јер се сваки подскуп скупа $\{a, b, c\}$ може представити као унија неког од ових подскупова.

Литература

[1] Martin. D. Crossley: *Essential Topology*, Springer-Verlag, London(2005).

[2] John M. Lee: *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer-Verlag, New York(2006).

[3] Jacques Lafontaine: *Introduction aux variétés différentielles*, Presses universitaires de Grenoble(1996).

[4] H. Stephani: *Allgemeine Relativitätstheorie*, Dt. Verl. d. Wiss. Berlin (1977).

Предавање 3

Тополошки простори и многострукости-интуитивни приступ

Лука Ненадовић, Висока технолошка школа, Шабац,

Alma mater: Физички факултет, Београд

3.1 Тополошке особине

Ширина дефиниције тополошких простора оставља места за веома велику класу онога што можемо да подразумевамо под појмом простор. Међутим, без додатних особина тополошки простор је превише општи појам да бисмо могли да оперишемо над њим и без додатних рестрикција може да испољи и неке јако дивље особине. Због тога ћемо дефинисати неке додатне појмове који се односе на тополошке просторе.

Један од првих и основних, а који нам је интуитивно јасан, је концепт повезаности. Интуитивно нам је јасно да је неки подскуп еуклидског простора $\mathbb{R}^3$ повезан, ако било које две тачке тог скупа можемо да повежемо непрекидном кривом, а да при томе не изађемо из тог скупа.

Дефиниција 9. Кажемо да је тополошки простор $(X, \mathcal{T}(X))$ **неповезан** ако можемо да нађемо два отворена подскупа $U, V \in X$ таква да:

- U и V немају пресек, тј. $U \cap V = \emptyset$,
- U и V покривају X, tj. $U \cup V = X$,
- ни U ни V нису празни, тј. $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$.

Ако унутар X нема таквих скупова, тада је тополошки простор $(X, \mathcal{T}(X))$ **повезан**.

Размотримо отворене подскупове $\ldots, (-2,0), (-1,1), (0,2), (1,3), \ldots \in \mathbb{R}$. Јасно нам је да ови отворени скупови у потпуности прекривају скуп $\mathbb{R}$. Зато уводимо два нова појма.

Дефиниција 10. Отворени покривач тополошког простора $(X, \mathcal{T}(X))$ је колекција отворених подскупова у X, таквих да свака тачка која припада X, припада најмање једном од тих отворених подскупова.

За тополошки простор $(X, \mathcal{T}(X))$ кажемо да је **компактан** ако дозвољава коначно пречишћење. То значи да за сваку бесконачну колекцију отворених скупова који покривају X, можемо да одбацимо све осим коначно много и да они и даље представљају отворени покривач $(X, \mathcal{T}(X))$.

Постоји и еквивалентна дефиниција која каже да је скуп компактан ако сваки отворени покривач има коначан потпокривач.

Да $(0,1)$ није компактан, може лако да се покаже дефинисањем отворених скупова U_n, $n \in \mathbb{N} \wedge n > 1$:

$$U_2 = (\frac{1}{2}, 1),\, U_3 = (\frac{1}{3}, 1),\, \ldots, U_n = (\frac{1}{n}, 1),\, \ldots$$

Ови интервали покривају цео скуп $(0,1)$ јер за било који реалан број x између 0 и 1, постоји довољно велики број n, тако да $x \in (\frac{1}{n}, 1)$ за довољно велико n. Међутим, ако покушамо да нађемо било какво коначно пречишћење, на пример $U_{i_1}, \ldots, U_{i_k}$, оно неће покрити цео интервал $(0,1)$ јер ће унија такве коначне колекције бити неко $U_i = (\frac{1}{i}, 1)$, где је i максимум свих $i_1, \ldots, i_k$. Овај интервал не садржи тачку $\frac{1}{i}$, па закључујемо да овај скуп нема коначно пречишћење, односно није компактан.

Да је $[0,1]$ компактан, лако је показати довођењем претпоставке да је некомпактан до апсурда. Размотримо два интервала $[0, \frac{1}{2}]$ и $[\frac{1}{2}, 1]$. Претпоставимо да бар један од њих нема коначно пречишћење и назовимо га I_1. Ако је $I_1 = [0, \frac{1}{2}]$ онда овај интервал можемо да поделимо на два интервала $[0, \frac{1}{4}]$ и $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, а ако је $I_1 = [\frac{1}{2}, 1]$, поделићемо га на $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ и $[\frac{3}{4}, 1]$. У том случју бар један од ових интервала неће имати коначно пречишћење и њега назовемо I_2. Тада и тај интервал можемо поделити на два интервала, и тако даље. Настављајући овај процес добијамо низ затворених интервала:

$$[0,1] \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots$$

Ови интервали имају све мању дужину. Интервал I_n има дужину $\frac{1}{2^n}$, а по претпоставци ни један од ових интервала нема коначно пречишћење. Пресек свих ових интервала биће једна тачка $x \in [0,1]$. Ова тачка мора бити садржана у бар једном отвореном скупу из отвореног покривача. Како је овај скуп отворен, он мора садржати неки простор за дисање око тачке x, односно, $x \in (x - \delta_x, x + \delta_x) \cap [0,1]$, $(\delta_x > 0)$. Овај отворени скуп ће садржати неки од затворених интервала I_n, ако је дужина отвореног интервала мања од δ, tj. $\frac{1}{2^n} < \delta_x$, односно, $n > \log_2(\frac{1}{\delta_x})$. То значи да ће за довољно велико n интервал I_n бити садржан у $(x-\delta, x+\delta)$ који је садржан у отвореном покривачу. Отуд, I_n има коначно пречишћење почетног покривача, што је у контрадикцији са почетном претпоставком да I_n нема коначно пречишћење.

Компактност простора је у корелацији са постојањем границе неког простора. Као што затворени интервал $[0,1]$ садржи граничне тачке 0 и 1, а отворени интервал $(0,1)$ не, исто тако и лопта садржи спољну сферу као своју границу, док отворена лопта не саджи своју границу.

Последња веома важна особина тополошког простора је Хаусдорфова (Hausdorff) особина.

Дефиниција 11. Тополошки простор $(X, \mathcal{T}(X))$ је **Хаусдорфов** ако за сваке две различите тачке $x, y \in X$, постоје отворени подскупови $U, V \subset X$ такви да $x \in X$ и $y \in Y$ и при томе важи да $U \cap V = \emptyset$.

За Хаусдорфов простор се још каже да је различив, односно да можемо да разликујемо било које две тачке тог простора у смислу да свака тачка има свој простор за дисање. Користи се још и термин отуђеност тачака.

Интервал $[0,1]$ је Хаусдорфов. Да бисмо то показали, узмимо да су $x, y \in [0,1]$ две различите тачке. Тада је $|x-y| > 0$ и ако узмемо $\delta = \frac{1}{2}|x-y|$ и дефинишемо $U = (x-\delta, x+\delta) \cap [0,1]$ и $V = (y-\delta, y+\delta) \cap [0,1]$. Како су ово пресеци са отвореним скуповима, ови пресеци су отворени. На основу тога како смо дефинисали U и V, $x \in U$ и $y \in V$ и $U \cap V \neq \emptyset$, па је овај интервал Хаусдорфов тополошки простор. Слично, $\mathbb{R}^n$ је Хаусдорфов тополошки простор за све n.

Скоро сви простори са којима је већина нас имала искуство до сада су Хаусдорфови. Насупрот томе, скуп $\{a, b\}$ са индискретном топологијом није Хаусдорфов тополошки простор. Ако узмемо $x = a$ и $y = b$, тада је једини отворени скуп који садржи x цео скуп, који исто тако садржи и тачку y.

Постоје и егзотичнији примери простора који нису Хаусдорфови. Један је права линија са додатном нулом $\tilde{0}$. Овај тополошки простор L ћемо конструисати на следећи начин: за сваки подскуп скупа $\mathbb{R}$ који не садржи тачку 0 постоји одговарајући подскуп скупа L који проглашавамо отвореним, ако је одговарајући подскуп $\mathbb{R}$ отворен. За сваки отворени подскуп скупа $\mathbb{R}$ који садржи тачку 0 постоје три одговарајућа подскупа скупа L. Један садржи тачку 0, други садржи тачку $\tilde{0}$, а трећи садржи и 0 и $\tilde{0}$. Сва ова три подскупа L проглашавамо отвореним ако је одговарајући подскуп скупа $\mathbb{R}$ отворен. Отворени подскупови L задовољавају аксиоме тополошког простора. Ова конструкција се назива **реална линија са двоструком нулом**. Већина тачака на овој линији је отуђено, међутим, ако узмемо у обзир тачке 0 и $\tilde{0}$ онда то не можемо са сигурношћу да тврдимо. Сваки отворени подскуп L који садржи тачке 0 и $\tilde{0}$ одговара отвореном подскупу скупа $\mathbb{R}$ који садржи 0. Свака два таква подскупа $\mathbb{R}$ ће се преклапати и њихов пресек ће садржати неки отворени интервал $(-\delta, \delta)$, Одавде следи да ако узмемо у обзир један отворени подскуп из L који садржи 0 и један који садржи $\tilde{0}$, они ће се преклапати, па закључујемо да L није Хаусдорфов тополошки простор.

3.2 Хомеоморфизми

Да би два простора била тополошки еквивалентна, неопходно је да може да се направи прелаз са једног простора на други у том смислу да непрекидна мапа са доменом у једном простору има одговарајућу непрекидну мапу са доменом у другом простору и обрнуто. Потребно је и да непрекидна мапа са ликовима у једном простору има одговарајућу мапу са ликовима у другом простору и обрнуто.

Дефиниција 12. За два тополошка простора $(X, \mathcal{T}(X))$ и $(Y, \mathcal{T}(Y))$ су **хомеоморфна** (тополошки изоморфна) ако постоје непрекидне мапе $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ такве да

$$(f \circ g) = \mathrm{id}_Y \qquad \text{и} \qquad (g \circ f) = \mathrm{id}_X.$$

У том случају мапе f и g називамо **хомеоморфизмима**. id_X и id_Y су идентичне мапе скупова X и Y на саме себе. Мапе f и g су међусобно инверзне, тако да пишемо f^{-1} уместо g и g^{-1} уместо f.

Ако кажемо да је $f : X \to Y$ хомеоморфизам, тада подразумевамо да је f непрекидна мапа и да постоји непрекидна мапа $g : Y \to X$ инверзна мапи f, и обрнуто.

Можемо лако да покажемо да су свака два интервала на реалној правој хомеоморфна. Узмимо, на пример, $X = (-1, 1)$ и $Y = (0, 3)$. Овде можемо да дефинишемо $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ као

$$f(x) = \frac{3}{2}(x+1), \qquad g(x) = \frac{2}{3}x - 1. \tag{3.1}$$

Ове мапе су непрекидне и очигледно међусобно инверзне и непрекидне као композиције сабирања и множења. Одатле следи да су $X = (-1, 1)$ и $Y = (0, 3)$ хомеоморфни.

Сваки отворени интервал на реалној правој је хомеоморфан целој реалној правој. Ово можемо да докажемо и ствар је техничке природе, па ћемо ово само илустровати једним примером. У случају отвореног интервала $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ако дефинишемо непрекидну мапу $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \mathrm{tg}(x). \tag{3.2}$$

Како је ова мапа бијекција можемо да дефинишемо и инверзну мапу $g : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

$$g(x) = \mathrm{arctg}(x). \tag{3.3}$$

У тополошком жаргону, хомеоморфни простори су идентични јер испољавају исте тополошке особине. Можемо видети да компактност простора чини класу еквиваленције хомеоморфизама и да компактни простори могу да буду међусобно хомеоморфни, те да не постоји хомеоморфизам између компактног и некомпактног простора.

Ово можемо показати на примеру круга $\mathbb{S}^1$. Круг можемо задати експоненцијалном мапом $e : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ коју ћемо дефинисати параметризацијом $e(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$. Нека је $\mathcal{U}$ отворени покривач круга $\mathbb{S}^1$, па је самим тим $\mathcal{U}$ колекција отворених подскупова у $\mathbb{S}^1$. За сваки подскуп $U \in \mathcal{U}$, постоји отворени подскуп $f^{-1}(U) \in [0,1]$ јер је f непрекидна мапа. Колекција свих ових отворених подскупова $f^{-1}(U) \in \mathcal{U}$ је отворени покривач интервала $[0,1]$, тако да ова колекција има коначно пречишћење. Нека је $\mathcal{V}$ коначна колекција скупова U таквих да $\cup_{U\in\mathcal{V}} f^{-1}(U)$ покрива $[0,1]$. Тада је $\mathcal{V}$ коначно пречишћење отвореног покривача $\mathcal{U}$ круга $\mathbb{S}^1$. Ово можемо да закључимо из следећег резоновања: ако $x \in \mathbb{S}^1$, тада је x лик мапе f, ако је f сирјективна, што значи да постоји $y \in [0,1]$ такво да $f(y) = x$. Како је $[0,1]$ покривен скупом $\cup_{U\in\mathcal{V}} f^{-1}(U)$, мора да постоји $U \in \mathcal{V}$ такво да $y \in f^{-1}(U)$, што значи да $f(y) \in U$, односно, $x \in U$. Одавде закључујемо да за сваку тачку $x \in \mathbb{S}^1$, постоји неки подскуп у $\mathcal{V}$ који садржи x, што значи да је $\mathcal{V}$ коначно пречишћење отвореног покривача $\mathcal{U}$, па је круг $\mathbb{S}^1$ компактан.

Ово резоновање има неколико фундаменталних последица. Прва последица је исказ да ако је $f : X \to Y$ непрекидна мапа и скуп X је компактан, онда је и скуп Y компактан. Дакле лик компактног простора је компактан, што значи да не постоји сирјективна непрекидна мапа $[0,1] \to (0,1)$. Оно што још можемо да закључимо, а што је последица свега овога, јесте да не постоји хомеоморфизам између компактног и некомпактног тополошког простора. То значи да интервали $[0,1]$ и $(0,1)$ нису хомеоморфни.

Ово наравно не значи да су сви компактни простори међусобно хомеоморфни. То можемо показати на већ познатом примеру интервала $[0,1]$ и једнодимензионалне сфере $\mathbb{S}^1$. Разлог овоме можемо лако да видимо. Ако из интервала $[0,1]$ изузмемо тачку $\frac{1}{2}$ добијамо неповезан простор, док ако изоствимо било коју тачку на сфери, добијамо повезан простор. Ако су ови простори били хомеоморфни пре уклањања тачака, морају бити хомеоморфни и после уклањања.

3.3 Тополошке многострукости

У овом делу ћемо увести појам тополошких многострукости које имају јако једноставну структуру.

Дефиниција 13. Нека је M тополошки простор. Кажемо да је M **тополошка многострукост димензије n** ако задовољава следеће аксиоме:

$\tau\mu 1$. M је Хаусдорфов тополошки простор. За сваки пар тачака $p, q \in M$ постоје отворени подскупови $U, V \in M$ такви да су $U \cap V = \emptyset$ за $p \in U$ и $q \in V$.

$\tau\mu 2$. Топологија на M има пребројив базис.

$\tau\mu 3$. M локално изгледа као еуклидски простор димензије n. Свака тачка у M има околину која је хомеоморфна са отвореном околином у $\mathbb{R}^n$.

То да многострукост M локално изгледа као еуклидски простор, значи да за сваку тачку $p \in M$ можемо да нађемо отворени подскуп $U \in M$ који садржи тачку p, отворени подскуп $\tilde{U} \in \mathbb{R}^n$ и хомеоморфизам $\varphi : U \to \tilde{U}$.

Најједноставнији пример $n-$димензионалне тополошке многострукости је сам еуклидски простор $\mathbb{R}^n$. Овај простор је Хаусдорфов и има пребројив базис јер увек можемо да нађемо колекцију отворених лопти са рационалним центрима и рационалним полупречницима и том колекцијом прекријемо цео $\mathbb{R}^n$. Наравно, $\mathbb{R}^n$ је хомеоморфан самом себи, не само локално, него и глобално.

Дефиниција 14. Нека је M тополошка многострукост димензије n. **Координатна карта** или само **карта** је уређени пар (U, φ), где је U отворени подскуп у M, а $\varphi : U \to \tilde{U}$ хомеоморфизам из U у отворени подскуп $\tilde{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Свака тачка $p \in M$ је садржана у домену неке карте (U, φ). За дату карту (U, φ), скуп U називамо **координатни домен** или **координатна околина** дате тачке. Мапа φ се тада назива **локална координатна мапа**, а компоненте $(x^1, \ldots, x^n)$ функције φ дефинисане преко хомеоморфизма $\varphi(p) = (x^1(p), \ldots, x^n(p))$ називају се **локалне координате** на U.

3.4 Диференцијабилне многострукости

Да би смо могли да заснујемо анализу на многострукостима, како би реалне функције, криве и мапе над многострукостима имале смисла, потребно је да уведемо додатне структуре на већ постојећу тополошку структуру многогострукости. Неопходно је да уведемо критеријум по којем ћемо моћи да одлучимо да ли је нека функција на многострукости глатка или не.

Кренућемо од аналогије са еуклидским простором. Ако су U и V отворени подскупови еуклидског простора $\mathbb{R}^n$, функцију $f : U \to V$ називамо **глатка** или **бесконачно диференцијабилна** функција, што се најчешће обележава са C^∞, ако свака компонента ове функције има непрекидне све парцијалне изводе свих редова. Додатно, ако је f бијекција и има глатку инверзну мапу, онда ћемо је звати **дифеоморфизам**. У овом случају, дифеоморфизам је хомеоморфизам.

Размотримо сада неку многострукост M димензије n. Било која тачка ове многострукости је у домену неке координатне мапе задате са $\varphi : U \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$. Конзистентна дефиниција глатке функције на M би била да кажемо да је функција $f : M \to \mathbb{R}$ глатка ако је сложена функција $f \circ \varphi^{-1} : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ глатка у горе наведеном смислу. Ово је сасвим довољна мотивација за следећу дефиницију.

Дефиниција 15. Нека је M тополошка многострукост димензије n. Ако су (U, φ) и (V, ψ) две координатне карте такве да се прекривају $U \cap V \neq \emptyset$, сложена мапа $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ назива се **мапа прелаза** са φ на ψ. Као композиција хомеоморфизама, ова мапа је хомеоморфизам. За две карте (U, φ) и (V, ψ) кажемо да су **глатко компатибилне** или ако је $U \cap V = \emptyset$ или ако је мапа прелаза $\psi \circ \varphi^{-1}$ дифеоморфизам.

Често се за глатку компатибилност користи термин глатко шивење. То интуитивно значи да је прелаз са једне карте на другу гладак.

Дефиниција 16. Нека је M тополошка многострукост димензије n. Дефинишемо **атлас** $\mathcal{A}$ многострукости M као колекцију карта чији домени у потпуности покривају M. Атлас $\mathcal{A}$ називамо **глатки атлас** ако су било које две карте у $\mathcal{A}$ глатко компатибилне једна са другом.

У општем случају, постоји више могућих избора атласа који ће дати исту глатку структуру. Размотримо на пример следећа два атласа на $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{A}_1 = \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})\}, \qquad \mathcal{A}_2 = \{(B_1(x), \mathrm{id}_{B_1(x)}) | x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Иако су ово два различита глатка атласа, јасно је да је мапа $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ глатка на оба атласа ако и само ако је глатка у смислу стандардног диференцијалног рачуна.

Ми можемо да дефинишемо глатку структуру као класу еквиваленције глатких атласа под одређеном релацијом еквиваленције, али је уобичајено да то урадимо на следећи начин.

Дефиниција 17. Глатки атлас $\mathcal{A}$ на многострукости M је **максималан** ако није садржан ни у једном већем глатком атласу.

Ово значи да било која карта која је глатко компатибилна са сваком картом у $\mathcal{A}$ је већ у $\mathcal{A}$. Такав гладак атлас се често назива и комплетни атлас. Сада ћемо дефинисати централни објекат диференцијалне геометрије.

Дефиниција 18. Глатка структура на тополошкој многострукости M димензије n је максимални глатки атлас. Уређени пар $(M, \mathcal{A})$, где је M тополошка многострукост димензије n, а $\mathcal{A}$ глатка структура на M, назива се **диференцијабилна многострукост** димензије n.

Литература

[1] Martin. D. Crossley: *Essential Topology*, Springer-Verlag, London(2005).

[2] John M. Lee: *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer-Verlag, New York(2006).

[3] Jacques Lafontaine: *Introduction aux variétés différentielles*, Presses universitaires de Grenoble(1996).

[4] H. Stephani: *Allgemeine Relativitätstheorie*, Dt. Verl. d. Wiss. Berlin (1977).

Предавање 4

Свођење математичог модела жице која осцилује на систем линеарних једначина

Љубица Матић, Математички факултет

4.1 Таласна једначина

Дефиниција 5. У свакодневном животу често наилазимо на појаве које су описане многим физичиким, механичим, статичим особинама. Из жеље да их боље разумемо и прецизније опишемо, настала је широка теорија која истом задатку прилази са различитих аспеката.
Размотримо осцилацију танке жице која је учврсћена на једном свом крају, док је супротан крај слободан. Разматрање вршимо уз претпоставку да осцилације зависе само од хоризонталне променљиве x и временске t. Такође, учврсћен крај жице означимо са a, а слободан са b.

Одступање од равнотажног положаја тачке жице са апсцисом x у временском тренутку t означимо са $u = u(x, t)$.

При кретању слободног краја жице, у физичом смислу можемо изучавати путању, брзину приликом кретања која може бити константна

или не, постојање почетне брзине, убрзања...
Такође, може се проучавати дејство спољашњих и унутрашњих фактора као што су: силе које узрокују отпор при кретању, морфолошке карактеристике тела (облик, густина, хомогеност, еластичност). .

У статици су изучене основне корелације између величина које описују дато кретање. На пример, из формуле $s = v{\cdot}t$ видимо да се брзина може посматрати као извод пута по времену, а (због $v = a{\cdot}t$) диференцирамо ли ту величину још једном по времену, добићемо убрзање.

Ово показује да се, уз познавање одговарајуће математичке апаратуре, може смањити број променљивих које описују дато кретање што доводи до значајног упросћавања и могућности за детаљније истразхивање. .
Управо се због ових практичних потреба развила теорија коју су равномерно подстицали математичари, физичари, механичари..
Класа једначина коју дефинише ова теорија се назива једначинама математичке физике.

Покажимо сада како изгледа генерисање математичког модела на примеру жице која осцилује:

Са $T(x,t)$ обележимо силу истезања (она је тангентна на жицу), са $\rho(x)$ густину жице, а са $F(x,t)$ силу која се односи на спољашње утицаје.

Према Хуковом закону, сила истезања $T(x,t)$ ће бити константна тј. $|T(x,t)| = T_o$.
Посматрајмо сегмент жице $(x, x + \Delta x)$ и испитајмо силе које на њега делују.
Ту су: сила истезања чији је интензитет једнак следећој разлици $T(x + \Delta x, t) - T(x,t)$, затим спољашња сила чије ћемо дејство означавати са $F(x,t)$.

Други Њутнов закон говори о томе да је резултујућа сила која делује на тело једнака производу масе и убрзања тог тела.
Када ово применимо у конкретном случају осцилације жице и посматрамо компоненту паралелну са u осом, добићемо:

$$(T_o sin\alpha)|_{x+\Delta x} - (T_o sin\alpha)|_x + F(x,t)\Delta x = m \cdot a = \rho(x)\Delta x \tfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$$

Последња једнакост је испуњена јер смо убрзање посматрали као $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, а масу као производ линеарне густине и дужине. Такође, при малим осцилацијама , тј. када је мала вредност угла α, можемо да извршимо следећу апроксимацију:

$$sin\alpha = \frac{tan\alpha}{\sqrt{1+(tan\alpha)^2}} \approx tan\alpha$$

Уочавамо да је $tan\alpha$ управо промена $u(x,t)$ зависно од прве координате, односно извод, тако да пишемо:

$$sin\alpha = \frac{tan\alpha}{\sqrt{1+(tan\alpha)^2}} \approx tan\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Дакле, масу, убрзање и $sin\alpha$ смо изразили преко функција $u(x,t)$ и $\rho(x)$.
Када обе стране једнакости поделимо са Δx , добићемо:

$$T_0 \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] + F(x,t) = \rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$$

С обзиром да посматрамо произвољан интервал $(x, x+\Delta x)$, можемо захтевати да $\Delta x \longrightarrow 0$. У том случају израз

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]$$

конвергира ка $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$

Дакле, други Њутнов закон и теореме физике су нам дали једнацхину која описује кретање тачака жице. Уз извесне апроксимације, ту једначину сводимо на следећу:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = T_o \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + F(x,t)$$

и коначно, када претходну једнакост поделимо са $\rho(x)$, добићемо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = p \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t)$$

где је $p = \frac{T_o}{\rho(x)}$ позитиван коефицијент.

Приметимо да смо при генерисању математичог модела разматрали само утицај спољашње силе и силе истезања. Када у разматрање уврстимо и еластичне силе, модел добија компликованији облик:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = p \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - q(x)u(x,t) + f(x,t)$$

где је $q(x)$ функција која описује еластичну силу која делује на жицу у тачки x.

Правац силе еластичности се поклапа са самом путањом тачака жице, тако да постоји линеарна ваза између еластичне силе и одступања од равнотежног положаја $u(x,t)$ што је у претходној једначини представљено као $q(x)u(x,t)$.
Такође, први члан десне стране једнакости се односи на силу истезања, а други на еластичну силу. С обзиром да ове две силе имају супротан смер, постало је јасно и зашто су обрнути предзнаци чланова који их представљају.

Овако изведена једначина спада у класу парцијалних диференцијалних једначина.

Једначина у којој се јављају парцијални изводи непознате функције u независно промењливих $x_1, x_2, ...x_n$ се назива парцијална диференцијална једначина. Њен ред је одређен редом највишег извода. Општа парцијална диференцијална једначина је облика:

$$F(x_1, x_2, ...x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} .... \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2} .... \frac{\partial^2 u}{\partial x_n} .... \frac{\partial^k u}{\partial {x_1}^{k_1} .... \partial {x_k}^{k_n}})$$

где је F дата функција.

Наравно, она не мора да садржи све независно промењливе, непознату функцију и све њене парцијалне изводе.
Решење парцијалне диференцијалне једначине је функција из неког допустивог скупа функција која ову једначину идентички задовољава.

4.2 Фуријеова метода раздвајања промењливих

Представимо $u(x,t)$ као производ:

$$u(x,t) = u(x) \cdot \tau(t)$$

Једначина

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}(p \cdot \frac{\partial u}{\partial x}) - q(x)u$$

се, овако уведеном сменом, трансформише на следећи облик:

$$u(x)\tau''(t) = (p \cdot u(x)'\tau(t))' - q(x)u(x)\tau(t) = \tau(t)[(pu(x))' - q(x)u(x)]$$

или

$$\frac{\tau"(t)}{\tau(t)} = \frac{p{\cdot}u(x)'\tau(t))'-q(x)u(x)}{u(x)} = \lambda$$

када последњу једнакост другачије напишемо, добићемо:

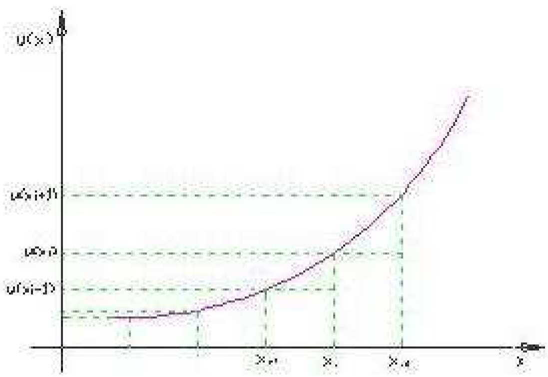
$$-((p{\cdot}u(x)')' + q(x)u(x) = \lambda u(x) = f(x)$$

4.3 Апроксимација помоћу коначних разлика

Метода коначних разлика се заснива на замени извода количницима коначних разлика.
Идеја се састоји у томе да се одабере коначно много тачака сегмента на ком је дефинисана промењлива x. Те тачке називамо чворовима мреже.
Уколико су чворови равномерно распоређени, мрежа је равномерна, иначе је неравномерна.
Мрежа дефинисана кораком h, растојањем међу чворовима, је дата са:

$$w_h = [x_i | x_i = ih; i = 0, 1...n; h = \frac{l}{n}]$$

где је l дужина сегмента на ком је промењлива x дефинисана.



На овако дефинисаној мрежи изводе апроксимирамо на следећи начин:

$$u_{x,i} = \frac{1}{h}[u(x_{i+1}) - u(x_i)]$$

$$u_{\bar{x},i} = \frac{1}{h}[u(x_i) - u(x_{i-1})]$$

$$u_{\bar{x}x,i} = \frac{1}{h}(u_{x,i} - u_{\bar{x},i}) = \frac{1}{h^2}[u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})]$$

Корисћењем коначних разлика, претходно дефинисан задатак:

$$-((p{\cdot}u(x)')' + q(x)u(x) = \lambda u(x) = f(x)$$

може бити представљен матричном једначином:

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2p+qh^2 & -p & & \cdots & \cdots \\ -p & 2p+qh^2 & & -p & \cdots \\ \cdots & \cdots & & \cdots & -p \\ \cdots & \cdots & & -p & 2p+qh^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

или,

$$Au = f$$

Дакле, овим смо добили систем линеарних једначина.
Наизглед апстактан проблем проналажења одговарајућег математичког модела за осцилаторни процес и његово решавање је сведено на добро познат терен линеарне алгебре.

Предавање 5

Испитивање особина сферних и планарних сочива на бази метаматеријала

Огњен Трипуновић, Математичка гимназија

Апстракт

Метаматеријали представљају релативно нову групу вештачких материјала чија се главна карактеристика огледа у негативном индексу преламања оваквих структура. Због својих изузетних перформанси, могуће их је користити за прављење суперсочива, тј. сочива која превазилазе дифракциони лимит. У овом раду дат је теоријски опис простирања светлости кроз сочиво направљено од метаматеријала узимајући у обзир две геометрије: планарну и сферну. Нумерички резултати показују зависност преломљеног дела поља од опсега фреквенција, упадног угла, као и од самог облика поља пуштеног на суперсоцхиво. Приказана је могућа примена сферног сочива базираног на метаматеријалу као рутера у оптичким телекомуникационим системима.

5.1 Увод

Главне електромагнетне карактеристике неког материјала су његова диелектрична пермитивност ε и магнетна пермеабилност μ. За разлику од природних средина, као што су стакло, кристал, итд., у којима су ова два параметра (тј. њихови реални делови) увек позитивне величине, за неке метаматеријале важи да је $\varepsilon, \mu < 0$. Такви метаматеријали се називају леворуки метаматеријали (LHM- left handed metamaterial) [1], јер у њиховом електромагнетном пољу важи такозвано правило леве руке.

Историја метаматеријала почиње 1968. године идејом руског физичара Виктора Веселага о постојању супстанце са истовремено негативним вредностима ε и μ [2]. Променом алгебарског знака тих параметара у четири Максвелове једначине [3], добија се леворука тројка електричног поља $\boldsymbol{E}$, магнетног $\boldsymbol{H}$ и фазног вектора $\boldsymbol{k}$ [1]. Тридесетак година касније осмишљене су структуре базиране на периодичном понављању блокова направљених од танких металних жица (TW- metal thin wire) и прстенастих резонатора (SRR- metal split ring resonator). Градивни елементи блока, независно једни од других, у неким опсезима фреквенција поседују негативну диелектричну пермитивност (TW), односно магнетну пермеабилност (SRR). Комбинацијом оваква два елемента направљени су метаматеријали са електромагнетним својствима која се у природи не могу пронаћи.

Битна особина метаматеријала јесте да им је просечна димензија јединичне ћелије много мања од таласне дужине упадног зрачења. У крајњем случају, она може износити четвртину вредности таласне дузхине упадног зрачења. То је услов који осигурава да при преламању таласа кроз метаматеријал не дође до ефеката расејања и дифракције [1].

Индекс преламања неке средине ($n = n' + in''$, где су n' и n'' реалан и имагинаран део индекса преламања, респективно) зависи од поменутих двеју величина ε и μ. Иако се обично сматра да је $n' > 0$, релација $n' < 0$ не крши никакве фундаменталне законе. Материјал са истовремено негативним реалним деловима диелектричне пермитивности ε' и магнетне пермеабилности μ' ће увек поседовати негативан ефективни индекс преламања (убудуће само индекс преламања). Главна особина ових материјала је инверзан Снелов закон. Закон преламања је дат изразом $n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$ при чему су α_1 и α_2 упадни, односно преломљени угао, а n_1 и n_2 индекс преламања средине из које талас долази, односно материјала кроз који се талас прелама. Пошто је индекс преламања LH метаматеријала негативан, значи да се кроз такву средину светлост прелама под негативним углом, тј. са исте стране нормале на раздвојну површину као и упадни талас. Потребно је напоменути да индекс преламања зависи и од фреквенције и да у зависности упадног угла (Брустеров угао) може доћи до појаве тоталне рефлексије. У овим материјалима примећени су и феномени инверзног Доплеровог ефекта, обрнуте Черенкове радијације итд. [4].

Због мноштва специфичних својстава, метаматеријали би у великој мери могли допринети развоју оптике, медицине и разних научних грана. Наиме, предвиђања указују на то да би се од њих могла произвести тзв. суперсочива која би била планарна за разлику од конвенционалних и давала оштрију слику предмета, значајно смањујући аберацију. Ова појава следи из чињенице да би код оваквих сочива био превазиђен дифракциони лимит, па би се она могла применити и у медицини за нпр. посматрање минијатурних ћелија рака [1]. Суперсочива би се могла користити за повећање капацитета меморије код оптичких дискова и као појачавачи антена [5]. Још једна необична примена метаматеријала јесте прављење плашта за невидљивост. Наиме, направљене су структуре које приморавају ЕМ зрак да заобиђе предмет који се налази унутар њих, па предмет, на тај начин, постаје невидљив за наше око.

Циљ рада је испитивање особина планарних сочива на бази метаматеријала, односно израчунавање услова при којима се ово сочиво може окарактерисати као суперсочиво. Други циљ представља испитивање особина сферног сочива конструисаног од метаматеријала, као и испитивање могућности за употребу таквог сочива као рутера у оптичким (телекомуникационим или рачунарским) системима.

5.2 Модели

У циљу извођења израза за индекс преламања метаматеријала коришћен је Лоренцов модел [6]. Релативна диелектрична пермитивност, магнетна пермеабилност и индекс преламања дати су изразима:

$$\varepsilon = \varepsilon_\infty \cdot \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_r^2 + i\omega\Gamma_e}\right), \tag{5.1}$$

$$\mu = 1 - \frac{F\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega\Gamma_m}, \tag{5.2}$$

$$n = \pm\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}, \tag{5.3}$$

где су ε_∞ позадинска диелектрична константа, ω фреквенција упадног таласа, ω_p плазма-фреквенција која представља јачину интеракције осцилатора са електричним пољем, ω_r резонантна фреквенција електричног дипола, F јачина интеракције електричног и магнетног поља, ω_0 резонантна фреквенција магнетног дипола, а Γ_e и Γ_m фактори пригушења у електричном и магнетном пољу, респективно. Уколико је задовољен услов $(\varepsilon' > 0 \vee \mu' > 0) \wedge (\varepsilon' \cdot \mu'' + \varepsilon'' \cdot \mu' > 0)$ вредност индекса преламања у једначини (3) ће бити позитивна. У осталим случајевима индекс преламања је негативан.

Апсорпција представља слабљење светлости при проласку кроз неку средину и њена вредност се креће у опсегу од 0 до 1. Апсорпција ЕМ таласа кроз метаматеријал је дата следећим изразом [7]:

$$A = \frac{1}{\gamma_0 |E_0|^2} \int_0^L \left[\mathbf{Im}(\gamma_b^2)|E_y(x)|^2 - \mathbf{Im}\Big(\frac{\mu'}{\mu} E' E_y^*\Big)\right],$$

где је E_0 упадна амплитуда електричног поља, E_y^* коњуговано комплексна вредност y-компоненте електричног поља у суперсочиву, $\gamma_0 = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_s \mu_s}$, где је k_0 таласни број у вакууму, β константа пропагације таласа, а ε_s и μ_s пермитивност и пермеабилност околне средине, респективно. Поље унутар метаматеријала на позицији x, означено је са $E_y(x)$ док су остале релевантне величине дате изразима $\mu' = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}$, $E'_y = \frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}x}$, $\gamma_b = \sqrt{\varepsilon_s \cdot \mu_s + \varepsilon \cdot \mu \cdot \sin^2 \alpha}$, при чему је α упадни угао.

При сваком преласку зрака светлости у нову средину, део светлости се рефлектује, а остатак се трансмитује. Проценат светлости који се трансмитује дат је следећом релацијом:

$$T = 1 - \left(\frac{\mathrm{tg}(\beta - \alpha)}{\mathrm{tg}(\beta + \alpha)}\right)^2,$$

где су α и β вредности упадног и преломљеног угла, респективно. Део светлости који прође кроз метаматеријал је дат следећом формулом:

$$T_{uk} = T_1 \cdot T_2 \cdot (1 - A),$$

где су T_1 и T_2 коефицијенти трансмисије при уласку, односно изласку из метаматеријала.

5.2.1 Планарно сочиво од метаматеријала

Нека је дато планарно сочиво дебљине d и нека се тачкасти извор светлости налази на растојању p од сочива (Слика 1). Фреквенција светлости задовољава услов да је $n' < 0$. Нека је θ_s угао под којим неки зрак упада на сочиво. Ако је n_s индекс преламања средине, према Снеловом закону преламања, има се да је угао преламања једнак

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\sin\theta_s \cdot n_s}{|n|}\right).$$

Главна оса садржи извор светлости и нормална је на сочиво. С друге стране сочива, зрак сече главну осу у тацки L. Како је $AB = PB \cdot \mathrm{tg}\theta_s$ и $AB = BC \cdot \mathrm{tg}\theta$, изједначавањем добијамо

$$BC = BE - CE = PB\frac{\mathrm{tg}\theta_s}{\mathrm{tg}\theta} \tag{5.4}$$

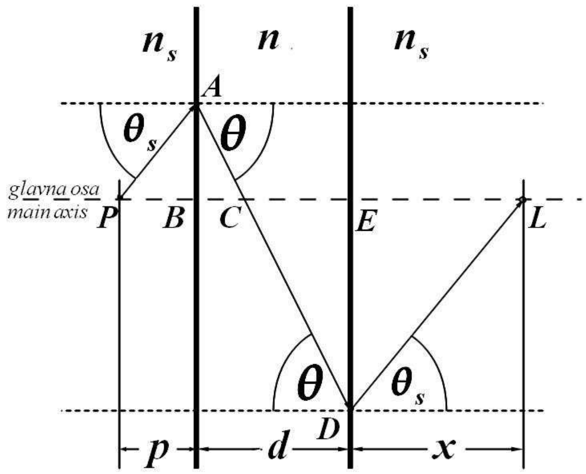
Аналогно се добија да је

$$CE = EL\frac{\mathrm{tg}\theta_s}{\mathrm{tg}\theta}. \tag{5.5}$$

Имајући у виду да је $PB = p$, $BE = d$ и $EL = x$, из једначина (4) и (5) следи:

$$x = d\frac{\mathrm{tg}\theta}{\mathrm{tg}\theta_s} - p. \tag{5.6}$$

У случају $x < 0$ пресечна тачка L је имагинарна и налази се са друге стране праве DE.



Слика 1: Планарно сочиво направљено од метаматеријала

5.2.2 Сферно сочиво од метаматеријала

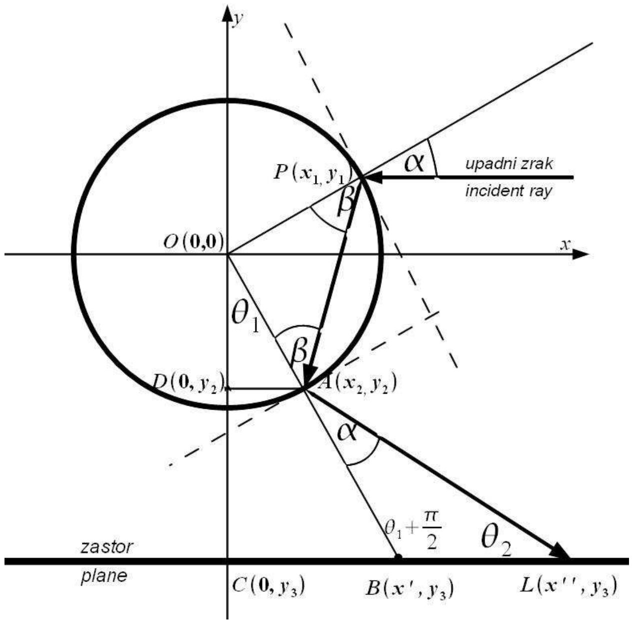
Посматра се 2-D модел хомогене сфере полупречника R_s од метаматеријала у (x, y) координатном систему (Слика 2). Уколико, паралелно x-оси, кроз сферно сочиво пустимо светлосни зрак чија фреквенција задовољава услов $n' < 0$ он ће се два пута преломити, као што је приказано на Слици 2. Ради детекције, са друге стране x-осе можемо поставити застор на коме ће овај зрак падати у тачку L. Уколико су координате упадне тачке $P(x_1, y_1)$ координату x'' тачке L можемо израчунати на начин описан у следећем пасусу.

Ради једноставности рецимо да је $x'' > 0$. Нека је (x, y) комплексна раван. Тачка A се добија ротацијом тачке P око центра сочива за угао $2\beta + \pi$. Отуда важи

$$(x_1 + iy_1)e^{i(2\beta+\pi)} = x_2 + iy_2. \tag{5.7}$$

Ако је $\gamma = 2\beta + \pi$, реални и комплексни делови леве стране једначине (7) респективно су дати изразима $x_2 = x_1 \cos\gamma - y_1 \sin\gamma$ и $y_2 = y_1 \cos\gamma + x_1 \sin\gamma$. Из сличности троуглова $\triangle DAO$ и $\triangle CBO$ следи да је $x' = x_2 \frac{y_3}{y_2}$. На сличан начин се добија да је $|AB| = R_s \frac{y_3 - y_2}{y_2}$. Такође важи $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{x_2}{R_s}$, па је угао код тачке L једнак $\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_1 - \alpha$. Примењујући синусну теорему на троугао $\triangle BLA$ добија се да је $|BL| = |AB| \frac{\sin\alpha}{\sin\theta_2}$. Сабирањем дужи CB и BL добијена је тражена координата тј. $x'' = x' + |BL|$. Уколико светлост падне на леву страну застора у некој тачки, сличним поступком је могуће одредити њене координате. Координата y_3 је одређена положајем застора.

Потребно је напоменути да, за разлику од планарних, у пракси до сада нису конструисане сферичне структуре на бази метаматеријала, тако да је, нажалост, сферни појам метаматеријала још увек само теорија.



Слика 2: 2-D модел сферног сочива направљеног од метаматеријала

5.3 Резултати и дискусија

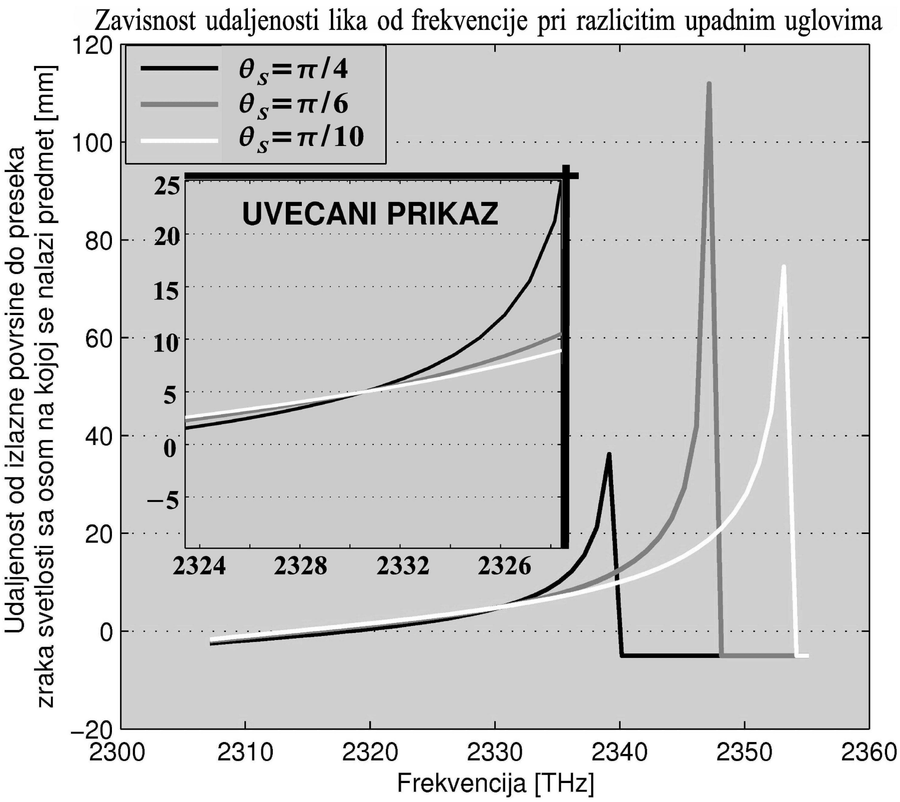
При проучавању модела метаматеријала потребно је изабрати особине истог које су окарактерисане параметрима из једначина (1) и (2). У овом раду коришћени су параметри из рада [7]. За тако одабране параметре, опсег таласних дужина у ком је индекс преламања негативан креће се између 799nm и 818nm Вредности параметара су: $\omega_p = 2700\mathtt{THz}$, $\omega_r = 0$, $\omega_0 = 2300\mathtt{Hz}$, $F = 0.052$, $\varepsilon_\infty = 3.1$, $\Gamma_e = 35\mathtt{THz}$, $\Gamma_m = 35\mathtt{THz}$ и $R_s = 50\mathtt{nm}$.

У одабраном моделу занемарени су фактори пригушења. Дебљина сочива износи $d = 1\mathtt{cm}$, а удаљеност тачкастог извора је $p = 0.5\mathtt{cm}$. За коефицијент индекса преламања средине узимано је $n_s = 1$.

5.3.1 суперсочиво

На Слици 3 приказано је мерено растојање пресечне тачке L од соцхива у зависности од фреквенције (једначина (6)). Прорачун је рађен за више различитих упадних углова. Пикови на Слици 3 представљају фреквенције при којима долази до тоталне рефлексије зрака, тако да при већим фреквенцијама од те, зрак не сече главну осу. Одатле видимо да се опсег дозвољених фреквенција смањује са повећањем упадног угла (поредећи по угловима са Слике 3, за $\theta_s = \frac{\pi}{4}$ опсег је најмањи, а за $\theta_s = \frac{\pi}{10}$ највећи). Тачка пресека за коју важи да је $x = d - p = 5\mathtt{mm}$

одговара случају када је $n_s = -n$ (увећани део на Слици 3), што значи да је ово потребан и довољан услов да овакво сочиво испољава особине суперсочива. На увећаном делу Слике 3 можемо очитати фреквенцију при којој је дати услов задовољен. Са Слике 3 се види да су, за мање фреквенције упадне светлости, нека растојања негативна, што значи да је у сваком од тих случајева пресек зрака са главном осом имагинаран. Овај проблем се превазилази смањењем удаљености тачкастог извора p од суперсочива, тако да сваки зрак сече главну осу и унутар сочива.

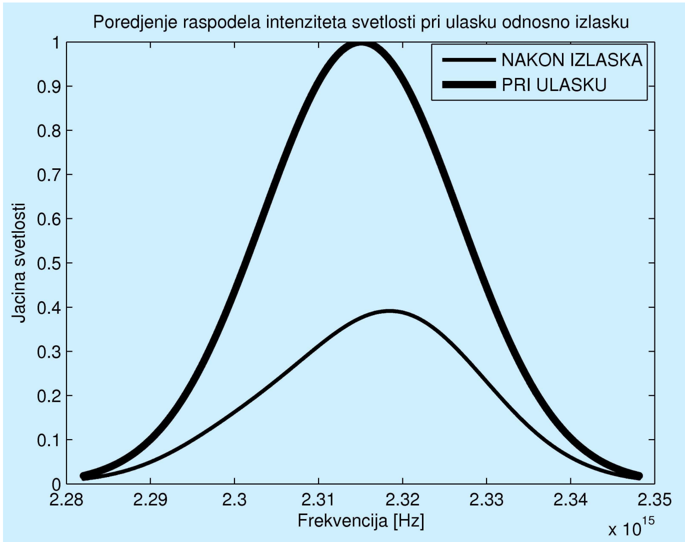


Слика 3: Удаљеност пресечне тачке L од сочива у зависности од фреквенција упадног зрачења за различите упадне углове

5.3.2 Сферно сочиво

Код сферне геометрије вршени су прорачуни за два случаја (Слика 2): када је упадни зрак занемарљиво мале ширине и када је лансиран ласерски импулс, тј. облика гаусијана.

У првом случају зрак носи таласе различитих фреквенција светлости чија је јачина одређена Гаусовом расподелом по фреквенцијама. На Слици 4 дат је упоредни приказ расподела јачина светлосног зрака при уласку у сочиво и при њеном изласку. Упадни угао је износио 0.4 радијана.

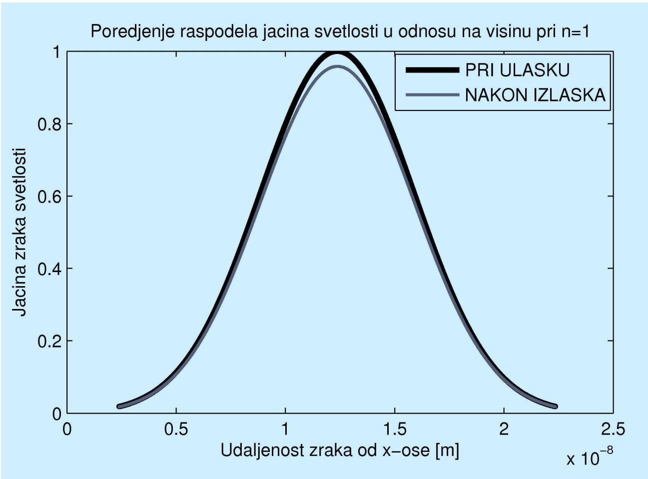


Слика 4: Поређење расподела заступљености фреквенција зрака светлости при уласку односно изласку из сферног сочива (за упадни угао од 0.4 `rad`)

Максимум јачине таласа при уласку није исти као максимум јачине таласа при изласку, већ је фреквенција другог мало виша. Расподела се деформисала, јер су се, при преламању упадног зрака, због различхитих индекса преламања, таласи различитих фреквенција преламали под различитим угловима и на тај начин прелазили различите путеве при проласку кроз сферу. Ова појава има за последицу различитост у коефицијенту трансмисије сваког таласа којег носи упадни зрак. Велика варијабилност индекса преламања метаматеријала узрокује расpршивање оваквог зрака при преламању кроз исти.

Види се да су губици релативно велики (око 50%). За различите упадне углове добијани су релативно слични графици, с тим што је при упадним угловима већим од 0.5 радијана дозвољени опсег фреквенција веома узак, тј. долази до потпуне рефлексије неких таласа у посматраном опсегу. Поредећи губитке, установљено је да су они увек максимални за талас фреквенције $\omega_{GUB} \approx 2345\mathtt{THz}$, независно од упадног угла. Утврђено је да је за ту фреквенцију индекс преламања најмањи и износи око -1.3. Фреквенције за које су губици минимални зависе од упадног угла и ти губици се крећу до 40%.

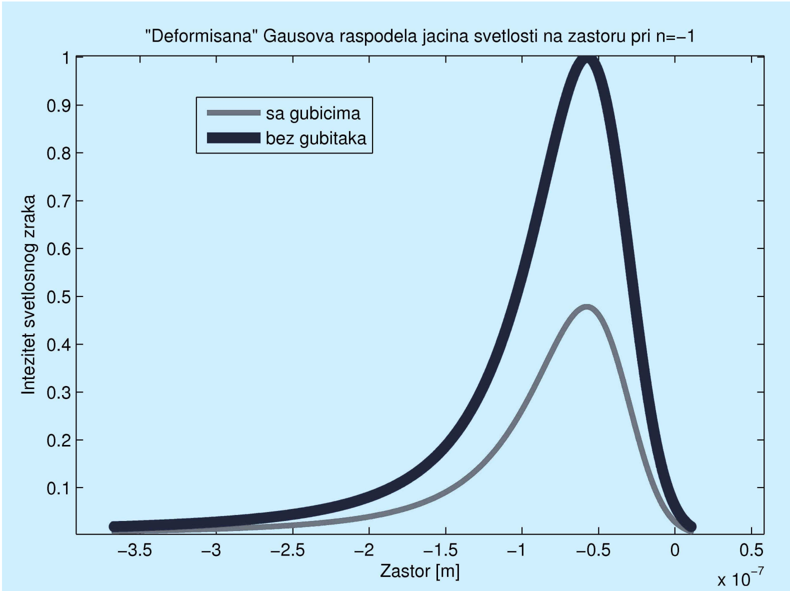
У другом случају посматран је ласерски импулс чија је ширина реда величине полупречника сфере. Јачина импулса је дата просторном Гаусовом расподелом (по ширини импулса) за одређену фреквенцију светлости. Ако се одабере фреквенција ω_1 таква да је индекс преламања метаматеријала 1, за њу при проласку зрака кроз сферу не долази до рефлексије; коефицијенти обе трансмисије једнаки су јединици, па су тада губици најмањи. На Слици 5 се види да су губици сведени на минимум и износе око 3%.



Слика 5: Поређење расподела јачина светлости при уласку односно изласку из сферног сочива у односу на висину, за $n = 1$

Следећи пример посматра застор постављен као на Слици 2, тако да је $y_3 = -2R_S$. Ако је фреквенција ω_2 ласерског зрака таква да је индекс преламања негативан, зрак ће падати на застор. Фреквенција ω_2 је одабрана тако да је $n' = -1$. На Слици 6 се јасно види како се гаусијан на застору при овој фреквенцији ласерског импулса спустио због губитака и деформисао. До деформације је дошло јер су се зраци светлости који су на уласку били ближи x-оси, преламали под релативно малим углом и прешли највећи пут до застора. Зато се деформација гаусијана на изласку може смањити подизањем доњег дела ласерског импулса, јер би тако све компоненте снопа падале ближе y-оси и добијени гаусијан би био ужи. Губици су прибижно износили 52%. Ради провере израчунато је и да су губици највећи за фреквенцију ω_{GUB} и износе око 65%. Али упркос томе, то је ,,сигурна” фреквенција, јер је гранични упадни (Брустеров) угао при коме долази до тоталне рефлексије највећи.

Уколико би се поставио још један застор вертикално у ИИ квадрант, избором фреквенције упадног зрака (ω_1 или ω_2), могуће је диктирати правац простирања светлости кроз овакво сферно сочиво. Наиме, за прву фреквенцију светлост би скренула лево, док би за другу наставила простирање у истом смеру завршивши на овом застору. На овај начин, могуће је реализовати оптички рутер који би избором фреквенције усмеравао зрак у жељеном правцу.



Слика 6: Расподела интензитета светлости на застору са губицима односно без њих при $n = -1$

5.4 Закључак

Индекс преламања метаматеријала је веома променљив у зависности од карактеристика ЕМ зрака који се пушта кроз њега. Доказано је да, у опсезима фреквенција које смо користили, а у складу са датим параметрима, суперсочиво може постојати искључиво ако је његов коефицијент индекса преламања једнак негативном коефицијенту индекса преламања средине. Примећено је да се највећи губици, при проласку ЕМ таласа кроз сферно сочиво направљено од метаматериала, дешавају при минималном индексу преламања. Интересантно је и то да на губитке готово не утиче упадни угао зрака.

Пројекат би се могао побољшати и када би се у обзир узело да у реалном случају ласерски импулс није одређен само једном, главном фреквенцијом. Наиме, ласерски импулс садржи низ таласа фреквенција блиских главној фреквенцији зрачења ласера. Њихова заступљеност је дата Гаусовом расподелом. На тај начин би на застор у једну тачку стизали зраци више фреквенција које би морале да се слажу и по фазама.

Конструкција сферних сочива би могла да допринесе развитку рутера, уређаја који би, у зависности од фреквенције сигнала који шаљемо, омогућили скретање сигнала у жељеном смеру.

Литература

[1] *C. Caloz and T. Itoh, Electromagnetic Metamaterials: Transmission Line Theory and Microwave Applications, John Wiley & Sons*, (2006)

[2] *V.G. Veselago, The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ε and μ, Sov. Phys. Usp. 10, 509-514* (1968)

[3] *K.Kawano and T.Kitoh, Introduction to optical waveguide analysis (solving Maxwells equations and the Schrdinger equation), John Wiley & Sons* (2001)

[4] *P.W.Milloni, Fast Light, Slow Light and Left-Handed Light, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia* (2005)

[5] *A. Patel, The Key to the Secret garden I, Science, Issue 1, 16-17* (2005)

[6] *R. Ruppin, Electromagnetic energy density in a dispersive and absorptive material,Phys. Lett. 299, 309-312* (2002)

[7] *I.Ilic, P.P.Belicev, V. Milanovic and J. Radovanovic, Analysis of tunneling times in absorptive and dispersive media, J. Opt. Soc. Am. B, 25, 11, 1800-1804* (2008)

Предавање 6

Хиперболичка геометрија, увод и модели

Александра Перишић, Математички факултет

6.1 Увод

Хиперболичка геометрија је настала у првој половини деветнаестог века, у покушају да се разуме Еуклидово аксиоматско заснивање геометрије. То је не-Еуклидова геометрија, дакле, геометрија која противречи једној од Еуклидових аксиома.

Савременим језиком изречене Еуклидове аксиоме гласе:
1. Сваке две тачке могу се спојити јединственом правом линијом.
2. Свака права линија се може бесконачно продужити у оба смера.
3. Постоји јединствени круг унапред изабраног полупречника и центра.
4. Сви прави углови су међусобно подударни.
5. Ако права линија која сече две праве линије, прави са њима два оштра угла, са исте стране, онда се те две линије, бесконачно продужене, секу у једној тачки која је са исте стране као та два оштра угла.

Пета аксиома је еквивалентна следећој Аксиоми паралелности и гласи:
5'.Постоји јединствена права која је паралелна унапред датој правој и садржи унапред дату тачку.

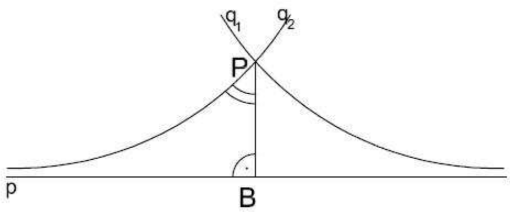
Прве четири аксиоме заснивају Апсолутну геометрију, дакле оне су основа сваке геометрије. Њих је забележио грчки математичар Еуклид 300 година пре нове ере. Вековима су математичари покушавали да као теорему докажу пету аксиому из прве четири. То је било не-

могуће без додатних претпоставки. Тако су математичари, на челу са Гаусом и Лобачевским увели потпуно нов правац у геометрији, заменивши аксиому паралелности новом аксиомом:
5'. Постоји више од једне праве која је паралелна унапред датој правој и садржи унапред дату тачку.

Ова аксиома није у контрадикцији са прве четири аксиоме и то је на неколико модела доказао Италијански математичар Белтрами. Данас су најзаступљенији модели хиперболичке равни: Поенкареов диск моде, Поенкареов полуравански модел и Клајнов модел.

6.2 Линије и углови у хиперболичкој геометрији

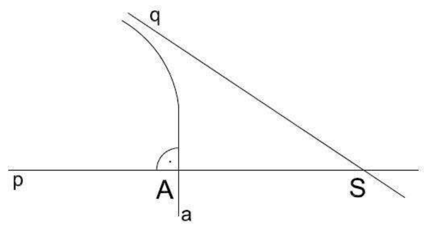
Аналогно појму паралелности у Еуклидској геометрији, у Хиперболичкој геометрији се уводе појам хиперпаралелност и ултрапаралелност (коју ћемо од сада звати паралелност). Нека је дата права p и тачка P као на слици. Нека је тачка $B \in p$ таква да је PB ортогонално на праву p. Нека је q_1 права која садржи тачку P, не сече праву p (ова права постоји на основу аксиоме 5') и тако да је угао између PB и q_1 најмањи могући. За праву q_1 кажемо да је паралелна правој p.



Симетрично у односу на PB постоји и права q_2 и то су једине две паралелне праве правој p које садрже тачку P. Све друге праве које садрже тачку P, али не секу праву p су хиперпаралелне праве и њих има бесконачно много. Угао између нормале PB и праве q_1 се назива угао паралелности. Он зависи од дужине PB. Функција која једнозначно придружује угао паралелности сегменту PB се назива функција Лобачевског $\sqcap(PB)$. Док је у Еуклидској геометрији угао паралелности $90°$, у Хиперболичкој он зависи од дужине PB. Што је дужна PB већа, угао паралелности је мањи, и што је дужина PB мања, тај угао је већи и приближава се $90°$. У складу са тим, што је троугао већи и збир његових углова је мањи. Дакле, збир углова у Хиперболичком троуглу је мањи од $180°$. Једна битна последица тога је да постоји јединствена права која садржи унапред задату тачку и ортогонална је на дату праву, што важи и у Еуклидској геометрији. Даље, збир углова у Хиперболичком четвороуглу је мањи од $360°$, па следи да за две хиперпаралелне праве постоји јединствена заједничка нормала (док их је у Еуклидској бесконачно много).[1]

Ево још неколико занимљивих примера које је немогуће замислити у Еуклидској геометрији.

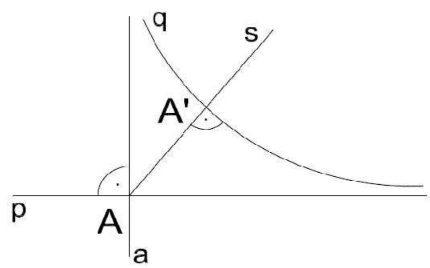
Задатак 1. Ако се праве p и q секу у тачки S одредити праву паралелну правој q, а ортогоналну правој p, а затим одредити пројекцију праве q на праву p.
Решење: Ако је a тражена права и A пресечна тачка правих p и a, онда је $\sqcap(SA)$ угао паралелности за праву a и тачу S, а то је баш оштар угао између правих p и q.



Дакле, $SA = \sqcap^{-1}(\sphericalangle p, q)$. Одредимо на правој p тачку A тако да важи $SA = \sqcap^{-1}(\sphericalangle p, q)$. Имајући у виду унакрсни угао између права p и q са друге стране тачке S, праве p постоји и тачка A' таква да је $SA' = \sqcap^{-1}(\sphericalangle p, q)$. Пројекција праве q на праву p је отворена дуж AA' (или само тачка A, у случају да су праве p и q ортогоналне).$\square$

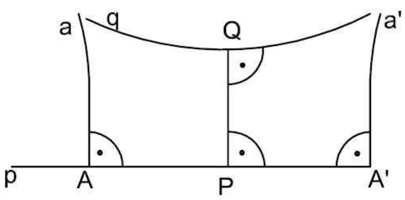
Задатак 2. Ако су дате две паралелне праве p и q, одредити праву a која је ортогонална на праву p и паралелна правој q, а затим одредити пројекцију праве q на праву p.
Решење: Ако је a тражена права и A пресечна тачка правих p и a, нека је s права ортогонална на q која садржи тачку A. Нека је A' тачка у пресеку правих q и s. Тада је $\sphericalangle(AA', p)$ угао паралелности за праву p и тачку A. Дакле, $\sphericalangle(AA', p) = \sqcap(AA')$ и слично $\sphericalangle(AA', a) = \sqcap(AA')$.

[1]Угао паралелности је увек мањи од $90°$, дакле, две паралелне праве немају заједничку нормалу.



Следи $90^\circ = \sphericalangle(a,p) = 2\sqcap(AA')$, па $AA' = \sqcap^{-1}(45^\circ)$. Значи, тачка A је на удаљености $\sqcap^{-1}(45^\circ)$ од праве q и припада правој p. Сада је права a јединствена права која садржи тачку A и ортогонална је на праву p. Пројекција праве q на праву p је отворена полуправа са теменом у тачки A. $\square$

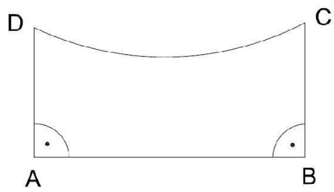
Задатак 3. Ако су дате две хиперпаралелне праве p и q, одредити праву a која је ортогонална на праву p и паралелна правој q, а затим одредити пројекцију праве q на праву p.
Решење: Нека је PQ заједничка нормала за p и q, нека је a тражена права и A пресечна тачка правих a и p. Ако је права s паралелна са a и q онда је $\sphericalangle(s,PQ) = \sqcap(PQ)$ и $\sphericalangle(s,PA) = \sqcap(PA)$.



Збир тих углова је 90°, па је $PA = \sqcap^{-1}(90^\circ - \sqcap(PQ))$. Тако добијамо тачку A, а онда је права a јединствена која садржи ту тачку и ортогонална је на p. Аналогно, са друге стране PQ постоји још једна права a' и тачка A'. Пројекција праве q на p је отворена дуж AA'. $\square$

6.3 Сакеријев и Ламбертов четвороугао

Имајући у виду да је збир углова у троуглу у Хиперболичкој геометрији мањи од 180°, следи да је у четвороуглу мањи од 360°. Четвороугао у коме су два угла на истој основици 90°, а наспрамне странице, ортогоналне на ту основицу, једнаких дужина назива се Сакеријев четвороугао. (Приметимо да је то у Еуклидској геометрији правоугаоник.)

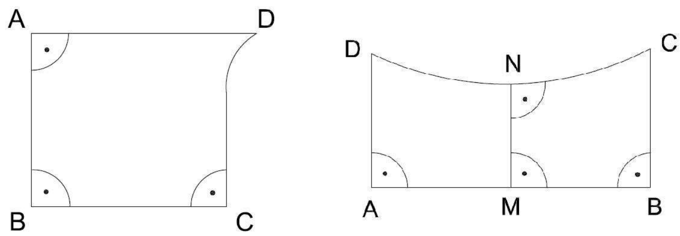


$AB-$ основица, $CD-$противосновица, $AD, BC-$бочне ивице

Пошто је збир углова мањи од 360° закључујемо да су углови на противосновици оштри.

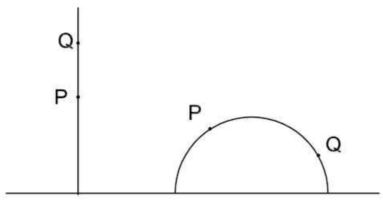
Задатак 4. Показати да је права одређена средиштима основице и противосновице њихова заједничка нормала.□

Четвороугао у коме су три угла једнака 90° назива се Ламбертов четвороугао. На слици је приказано како заједничка нормала основице и противосновице Сакеријевог четвороугла дели исти на два Ламбертова.

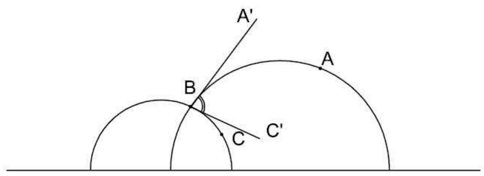


6.4 Поенкареов полуравански модел

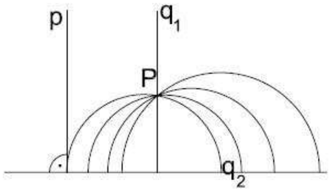
Посматрајмо горњу полураван Еуклидске равни $\mathbb{R}^2, y > 0$. Тачке у овом моделу дефинишемо као Еуклидске тачке, а праве линије су сви полукругови ортогонални на $x-$осу, дакле са центром на $x-$оси и Еуклидске праве линије ортогоналне на $x-$осу. $x-$осу називамо границом Хиперболичке равни.

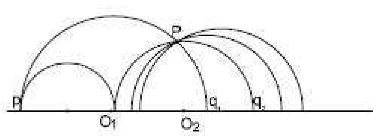


Проверимо да ли важе аксиоме Хиперболичке геометрије. Нека су P и Q две произвољне тачке. Ако оне припадају истој Еуклидској правој ортогоналној на границу равни, онда је та права тражена хиперболичка права. Ако не припадају, онда одредимо Еуклидску симетралу дужи PQ. Нека је тачка R пресечна тачка те симетрале и границе Хиперболичке равни. Тражена дуж је Еуклидски круг са центром у тачки R и полупречником RP. Даље, Хиперболички круг дефинишемо исто као и Еуклидски. Одредимо још Хиперболички угао. Нека су A, B и C три неколинеарне тачке. Конструишимо Еуклидске тангенте BA' и BC' из тачке B на Еуклидске кругове, односно Хиперболичке дужи BA и BC. Мера хиперболичког угла $\sphericalangle(AB, BC)$ једнака је мери Еуклидског угла $\sphericalangle(A'B, BC')$.



Проверимо још аксиому $5'$. Нека је дата права p и тачка P ван ње. Јединствене две Хиперболичке праве q_1 и q_2 паралелне правој p које садрже тачку P, као и неколико хиперпаралелних правих приказане су на сликама.

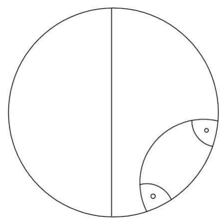




Упоредимо јш неке карактеристике Еуклидског и Хиперболичког троугла. Још са 17 година чувени Немачки математичар Гаус је доказао да је површина Хиперболичког троугла једнака $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$, где су α, β, γ унутрашњи углови троугла. Дакле, површина је увек строго мања од π. Даље, занимљиво је и да појам сличности троуглова у Хиперболичкој геометрији не постоји. Ако два троугла имају исте углове, онда су они и подударни.

6.5 Поенкареов диск модел

Посматрајмо Еуклидски круг, без граничне кружнице, називаћемо га *апсолута.* Тачке у овом моделу дефинишемо као Еуклидске тачке, а праве као пречнике круга и као делове кружница ортогоналне на дати круг [2] .



Подсетимо се како се конструише круг ортогоналан на дати круг k који садржи унапред изабрану тачку P (и тиме конструишемо праву кроз дату тачку). Инверзијом у односу на апсолуту[3] пресликамо тачку P у тачку P'.[4] Сваки Еуклидски круг који садржи тачке P и P' је ортогоналан на апсолуту (погледати додатак). Делови тих кругова унутар апсолуте су Хиперболичке праве.

Сада можемо проверити да у Поенкареовом диск моделу важе Хиперболичке аксиоме. Нека су P и Q произвољне тачке у диску. Ако су колинеарне са центром круга онда је тај пречник тражена хиперболичка права. Ако нису, онда инверзијом у односу на апсолуту пресликамо тачку P у тачку P'. Постоји јединствени Еуклидски круг који садржи тачке P, Q и P' и његов део унутар апсолуте је тражена Хиперболичка права.

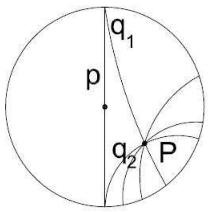
Хиперболички круг и Хиперболички угао се дефинишу слично као у претходном моделу.

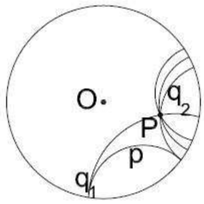
[2]два круга су ортогонална, ако су ортогоналне одговарајуће тангенте у пресечним тачкама.

[3]инверзија у односу на круг центра O, полупречника r је пресликавање које тачки P додељује тачку P' тако да су P и P' колинеарне са центром круга, налазе се са исте стране и важи $|OP| \cdot |OP'| = r^2$.

[4]У пресеку нормале из тачке P на праву OP и круга k добијемо тачку T. Из те тачке конструишемо тангенту на круг k. Пресек те тангенте и праве OP је тражена тачка P'.

Проверимо још аксиому $5'$. Нека је дата права p и тачка P ван ње. Јединствене две Хиперболичке праве q_1 и q_2 паралелне правој p које садрже тачку P, као и неколико хиперпаралелних правих приказане су на слици.





6.6 Додатак

За пар тачака P, Q кажемо да је *хармонијски спрегнут са тачкама* R, S, ознака $H(P,Q;R,S)$ ако су колинеарне и важи

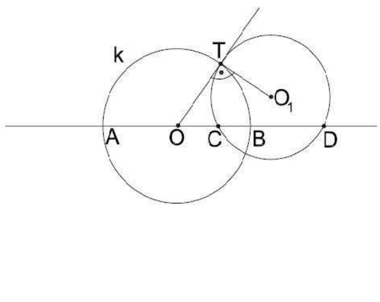
$$\frac{PR}{RQ} = -\frac{PS}{SQ}.$$

Задатак5: Доказати да је $H(P,Q;R,S)$ ако и само ако је $|PO|^2 = |OR| \cdot |OS|$, где је тачка O средиште дужи PQ. $\square$

Нека су дате тачке A и B на кругу k и тачка P, која припада правој AB ван круга k. Нека је T додирна тачка тангенте из тачке P на круг k. Тада важи

$$|PT|^2 = |PA| \cdot |PB|.$$

Ова особина се назива *потенција тачке P у односу на круг k.*
Задатак6: Доказати ову особину.$\square$
Задатак7: Нека тачке A и B припадају кругу k дијаметрално су супротне, а тачке C и D кругу l и нека су ове 4 тачке колинеарне. Тада су кругови k и l ортогонални ако и само ако важи $H(A,B;C,D)$.
Решење: Нека је тачка O центар круга k. Нека је T тачка на кругу l тако да је $|OT|^2 = |OC| \cdot |OD|$ (потенција тачке O у односу на круг l).



Сада на основу задатка5 $H(A, B; C, D)$ важи ако и само ако је $|OT| = |OA|$, дакле ако тачка T припада и кругу k, а тада су ти кругови ортогонални.$\square$

Применимо расуђивање из овог задатка на тачке P и P' (где је P' настала инверзијом у односу на апсолуту), уместо тачака C И D, и на произвољан круг l који их садржи. Ако су A и B пресечне тачке праве PP' и апсолуте, онда је због инверзије $|OP| \cdot |OP'| = |OA|^2$, па због задатка5 следи $H(A, B; P, P')$, а због задатка 7 следи да је круг l ортогоналан на апсолуту.

Литература:

1. *Hyperbolic Geometry*, *JAMES W. CANNON*, *WILLIAM J. FLOYD*, *RICHARD KENYON*, *AND WALTER R. PARRY*

2.*Hyperbolic Geometry*, *Christina L. Sheets*, *University of Nebrask – Lincoln*

3. Геометрија, Зоран Лучић,

4. Вежбе са часова Основа геометрије, 2006. године, асистент др Мирјана Антић

Предавање 7

Пробабилистички метод у теорији графова

Душан Милијанчевић, Математичка гимназија

7.1 Увод

Граф $G = (V, E)$ је уређени пар скупа темена (чворова) и ивица (грана), где је $E \subset \binom{V}{2}$ подскуп двочланих подскупова од V. Скуп свих графова са n темена означићемо са G_n. Број темена графа G означићемо са $|G|$, а број ивица са $||G||$. Степен чвора графа представља број грана које излазе из њега. Ако је степен неког чвора графа једнак 0 кажемо да је тај чвор изолован.

Увешћемо још неколико стандардних термина из теорије графова.

Дефиниција 6. *Пут дужине k у графу $G = (V, E)$ је уређена k-торка $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ таква да је $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\} \in E$.*

Специјалан вид пута је циклус:

Дефиниција 7. *Циклус дужине k у графу $G = (V, E)$ је уређена k-торка $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ таква да је $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\}, \{v_k, v_1\} \in E$.*

Другим речима циклус је затворени пут. Повезаност граф је битно својство графа и дефинише се као:

Дефиниција 8. *Граф је повезан уколико постоји пут између свака два његова чвора.*

Ако постоји пут између нека два чвора онда постоји пут који пролази кроз свако теме највише једном (уколико није циклус, где се поцхетно и прво теме поклапају), па можемо претпоставити да сваки пут садржи различита темена, осим можда крајњег и почетног.

У делу о леми о пресецима и проблемима дискретне геометрије биће нам потребан појам планарног графа:

Дефиниција 9. *За граф кажемо да је планаран уколико се његова темена могу сместити у раван, тако да се за сваку његову ивицу у тој равни може конструисати непрекидна крива која повезује два одговарајућа темена, при чему се никоје две од конструисаних кривих не секу у унутрашњости.*

За планарне графове важи Ојлерова теорема коју доказујемо:

Теорема 17. *Нека је G планаран повезан граф са e ивица, n чворова и дели раван на o области. Онда је $n + o = e + 2$.*

Доказ: Тврђење доказујемо индукцијом по броју области o. Ако G има једну област, онда нема циклуса и повезан је, па представља дрво. Онда је $e = n-1$, па важи $e+2 = n+o$. У супротном, изаберимо ивицу d која је „гранична"ивица две различите области од G и избришимо је. d може да се појављује само једном на граници неке области, па његовим брисањем граф остаје повезан (сваки пут који прелази преко d може се заменити путем који иде остатком границе те области). Овакво брисање смањује и број области и број ивица за 1, па теорема по принципу математичке индукције важи.

У одељку граничне функције користећемо функцију која мери густину графа и дефинише се:

Дефиниција 10. *Функција ϵ мери густину графа, тј. $\epsilon(G) = \frac{||G||}{|G|}$, за непразан граф G.*

Кажемо да је граф G балансиран уколико важи

$$\epsilon(G) = \max\{\epsilon(F) \mid \emptyset \neq F \subset G\}.$$

Користићемо још два појма из теорије графова - хроматски број и највећи број независних темена.

Дефиниција 11. *Хроматски број графа G се означава са $\chi(G)$ и представља најмањи број боја којим се могу обојити темена графа G тако да су свака два темена која су повезана ивицом обојена различитим бојама.*

Дефиниција 12. *Највећи број независних чворова графа G који се означава са $\alpha(G)$ представља највећи број чворова графа од којих никоја два нису повезана ивицом.*

Из теорије вероватноће потребне су нам основне ствари. Сви простори вероватноће које посматрамо су коначни и означавамо их са Ω, рецимо $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$ и то ћемо на даље сматрати. За дате реалне бројеве $p_i \geq 0$, за $1 \leq i \leq k$, такве да $\sum_{1\leq i\leq k} p_i = 1$, вероватноћу догађаја A дефинишемо као

$$Pr[A] = \sum_{\omega \in A} Pr[\omega],$$

где је $Pr[\omega_i] = p_i$ за $1 \leq i \leq k$. Лако се проверава да ова дефиниција испуњава аксиоме вероватноће.

За свака два догађаја A и B важи

$$Pr[A \cup B] = Pr[A] + Pr[B] - Pr[A \cap B],$$

што се за дисјунткне догађаје своди на $Pr[A \cup B] = Pr[A] + Pr[B]$. Независност два догађаја дефинишемо као:

Дефиниција 13. *Два догађаја A и B су независна ако важи*

$$Pr[A \cap B] = Pr[A] \cdot Pr[B].$$

Случајне променљиве посматраћемо само над реалним доменима и дефинишемо их као реалне функције $\Omega \to \mathbb{R}$. Ако случајне променљиве над истим простором вероватноће сабирамо, одузимамо, множимо са скаларом или множимо међусобно опет добијамо случајне променљиве.

Очекивање случајне променљиве X дефинишемо као

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} Pr[\omega] X(\omega).$$

За очекивање збира случајних променљивих важи следећа једнакост:

Теорема 18. *Нека су X и Y случајне променљиве дефинисане над Ω, а a и b произвољни реални бројеви. Онда важи:*

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y].$$

Доказ: Имамо да је

$$\begin{aligned} E[aX + bY] &= \sum_{\omega \in \Omega} Pr[\omega](aX(\omega) + bY(\omega)) \\ &= a \sum_{\omega \in \Omega} Pr[\omega] X(\omega) + b \sum_{\omega \in \Omega} Pr[\omega] X(\omega) \\ &= aE[X] + bE[Y]. \end{aligned}$$

Очекивање производа случајних променљивих можемо једноставно израчунати у случају када су те случајне променљиве независне. Појам независности случајних променљивих се дефинише као:

Дефиниција 14. *Две реалне случајне промењиве X и Y на истом простору вероватноће Ω су независне ако важи*

$$Pr[X = x \cap Y = y] = Pr[X = x] \cdot Pr[Y = y],$$

за произвољне реалне бројеве x и y, где је $X = x$ скуп свих $\omega \in \Omega$ за које је $X(\omega) = x$.

Слично са $X \geq t$ означаваћемо скуп $\{\omega \,|\, \omega \in \Omega, X(\omega) \geq t\}$. За случај независних случајних промењивих важи следећа једнакост:

Теорема 19. *Нека су X и Y независне случајне промењиве на истом простору вероватноће Ω. Онда је $E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$.*

Доказ: Имамо да је

$$\begin{aligned} E[X] \cdot E[Y] &= \left(\sum_{\omega \in \Omega} Pr[\omega] X(\omega)\right) \cdot \left(\sum_{\omega \in \Omega} Pr[\omega] Y(\omega)\right) \\ &= \sum_{\omega, \lambda \in \Omega} Pr[\omega] Pr[\lambda] X(\omega) Y(\lambda). \end{aligned}$$

Нека X узима вредности $\{x_1, \ldots, x_m\}$, а Y вредности $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Онда је

$$\sum_{\omega, \lambda \in \Omega} Pr[\omega] Pr[\lambda] X(\omega) Y(\lambda) = \sum_{i,j} x_i y_j Pr[X = x_i] Pr[Y = y_j].$$

Како су X и Y независне промењиве то је

$$Pr[X = x_i \cap Y = y_j] = Pr[X = x_i] Pr[Y = y_j],$$

за све $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq j \leq n$. Онда важи

$$\sum_{i,j} x_i y_j Pr[X = x_i] Pr[Y = y_j] = \sum_{i,j} x_i y_j Pr[X = x_i \cap Y = y_j],$$

што је једнако $\sum_{\omega \in \Omega} Pr[\omega] X(\omega) Y(\omega)$.

У даљем раду користићемо и следеће две неједнакости:

Теорема 20. (*Марковљева неједнакост*) *За случајни промењиву X која узима ненегативне вредности над Ω и $t > 0$ важи*

$$Pr[X \geq t] \leq \frac{E[X]}{t}.$$

Доказ: Имамо да је

$$E[X] = \sum_{\omega\in\Omega} Pr[\omega]X(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega; X(\omega)<t} Pr[\omega]X(\omega) + \sum_{\omega\in\Omega; X(\omega)\geq t} Pr[\omega]X(\omega),$$

а како је први сабирак ненегативан то је

$$E[X] \geq \sum_{\omega\in\Omega; X(\omega)\geq t} Pr[\omega]X(\omega) \geq t\cdot Pr[X\geq t],$$

из чега следи тражена неједнакости.

Теорема 21. (*Чебишевљева неједнакост) За сваку случајну променљиву X над Ω и $t \geq 0$ важи*

$$Pr\left[|X(x) - E[X]| \geq t\right] \leq \frac{E[(X - E[x])^2]}{t^2}.$$

Доказ: Имамо да је $Pr[|X - E[X]| \geq t] = Pr[(X - E[X])^2 \geq t^2]$, па применом претходне теореме на случајну променљиву $(X - E[X])^2$ добијамо да је

$$Pr[|X - E[X]| \geq t] = Pr[(X - E[X])^2 \geq t^2] \leq \frac{E[(X - E[x])^2]}{t^2}.$$

Величина $E[(X - E[X^2])]$ се зове дисперзија случајне променљиве X и за њу важи

$$\begin{aligned} E[(X - E[X])^2] &= E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2] \\ &= E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2 \\ &= E[X^2] - E[X]^2 \end{aligned}$$

због линеарности оператора очекивања.

7.2 Случајни графови

Интуитивно, случајни графови су графови који су настали случајним процесом. Користићемо модел у коме свака ивица има одређену фиксирану вероватноћу $p = p(n)$ (функција од n) да се налази у графу. Те вероватноће ће бити независне једна од друге. Овакав модел се назива Ердош-Ренји модел случајног графа. Прво доказујемо да се може изабрати оваква функција вероватноће.

Теорема 22. *Постоји функција вероватноће на G_n, таква да су вероватноће појављивања сваке ивице независне и једнаке p ($0 \leq p \leq 1$).*

Доказ: Означимо са $e_1, e_2, \ldots, e_k$, где је $k = \binom{n}{2}$, скуп свих двочланих подскупова скупа темена (ово су потенцијалне гране нашег графа). За свако e_i, $1 \le i \le k$, дефинишемо простор вероватноће на e_i са $\Omega^i = \{0^i, 1^i\}$. Интуитивно са 1^i означавамо постојање ивице e_i, а са 0^i супротно. Такође дефинишемо функцију вероватноће Pr^i на Ω^i са $Pr^i[\emptyset] = 0$, $Pr^i[0^i] = q$, $Pr^i[1^i] = p$ и $Pr^i[\Omega] = 1$. Тривијално, ова функција испуњава аксиоме вероватноће. За простор вероватноће на G_n узимамо $\Omega = \prod_{i=1}^{k} \Omega^i$. Функцију вероватноће на елементима Ω дефинишемо као

$$Pr[(\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_k)] = \prod_{i=1}^{k} Pr^i[\omega_i].$$

Такође узимамо $Pr[\emptyset] = 0$ и $Pr[A \cup B] = Pr[A] + Pr[B]$ за дисјунктне догађаје A и B. Видимо да ова функција испуњава аксиоме вероватноће.

Нека је $A_s = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k) \,|\, \omega_i \in \Omega^i, \omega_s = 1^s\}$ за $1 \le s \le k$. Догађај A_s представља скуп свих графова који имају ивицу s, другим речима постојање гране s. Сада можемо да покажемо да су догађаји A_s независни и да сваки од њих има вероватноћу p.

Имамо да је

$$Pr[A_s] = Pr^s[1^s] \prod_{i=1; i \ne s}^{k} Pr^i[\Omega^i] = p.$$

Докажимо да су A_s и A_r са $r \ne s$ независни догађаји. Имамо да је

$$Pr[A_r \cap A_s] = p^2 \prod_{i=1; i \ne r,s}^{k} Pr^i[\Omega^i] = p^2 = Pr[A_r] Pr[A_s].$$

Овим смо завршили доказ теореме.

Сада смо конструкцијом примера показали да на G_n можемо дефинисати простор и функцију вероватноће тако да се догађаји постојања ивице независни и са вероватноћом p. У складу са овом теоремом мозхемо дефинисати случајан граф за овај модел.

Дефиниција 15. *Случајни граф са n чворова и вероватноћом $0 \le p \le 1$ је*

$$\mathcal{G} = (G_n, p, \Omega, Pr),$$

где су Ω и Pr простор и функције вероватноће дефинисани као у претходној теореми.

У наставку се нећемо враћати на Ω и Pr, јер ће нам чињеница да се гране јављају независно са вероватноћом p омогућити да израчунамо потребне вероватноће, па ћемо често означавати $\mathcal{G} = (G_n, p)$.

Пример 1. *Вероватноћа графа $G \in G_n$ на $\mathcal{G}$ једнака је*

$$p^{||G||}(1-p)^{\binom{n}{2} - ||G||}.$$

Решење: Свака од $||G||$ постоју у графу са вероватноћом p, а преостале гране се не налазе у графу са вероватноћом $(1-p)^{\binom{n}{2}-||G||}$, па је вероватноћа графа $G \in G_n$ баш $p^{||G||}(1-p)^{\binom{n}{2}-||G||}$.

Особине случајних графова најчешће ћемо мерити случајном променљивом над G_n.

Пример 2. *Израчунати очекиван број ивица графа $G \in G_n$.*

Решење: Нека је X случајна променљива која представља број ивица графа $G \in G_n$. Онда је

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} k \binom{\binom{n}{2}}{k} p^k (1-p)^{\binom{n}{2}-k} = \binom{n}{2} p,$$

као што се и очекивало.

Можемо једноставно израчунати и очекивани број циклуса дужине k у случајном графу.

Теорема 23. *Очекивани број циклуса у графу $G \in G_n$ (у $\mathcal{G}$) дужине k једнак је*

$$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{2k} \cdot p^k.$$

Доказ: За сваки потенцијални циклус $C = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ графа G означхимо са I_C индикатор, т.ј. функцију која представља да ли се тај циклус налази у графу. Онда је

$$E(I_C) = Pr[C \subset G] = p^k,$$

јер I_C узима вредности 0 или 1. Из линеарности очекивања имамо да важи

$$E[X] = \sum_{C \subset G} E[I_C] = p^k \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{2k},$$

јер k различитих чворова можемо изабрати на $n(n-1)\dots(n-k+1)$ начина, а они генеришу $2k$ истих циклова.

Међутим, није увек једноставно израчунати очекивање неке особине. У многим случајевима, као на примеру хроматског броја графа, то представља отворен проблем. Занимљиво је посматрати шта се дешава са својствима графа са разним вредностима p када $n \to \infty$. За очекивани број циклуса дужине k имамо да важи:

$$\lim_{n\to\infty} E[X] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2k} \prod_{i=0}^{k-1} n(n-1)\dots(n-k+1)p^k = \frac{1}{2k} \lim_{n\to\infty} (np)^k.$$

Уколико је $p(n) = \frac{c}{n}$ за неко $c > 0$ онда је очекивана вредност $\dfrac{c^k}{2k}$. Ако важи $p(n)n \to 0$ за $n \to \infty$ очекивана вредност броја циклова дузхине k је 0, док је за $p(n)n \to \infty$ очекивана вредност једнака ∞. Испоставља се да слично асимптотско понашање важи и за многе друге особине графова. Детаљнијим изучавањем оваквих функција бавићемо се у следећем одељку.

7.3 Граничне функције

Као што смо поменули у претходном делу, за многа својства графа постоје граничне функције. Формално, својством графа сматрамо скуп графова који је затворен у односу на изоморфизам. Са $Pr[G(n,p) \in \mathcal{P}]$ означавамо збир свих вероватноћа графова из $G(n,p)$ који припадају $\mathcal{P}$. Прво дефинишимо граничну функцију:

Дефиниција 16. *За својство $\mathcal{P}$ случајног графа функцију вероватноће $t(n)$ називамо граничном функцијом ако има следеће особине:*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} Pr[G(n,p) \in \mathcal{P}] = 0$ *за* $\frac{p(n)}{t(n)} \to 0$ *где* $n \to \infty$*;*

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} Pr[G(n,p) \in \mathcal{P}] = 1$ *за* $\frac{p(n)}{t(n)} \to \infty$ *где* $n \to \infty$*.*

Из дефиниције следи да уколико је $t(n)$ гранична функција за неко својство графа онда је и $ct(n)$ за $c > 0$ гранична функција тог својства. На даље ћемо одређивати граничне функције до на константу. Уколико је $\lim_{n\to\infty} Pr[G \in \mathcal{P}] = 0$ кажемо да граф скоро сигурно нема својство $\mathcal{P}$, а уколико је $\lim_{n\to\infty} Pr[G \in \mathcal{P}] = 1$ кажемо да граф скоро сигурно има својство $\mathcal{P}$. Многа својства графа се односе на његове подграфе, па тако може да нас занима да ли скоро сигурно сви графови садрже потпун граф реда k. У томе нам може помоћи следећа теорема који су доказали Ердош и Ренји 1960. године. Означимо са $\mathcal{P}_H$, где је H неки граф, својство да граф има подграф изоморфан са H.

Теорема 24. *Ако је H балансиран граф онда је гранична функција за $\mathcal{P}_H$ једнака $n^{-\frac{1}{\epsilon(H)}}$.*

Доказ: Нека је X случајна промењлива која показује колико подграфа изоморфних са H има G. Означимо са k број чворова од H, а са l број његових грана. Са $\mathcal{H}$ означимо скуп свих графова изоморфних са H чија су темена нека од темена произвољног графа $G \in G_n$ (сви графови из G_n имају исти скуп темена). Онда је по Марковљевој неједнакости

$$Pr[G \in \mathcal{P}_H] = Pr[X \geq 1] \leq E[X] = \binom{n}{k} hp^l,$$

где је h број аутоморфизама графа H. Нека је $p = \gamma n^{-\frac{1}{\epsilon(H)}}$. Имамо да је

$$E[X] \leq n^k h \gamma^l n^{-\frac{l}{\epsilon(H)}} = h\gamma^l n^{k-\frac{l}{\epsilon(H)}} = h\gamma^l,$$

због $\binom{n}{k} \leq n^k$. Очигледно за $\gamma \to 0$ важи $Pr[G \in \mathcal{P}_H] \leq E[X] \to 0$, чиме смо доказали да скоро сигурно граф нема својство $\mathcal{P}_H$. Остаје нам да докажемо да ако $\gamma \to \infty$ онда граф скоро сигурно припада $\mathcal{P}_H$. То ћемо учинити користећи Чебишевљеву неједнакост. Имамо да је

$$Pr[X = 0] \leq Pr[|X - E[X]| \geq E[X]] \leq \frac{E[X^2] - E[X]^2}{E[X]^2},$$

па је довољно показати да $\frac{E[X^2]-E[X]^2}{E[X]^2} \to 0$ за $n \to \infty$ и $\gamma \to \infty$. Видимо да је

$$Pr[H_i \cup H_j \subset G] = p^{2l - ||H_i \cap H_j||},$$

за $H_i, H_j \in \mathcal{H}$. Како је H балансиран граф то је $\epsilon(H_i \cap H_j) \leq \epsilon(H)$, па је $||H_i \cap H_j|| \leq |H_i \cap H_j| \frac{l}{k}$, односно

$$Pr[H_i \cup H_j \subset G] = p^{2l - ||H_i \cap H_j||} \leq p^{2l - s\frac{l}{k}}.$$

где је $s = |H_i \cap H_j|$. Нека је $A_s = \sum_s Pr[H_i \cup H_j \subset G]$, где $\sum_s$ означава да се сумирање врши по свим паровима $H_i, H_j \in \mathcal{H}$ таквим да је $|H_i \cap H_j| = s$. За $s = 0$ добијамо да важи

$$A_0 = \sum_0 Pr[H_i \cup H_j \subset G] = \sum_0 Pr[H_i \subset G] Pr[H_j \subset G],$$

због независности догађаја $H_i \subset G$ и $H_j \subset G$ за $|H_i \cap H_j| = 0$. Онда важи

$$A_0 \leq (\sum Pr[H_i \subset G])^2,$$

где се сумирање врши по свим $H_i \in \mathcal{H}$. Последњи израз је једнак $E[X]^2$, па важи $A_0 \leq E[X]^2$. Оценимо сада A_s за $s > 0$. За фиксирани граф H_i постоји тачно $\binom{k}{s}\binom{n-k}{k-s}$ скупова са k чорова која са H_i имају заједничко s чворова. Како је вероватноћа за $H_i \cup H_j \subset G$ не већа од $p^{2l - s\frac{l}{k}}$ и H има h аутоморфизама то је

$$A_s \leq \sum_{H_i} \binom{k}{s} \binom{n-k}{k-s} h p^{2l - s\frac{l}{k}},$$

где се сумирање врши по свим $H_i \in \mathcal{H}$. Како таквих H_i има $\binom{n}{k} h$ то је

$$A_s \leq \binom{n}{k} \binom{k}{s} \binom{n-k}{k-s} h^2 p^{2l - s\frac{l}{k}}.$$

Имамо да је $E[X] = \binom{n}{k} hp^l$, па је

$$A_s \leq E[X]^2 \frac{\binom{k}{s}\binom{n-k}{k-s}}{\binom{n}{k}} p^{-s\frac{l}{k}}.$$

Како је

$$n^k \geq \binom{n}{k} \geq cn^k,$$

за неку константу c то је

$$\begin{aligned} A_s &\leq c_1 E[X]^2 n^{k-s} c_2 n^{-k} (\gamma n^{-\frac{k}{l}})^{-s\frac{l}{k}} = c_1 c_2 E[X]^2 \gamma^{-s\frac{l}{k}} \\ &\leq c_1 c_2 E[X]^2 \gamma^{-\frac{l}{k}}. \end{aligned}$$

Сада је

$$Pr[X = 0] \leq \frac{E[X^2] - E[X]^2}{E[X]^2} = \frac{\sum_{s=1}^{k} A_s}{E[X]^2} \leq c_3 \gamma^{-\frac{l}{k}}.$$

Како $\gamma^{-\frac{l}{k}} \to 0$ за $\gamma \to \infty$ то скоро за све графове важи $Pr[X \geq 1] = 1$, што је и требало доказати.

Ова теорема омогућава да израчунамо граничне функције за многа својства графова. Тако на пример за својство графа да садржи циклус дужине k важи да је гранична функција n^{-1} због балансираности цикла. Пошто је стабло балансиран граф гранична функција својства да граф садржи стабло реда k је $n^{-\frac{k}{k-1}}$. Слично за својство графа да садржи потпун граф реда k важи да је његова гранична функција $n^{-\frac{2}{k-1}}$. Уопштење претходне теореме за својство графа да садржи све графове сем тривијалног празног графа дао је Болобаш1981. године. Та теорема гласи:

Теорема 25. *За граф H, који има бар једну ивицу, нека је*

$$\epsilon'(H) = \max\{\epsilon(F) \,|\, \emptyset \neq F \subset H\}.$$

Гранична функција за својство $\mathcal{P}_H$ графа је $n^{-\frac{1}{\epsilon'(H)}}$.

Доказ: Као у претходном доказу означимо са X случајну променљиву која мери колико подграфова изоморфних са H (који има l ивица и k чворова) има G. Слично као у претходном доказу са $\mathcal{H}$ означимо скуп свих графова на теменима произвољног графа $G \in G_n$ (сви графови из G_n имају иста темена) који су изоморфни са H. Нека је $p = \gamma n^{-\frac{1}{\epsilon'(H)}}$, а нека је S подграф од H такав да је $\epsilon(S) = \epsilon'(H)$. За $\gamma \to 0$ из преходне теореме имамо да граф скоро сигурно не садржи S, па скоро сигурно не садржи ни H јер је $\mathcal{P}_H \subset \mathcal{P}_S$. Самим тим довољно нам је да покажемо да за $\gamma \to \infty$ и $n \to \infty$ граф скоро сигурно садржи H. То ћемо урадити слично као и у претходном доказу помоћу Чебишевљеве неједнакости. Имамо да важи:

$$Pr[X=0] \leq Pr[|X-E[X]| \geq E[X]] \leq \frac{E[X^2]-E[X]^2}{E[X]^2}.$$

Довољно је показати да $\frac{E[X^2]-E[X]^2}{E[X]^2} \to 0$ за $n \to \infty$. Имамо да је

$$E[X^2] = \sum Pr[H_i \cup H_j \subset G],$$

где се сумирање врши по свим $H_i, H_j \in \mathcal{H}$. Како је

$$Pr[H_i \cup H_j \subset G] = p^{2l-||H_i \cap H_j||}$$

групишимо парове H_i и H_j по њиховим пресецима. Прецизније за свако $F \subset H$ нека је

$$A_F = \sum_F Pr[H_i \cup H_j \subset G],$$

где $\sum_F$ означава да се сумирање врши по свим H_i и H_j који су изоморфни са H и за које важи да је $H_i \cap H_j$ изоморфно са F. Добијамо да је

$$A_\emptyset = \sum_\emptyset Pr[H_i \subset G]Pr[H_j \subset G] \leq E[X]^2.$$

За фиксиран $F \neq \emptyset$ има $\binom{n}{|F|}$ могућности за избор чворова од F у G. За тај фиксиран F имамо $\binom{n-|F|}{k-|F|}$ могућности за скуп чворова H_i . Могућности за чворове оба скупа H_i и H_j имамо тачно

$$\binom{n-|F|}{k-|F|}\binom{n-k}{k-|F|}.$$

Вероватноћа да за фиксиране H_i и H_j важи $H_i \cup H_j \subset G$ је $p^{2l-||F||}$, па је

$$A_F \leq \binom{n}{|F|} f \binom{n-|F|}{k-|F|}\binom{n-k}{k-|F|} h_F^2 p^{2l-||F||},$$

где је h_F број аутоморфизама $H \to H$ таквих да подграф изоморфан са F остане фиксиран, а f број аутоморфизама из F у F. Како за неку константу c важи $n^k \geq \binom{n}{k} \geq cn^k$ добијамо да важи

$$A_F \leq c_F n^{2k-|F|} p^{2l-||F||}.$$

Како је $p = \gamma n^{-\frac{1}{\epsilon'(H)}}$ и $E[X] = \binom{n}{k} hp^l$ (h је број аутоморфизама од H), то је

$$A_F \leq c_F n^{2k-|F|+\frac{||F||}{\epsilon'(H)}} \gamma^{-||F||} \frac{E[X]^2}{h^2 \binom{n}{k}^2},$$

односно

$$A_F \leq c'_F \gamma^{-||F||} n^{2k-|F|+\frac{||F||}{\epsilon'(H)}} \frac{E[X]^2}{\binom{n}{k}^2}.$$

Пошто је $\binom{n}{k} \geq cn^k$ за неку константу c то је $\binom{n}{k}^{-1} \leq c_1 n^{-k}$ за неку константу c_1. Онда за неку константу c''_F важи

$$\frac{A_F}{E[X]^2} \leq c''_F n^{-|F|+\frac{||F||}{\epsilon'(H)}} \gamma^{-||F||}.$$

Како је $\epsilon'(H) \geq \frac{||F||}{|F|}$, то је $n^{-|F|+\frac{||F||}{\epsilon'(H)}} \leq 1$, па важи

$$\frac{A_F}{E[X]^2} \leq c''_F \gamma^{-||F||}.$$

За $\gamma \to \infty$ добијамо да важи $\frac{A_F}{E[X]^2} \to 0$. Коначно имамо да је

$$Pr[X=0] \leq \frac{A_\emptyset + \sum_{\emptyset \neq F \subset H} A_F - E[X]^2}{E[X]^2} \leq \sum_{\emptyset \neq F \subset H} \frac{A_F}{E[X]^2}.$$

Како подскупова од H има коначана број, а $\frac{A_F}{E[X]^2} \to 0$ то је $\lim_{n\to\infty} Pr[X = 0] = 0$, што је и требало доказати. Овим је завршен доказ теореме.

Доказали смо да својство да граф садржи дати подграф има граничну функцију. Занимљиво је посматрати која остала својства графа имају граничну функцију. Уводимо следећу дефиницију:

Дефиниција 17. *Својство графа $\mathcal{P}$ се назива растуће ако се додавањем ивица у граф $G \in \mathcal{P}$ добија граф из $\mathcal{P}$.*

Докажимо следеће интуитивно тврђење:

Теорема 26. *Нека $G(n,p_1)$ и $G(n,p_2)$ случајни графови на истом скупу темена, а $\mathcal{P}$ растуће својство графа. Ако је $p_2 \geq p_1$ онда је*

$$Pr[G(n,p_1) \in \mathcal{P}] \leq Pr[G(n,p_2) \in \mathcal{P}].$$

Доказ: Нека је H скуп свих графова са датих n темена који су елементи $\mathcal{P}$, а $N = \binom{n}{2}$. За својство $\mathcal{P}$ и $p \in (0,1)$ важи

$$Pr[G(n,p) \in \mathcal{P}] = \sum_{A \in H} p^{|A|}(1-p)^{N-|A|}.$$

Означимо са h_k за $0 \leq k \leq N$ број графова из H са тачно k грана. Онда је

$$Pr[G(n,p) \in \mathcal{P}] = \sum_{k=0}^{N} h_k p^k (1-p)^{N-k}.$$

Ова функција је непрекидна и диференцијабилна по p и важи

$$\begin{aligned} \frac{dPr[G(n,p) \in \mathcal{P}]}{dp} &= \sum_{k=1}^{N} kh_k p^{k-1}(1-p)^{N-k} - \sum_{k=0}^{N-1} (N-k) h_k p^k (1-p)^{N-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{N} p^{k-1}(1-p)^{N-k}(kh_k - (N-k+1)h_{k-1}). \end{aligned}$$

За свако $G_1 \in \mathcal{P} \cap H$ са $k-1$ грана постоји $N-k+1$ графова $G_2 \in \mathcal{P} \cap H$ са k грана који се добијају додавањем једне гране. Слично за свако $G_2 \in \mathcal{P} \cap H$ са k грана постоји највише k графова $G_1 \in \mathcal{P} \cap H$ са $k-1$ грана који се добијају брисањем једне ивице. Следи да је $kh_k \geq (N-k+1)h_{k-1}$, па је $Pr[G(n,p) \in \mathcal{P}]$ растућа функција по p.

Претпоставимо да својство $\mathcal{P}$ није тривијално ($\emptyset \notin \mathcal{P}$ и постоји елемент из $\mathcal{P}$ за дато n). Важи да је $Pr[G(n,0) \in \mathcal{P}] = 0$ и $Pr[G(n,1) \in \mathcal{P}] = 1$. Како је $Pr[G(n,p) \in \mathcal{P}]$ непрекидна и растућа функција по p, то за свако $a \in (0,1)$ постоји јединствено $p(a,n)$ (за дато n) такво да је $Pr[G(n,p(a,n)) \in \mathcal{P}] = a$. Функција $p(a,n)$ је растућа и непрекидна по a, а како је је $Pr[G(n,0) \in \mathcal{P}] = 0$ и $Pr[G(n,1) \in \mathcal{P}] = 1$ можемо узети да је $p(0,n) = 0$ и $p(1,n) = 1$. Онда је функција $p : [0,1] \times N \to [0,1]$ бијекција. Сада можемо да докажемо следеће важно тврђење за граничне функције. Ову теорему доказали су Болобаш и Томасон 1979. године.

Теорема 27. *Свако растуће својство $\mathcal{P}$ има граничну функцију.*

Доказ: За дато $\varepsilon \in (0, 1/2)$ постоји $m \in N$ такво да је $(1-\varepsilon)^m \leq \varepsilon$. Фиксирајмо n. Показали смо да за то ε постоји $p(\varepsilon, n) \in (0,1)$ такво да је

$$Pr[G(n, p(\varepsilon, n)) \in \mathcal{P}] = \varepsilon.$$

Ако направимо унију m независних графова $G(n, p(\varepsilon, n))$ добијамо граф $G(n,p')$ где је $p' = 1 - (1 - p(\varepsilon, n))^m \leq mp(\varepsilon)$ по Бернулијевој неједнакости. Онда је

$$Pr[G(n,p') \in \mathcal{P}] \leq Pr[G(n, mp(\varepsilon, n)) \in \mathcal{P}].$$

Међутим

$$Pr[G(n,p') \notin \mathcal{P}] \leq Pr[G(n, p(\varepsilon, n)) \notin \mathcal{P}]^m = (1-\varepsilon)^m \leq \varepsilon,$$

па је

$$Pr[G(n, mp(\varepsilon, n)) \in \mathcal{P}] \geq Pr[G(n,p') \in \mathcal{P}] \geq 1 - \varepsilon = Pr[G(n, p(1-\varepsilon, n)) \in \mathcal{P}],$$

па због претходне теореме важи $mp(\varepsilon,n) \geq p(1-\varepsilon,n)$. Због монотоности функције $p(\varepsilon,n)$ (по ε) важи

$$p(\varepsilon,n) \leq p\left(\frac{1}{2},n\right) \leq p(1-\varepsilon,n) \leq mp(\varepsilon,n),$$

где m зависи од ε, али не од n. Докажимо да је $p(\frac{1}{2},n)$ гранична функција за својство $\mathcal{P}$. Претпоставимо супротно, тј. да постоји низ $p'(n)$ такав да важи (за $n \to \infty$)

$$\frac{p'(n)}{p(\frac{1}{2},n)} \to 0 \text{ и } \liminf_{n\to\infty} Pr[G(n,p'(n)) \in \mathcal{P}] > 0$$

или

$$\frac{p'(n)}{p(\frac{1}{2},n)} \to \infty \text{ и } \limsup_{n\to\infty} Pr[G(n,p'(n)) \in \mathcal{P}] < 1.$$

Ако је први случај онда постоји $\delta \in (0,1)$ тако да важи

$$Pr[G(n,p'(n)) \in \mathcal{P}] \geq \delta = Pr[G(n,p(\delta,n)) \in \mathcal{P}],$$

па је $p(\delta,n) \leq p'(n)$. Из овога следи да $\frac{p(\delta,n)}{p(\frac{1}{2},n)} \to 0$, што је немогуће због претходне неједнакости. Слично, у другом случају постоји $\delta \in (0,1)$ тако да важи

$$Pr[G(n,p'(n)) \in \mathcal{P}] \leq \delta = Pr[G(n,p(\delta,n)) \in \mathcal{P}],$$

па је $p'(n) \leq p(\delta,n)$. Онда $\frac{p(\delta,n)}{p(\frac{1}{2},n)} \to \infty$ за $n \to \infty$, што је опет немогуће по претходној неједнакости. Овим је теорема доказана.

7.4 Ердошева теорема

У овом делу изложићемо први рад из теорије графова који се заснива на употреби пробабилистичког метода. Аутор је Пал Ердош који је овај рад објавио 1959. године.

Теорема 28. *За сваки природан број k постоји граф чији је најкраћи циклус дужине веће од k (ако нема циклус сматрамо да је минимални циклус дужине $+\infty$), а хроматски број већи од k.*

У доказу ћемо користити следећу лему:

Лема 7. *Нека је k природан број и нека је $p = p(n)$ функција од n таква да је $p \geq \frac{6k\ln n}{n}$ за велике вредности броја n. Онда је за $G \in G(n,p)$*

$$\lim_{n\to\infty} Pr[\alpha(G) \geq \frac{n}{2k}] = 0.$$

Доказ: За све природне бројеве $n \geq r \geq 2$ имамо да важи (за $G \in G(n,p)$)

$$\begin{aligned} P[\alpha(G) \geq r] &\leq \binom{n}{r}(1-p)^{\binom{r}{2}} \leq n^r(1-p)^{\binom{r}{2}} \\ &= (n(1-p)^{\frac{r-1}{2}})^r \leq (ne^{-\frac{p(r-1)}{2}})^r, \end{aligned}$$

где последња неједнакост важи због $1 - x \leq e^{-x}$ за позитивне бројеве x (ова неједнакост се лако доказује одређивање минимума функције $f(x) = e^{-x} + x - 1$). Како је $p \geq \dfrac{6k \ln n}{n}$ и $r \geq \dfrac{n}{2k}$, важи

$$ne^{-\frac{p(r-1)}{2}} = ne^{-\frac{pr}{2}+\frac{p}{2}} \leq n \cdot n^{-\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{e} = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{n}},$$

што тежи 0 како n тежи $+\infty$. Како је $p \geq \dfrac{6k \ln n}{n}$ (за велике n) за $r = \lceil \frac{n}{2k} \rceil$ се добија

$$\lim_{n\to\infty} Pr[\alpha(G) \geq \frac{n}{2k}] = \lim_{n\to\infty} Pr[\alpha(G) \geq r] = 0.$$

Сада можемо да се упустимо у доказ Ердошеве теореме.

Доказ: Нека је $k \geq 3$ и фиксирајмо ε такво да је $0 < \varepsilon < \frac{1}{k}$. Такође нека је $p = n^{\varepsilon-1}$. Означимо са $X(G)$ случајну променљиву која представља број циклуса дужине највише k у графу $G \in G(n,p)$. Из Теореме 7 следи да је

$$E(X(G)) = \sum_{i=3}^{k} \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{2k} p^i \leq \frac{1}{2}\sum_{i=3}^{k} n^i p^i \leq \frac{1}{2}(k-2)n^k p^k,$$

јер је $(np)^i \leq (np)^k$, што следи из $np = n^\varepsilon \geq 1$. Из Марковљеве неједнакости имамо да је

$$\begin{aligned} Pr\left[X(G) \geq \frac{n}{2}\right] &\leq \frac{E(X(G))}{n/2} \leq (k-2)n^{k-1}p^k \\ &= (k-2)n^{k-1}n^{(\varepsilon-1)k} = (k-2)n^{k\varepsilon-1}. \end{aligned}$$

Како је $k\varepsilon - 1 < 0$ (по избору ε) имамо да је

$$\lim_{n\to\infty} Pr[X(G) \geq \frac{n}{2}] = 0.$$

Нека је n довољно велико тако да важи $Pr[X(G) \geq \frac{n}{2}] < \frac{1}{2}$ и $Pr[\alpha(G) \geq \frac{n}{2k}] < \frac{1}{2}$, што је могуће због претходно доказаних тврђења. Тада постоји граф $G \in G(n,p)$ са мање од $\frac{n}{2}$ циклуса чије су дужине не веће од

k и $\alpha(G) < \frac{n}{2k}$. Из сваког од ових циклуса избришимо по теме и ивице које полазе из тог темена да би добили граф H. Онда је $|H| \geq \frac{n}{2}$ и граф H мора има циклус дужине веће од k или их нема уопште. Како је и $\alpha(G) \geq \alpha(H)$, то је $\chi(H) \geq \frac{|H|}{\alpha(H)}$. Сада из претходног закључујемо да важи

$$\chi(H) \geq \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2k}} = k.$$

Овим смо доказали да граф H испуњава услове задатка и тиме доказали Ердошеву теорему.

7.5 Лема о пресецима

У овом делу приказаћемо једну лема која се веома лако доказује пробабилистичким методом, а може се искористити за решавање неколико тешких проблема дискретне геометрије. За почетак нам требају Ојлерова теорема која је доказана у уводу и једна лема. Дефинишимо прво шта су пресеци графа.

Дефиниција 18. *Ако је граф G постављен у раван тако да његове ивице образују минимални број пресека, онда тај број пресека означавамо са $Cr(G)$.*

Уколико се неке три ивице секу у једној тачки те пресеке рачунамо три пута. За доказ леме о пресецима треба нам и следећа лема:

Лема 8. *За граф G са e ивица и n чворова важи $Cr(G) \geq e - 3n + 6$.*

Доказ: Од датог графа G правимо планаран граф тако што сваки пресек означимо као чвор, избришемо грану која га садржи и додамо две нове гране које тај нови чвор прави. Уколимо се бар три ивице секу у једној тачки онда их можемо раздвојити и примента наведену трансформацију. Онда добијамо планаран граф са $n + Cr(G)$ чворова и $e + 2Cr(G)$ грана. Дата неједнакост се своди на

$$3(n + Cr(G)) \geq e + 2Cr(G) + 6,$$

односно на $3N \geq M + 6$ за планаран граф. Како су изрази и са леве и са десне стране дате неједнакости линеарни довољно је показати неједнакост за повезане графове. За њих имамо да важи Ојлерова теорема, односно да је $N = M + 2 - O$, где је O број области на који повезан граф дели раван. Неједнакост се своди на $3(M+2-O) \geq M+6$, односно на $2M \geq 3O$, што је тачно јер $2M$ представља збир броја ивица у областима што није мање од $3O$ јер свака област има бар 3 ивице.

Сада ћемо доказати лему о пресецима користећи пробабилистички аргумент.

Лема 9. *Ако граф G има e ивица и n чворова и важи $e \geq 4n$ онда је*

$$Cr(G) \geq \frac{1}{64}\frac{e^3}{n^2}.$$

Доказ: Посматрајмо постављање у раван графа G са минималнм бројем пресецања. Бирамо свако теме са вероватноћом p и нека је G_p граф индукован на тим чворовима. По претходној леми је $Cr(G_p)-e_p+3n_p \geq 0$, где су e_p и n_p број ивица и чворова индукованог графа. Онда је $E[Cr(G_p)-e_p+3n_p] \geq 0$. Како је $E[n_p]=pn$, $E[e_p]=p^2e$ и $E[Cr(G_p)] = p^4Cr(G)$ добијамо да је

$$Cr(G) \geq \frac{e}{p^2} - \frac{3n}{p^3}.$$

Нека је $p = \frac{4n}{e} \leq 1$. Онда добијамо да је

$$Cr(G) \geq \frac{1}{64}\frac{e^3}{n^2},$$

што је и требало доказати.

Сада ћемо доказати три теореме које представљају значајне проблем из дискретне геометрије, а лако се решавају применом ове леме.

Теорема 29. *У равни је дато n тачака и l правих. Онда је број припадања датих тачака датим правама највише $4((nl)^{\frac{2}{3}}+n+l)$.*

Доказ: Без умањења општости можемо претпоставити да свака тачка припада некој правој и да свака права садржи бар једну тачку. Дефинишимо граф G на датих n тачака и спојимо две тачке као дуж ако су узастопне на некој правој (од датих l). Онда је $Cr(G) \leq l^2$. Број припадања (означимо га са i) једнак $e+l$ где је e број ивица графа G. Ако је $e = i - l \leq 4n$, онда је

$$i \leq l + 4n < 4((nl)^{\frac{2}{3}}+n+l).$$

У другом случају је $e = i - l \geq 4n$, па по леми о пресецима важи

$$l^2 \geq Cr(G) \geq \frac{1}{64}\frac{(i-4n)^3}{n^2}.$$

Сређивањем ове неједнакости добија се да је $(64l^2n^2)^{\frac{1}{3}} \geq i - 4n$, односно да је

$$i \leq 4(nl)^{\frac{2}{3}} + 4n \leq 4((nl)^{\frac{2}{3}}+n+l),$$

што је и требало доказати.

Теорема 30. *Нека су k и n природни бројеви такви да је $2 \leq k \leq \sqrt{n}$. За n тачака у равни број правих које садржи по бар k од њих је $\leq 512 \cdot \frac{n^2}{k^3}$.*

Доказ: Направимо граф G са чворовима у датих n тачака, тако што ћемо спојити тачке дужима ако су узастопне тачке на некој од правих која садржи бар k тачака. Уколико је број оваквих правих једнак l, тада је $Cr(G) \leq l^2$. Такође ако је број ивица графа G једнак e важи $e \geq l(k-1)$. Уколико је $l(k-1) < 4n$, онда је

$$l < \frac{4n}{k-1} < 512 \cdot \frac{n^2}{k^3},$$

због $128n \geq 128k^2 > \frac{k^3}{k-1}$. Уколико је $e \geq l(k-1) \geq 4n$, онда је по леми о пресецима

$$l^2 \geq Cr(G) \geq \frac{1}{64}\frac{e^3}{n^2} \geq \frac{1}{64}\frac{l^3(k-1)^3}{n^2},$$

па је $l \leq 64 \cdot \dfrac{n^2}{(k-1)^3} \leq 512 \cdot \dfrac{n^2}{k^3}$.

Теорема 31. *Број јединичних дужи међу произвољних n тачака у равни је највише $5n^{\frac{4}{3}}$.*

Доказ: Опишимо око сваке тачке кружницу полупречника 1. Хоћемо да направимо граф са теменима у датим тачкама. Посматрајмо само кружнице које садржи бар три тачке. Тачке које су повезане кружним луковима сматраћемо чворовима графа G, а лукове ивицама. Уколико су нека два чвора повезана са две ивице посматрамо само једну од њих. Тако добијамо граф G. Нека је d број дужи на јединичном растојању. Онда је $2(d-n) \leq 2e$, где је e број ивица датог графа. Уколико је $e < 4n$, онда је $d < 5n < 5n^{\frac{4}{3}}$. У супротном је $e \geq 4n$, а како се две кружнице могу сећи у највише две тачке важи

$$n^2 \geq Cr(G) \geq \frac{1}{64}\frac{e^3}{n^2},$$

односно $e \leq 4n^{\frac{4}{3}}$. Због $e \geq d-n$ добијамо да је $d \leq 4n^{\frac{4}{3}} + n < 5n^{\frac{4}{3}}$, што је и требало доказати.□

7.6 Литература

Литература

[1] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph theory*, Springer 2008.

[2] R. Diestel, *Graph theory*, Springer 2000.

[3] S. Janson, T. Luczak, A Rucinski *Random Graphs*, John Wiley & Sons, Inc 2000.

[4] B. Bollobás, *Random Graphs*, Cambridge University Press 2001.

[5] L. Székely, *Crossing Numbers and Hard Erdös Problems in Discrete Geometry*, Cambridge University Press 1993.

Предавање 8

Борсук-Уламова теорема

Раде Шпегар, Математичка гимназија

8.1 Увод

Борсук-Уламова теорема важи за једно од највећих оруђа елементарне алгебарске топологије, а један од разлога је и то што се појављује у великом броју еквивалентних верзија. Кренимо са оном најлакшом за памћење:

Теорема 32. *За свако непрекидно пресликавање $f : S^n \to R^n$ и $n \in \mathbb{N}_0$ постоји x, $x \in S^n$ за које важи $f(x) = f(-x)$.*

Што се за $n = 2$ најлакше интерпретира на следећа два начина:

Пример 3. *У сваком тренутку се на планети Земљи налазе две тачке централно симетричне у односу на центар Земље у којима су температура и притисак једнаке.*

Пример 4. *Узмимо гумену напумпану гумену лопту, испумпајмо је, разваличимо или сабијајмо је како год, без њеног пуцања, а затим је оставимо да лежи на поду. Важи да постоје две тачке на лопти која су једна испод друге, а које су док је лопта била напумпана биле централно симетричне у односу на центар.*

Тврђење за $n = 1$ захтева само основно познавање средњошколске анализе.

Пример 5. *Нека је $f : S^1 \to R^1$. Уведимо функцију $g : [0, 2\pi] \to R$ за коју важи да је $g(x)$ једнако $f(X)$ за $X \in S^1$ при чему OX образује угао x са фиксираном правом a која пролази кроз O(центар кружнице S). Важи да је g непрекидна функција за коју важи $g(0) = g(2\pi)$. Уведимо функцију $h : [0, 2\pi] \to R$ за коју важи: $x \in [0, \pi] \Rightarrow h(x) = g(x) - g(\pi + x)$. Одавде* *је: $h(x) = -h(\pi + x)$. Ако је $h(0) = 0$ тврђење теореме је доказано ако је $h(0) \neq 0$ онда су $h(0)$ и $h(\pi)$ различитог знака па из теореме о средњој вредности h има нулу на интервалу $[0, \pi]$ одакле следи тврђење теореме.*

8.2 Еквивалентне верзије Борсук-Уламове теореме

Теорема 33. *За $n \in \mathbb{N}_0$ следећа тврђења су еквивалентна и тачна:*
(БУ1а) За свако непрекидно пресликавање $f : S^n \to R^n$ постоји x, $x \in S^n$ за које важи $f(x) = f(-x)$.
(БУ1б) За свако непрекидно пресликавање $f : S^n \to R^n$ за које важи $-f(x) = (f(-x))$ за свако $x \in S^n$ постоји x за које важи $f(x) = 0$.
(БУ2а) Не постоји непрекидно пресликавање $f : S^n \to S^{n-1}$ за које важи $-f(x) = (f(-x))$.
(БУ2б) Не постоји непрекидно пресликавање $f : S^n \to S^{n-1}$ за које важи $f(x) \neq (f(-x))$.
(БУ2ц) Не постоји непрекидно пресликавање $f : B^n \to S^{n-1}$ за које важи $-f(x) = (f(-x))$ за x на површини B^n, тј. $x \in S^{n-1} = \delta B^n$.
(БУ3а) Не постоји непрекидно пресликавање $f : B^n \to R^n$ за које важи $f(x) \neq (f(-x))$.
(БУ3б) Не постоји непрекидно пресликавање $f : B^n \to R^n$ за које важи $-f(x) = (f(-x))$ за x на површини B^n, тј. $x \in S^{n-1} = \delta B^n$.
(ЛС-ц) За свако прекривање $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$ сфере S^n са $n+1$ затворених скупова постоји скуп такав да садржи две тачке централно симетричне у односу на центар сфере(односно $F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$).
(ЛС-о) За свако прекривање $U_1, U_2, \ldots, U_{n+1}$ сфере S^n са $n+1$ отворених скупова постоји скуп такав да садржи две тачке централно симетричне у односу на центар сфере(односно $U_i \cap (-U_i) \neq \emptyset$).

Сада ћемо доказати неке од еквиваленција:

(БУ1а) $\Rightarrow$ (БУ1б):
Посматрајмо било које непарно(антиподално) пресликавање(тј. оно пресликавање за које важи $-f(x) = f(-x)$ за све x из домена f). Из теореме (БУ1а) добијамо да постоји такво $x \in S^n$ за које важи $f(x) = f(-x)$ па је онда за то x: $f(x) = -f(x)$ одакле је $f(x) = 0$.
(БУ1б) $\Rightarrow$ (БУ1а):
Посматрајмо антиподално пресликавање: $g(x) = f(x) - f(-x)$. Из (БУ1б) добијамо да оно има нулу на $x \in S^n$ одакле за то x важи и: $f(x) = f(-x)$.
(БУ1б) $\Rightarrow$ (БУ2а):
Антиподално пресликавање $f : S^n \to S^{n-1}$ је такође антиподално пресликавање $f : S^n \to R^n$ јер је $S^{n-1} \subset R^n$.
(БУ2а) $\Rightarrow$ (БУ1б):
Претпоставимо супротно, да важи (БУ2а) и не важи (БУ1б), то онда постоји непрекидно, антиподално пресликавање $f : S^n \to R^n$ које ни

у једној тачки не узима вредност 0. Сада антиподално пресликавање $g : S^n \to S^{n-1}$ задато са $g(x) = f(x)/ \parallel f(x) \parallel$ је контрадикторно са (БУ2а).
(БУ2а) $\Leftrightarrow$ (БУ2б) се доказује аналогно као (БУ1а) $\Leftrightarrow$ (БУ1б).
(БУ2а) $\Leftrightarrow$ (БУ2ц):
Посматрајмо пројекцију $\pi : (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \to (x_1, x_2, \dots, x_n)$ је хомеоморфизам горње хемисфере U сфере S^n на лопту B^n. Претпоставимо да важи (БУ2ц), а не важи (БУ2а), односно постоји непрекидно антиподално пресликавање $f : S^n \to S^{n-1}$. Сада је $g : B^n \to S^{n-1}$ непрекидно и антиподално на δB^n за $g = f(\pi^{-1}(x))$. Претпоставимо сада да важи (БУ2а), а не важи (БУ2ц), односно постоји $g : B^n \to S^{n-1}$ непрекидно, и антиподално на $x \in \delta B^n$. Сада дефинишемо $f : S^n \to S^{n-1}$ тако да је за x за које важи $x_{n+1} \geq 0$(односно горњу хемисферу лопте) $f(x) = g(\pi(x))$, и дефинишемо $f(-x) = -g(\pi(x))$. f је непрекидна на обе хемисфере па је непрекидна на целој лопти, а осим тога из дефиниције је f антиподална свугде ван екватора($x^{n+1} = 0$), док за екватор важи антиподалност јер је g антиподална на површини.
(БУ1б) $\Leftrightarrow$ (БУ3б) се доказује аналогно као (БУ2а) $\Leftrightarrow$ (БУ2ц).
(БУ3б) $\Leftrightarrow$ (БУ3а) се доказује аналогно као (БУ1а) $\Leftrightarrow$ (БУ1б).
(БУ1а) $\Rightarrow$ (ЛС-ц):
Посматрајмо прекривање S^n затвореним скуповима $F_1, F_2, \dots, F_{n+1}$ и дефинишимо непрекидно пресликавање $f : S^n \to R^n$ са:
$f(x) = (d(x, F_1), d(x, F_2), \dots, d(x, F_n))$. Из (БУ1а) закључујемо да постоји x такво да је $f(x) = f(-x) = y$. Ако је i-та координата тачке y једнака нули, онда је $x, -x \in F_i$. Ако све координате y нису нула, онда x и $-x$ не припадају ниједном од скупова $F_1, F_2, \dots, F_n$ па онда оба припадају скупу F_{n+1}.
(ЛС-ц) $\Rightarrow$ (БУ2а):
Прво нам је потребан помоћни резултат: Постоји покривање сфере S^{n-1} са $n+1$ затворених скупова(посматрајмо n-симплекс(садржи $n+1$ страна) у R^n(политоп у n димезија) који садржи нулу и пројектујмо му стране из нуле на површину сфере S^{n-1}, пројекција сваке стране је један затворени скуп). Претпоставимо да не важи (НУ2а), односно да постоји непрекидно, антиподално пресликавање $f : S^n \to S^{n-1}$. Сада је $f^{-1}(F_1), f^{-1}(F_2), \dots, f^{-1}(F_{n+1})(f^{-1}(F_i)$ су све тачке сфере S^n које f слика у F_i) је прекривање сфере S^n са $n+1$ затворених скупова контрадикторно са (ЛС-ц).

Теорема Люстерник-Шнирел'ман је генерализована на следећу:
(ЛС-оц) За свако прекривање $F_1, F_2, \dots, F_{n+1}$ сфере S^n са $n+1$ затворених или отворених скупова постоји скуп такав да садржи две тачке централно симетричне у односу на центар сфере(односно $F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$).

Теорема 34. *(Броуверова теорема о фиксној тачки) Свако непрекидно пресликавање $f : B^n \to B^n$ садржи фиксну тачку(тј. постоји $x \in B^n$ за које важи $f(x) = x$).*

Доказ:
Претпоставимо да постоји $f : B^n \to B^n$ без фиксне тачке. Показаћемо постојање $g : B^n \to S^{n-1}$ чија је рестрикција на S^{n-1} идентитет. Дефинишимо g као тачку пресека полуправе из $f(x)$ кроз x и сфере S^{n-1}. Ово g је контрадикторно са (БУ1ц) јер је непрекидно и антиподално.
Јача форма Броуверове теореме о фиксној тачки казе да за свако непрекидно пресликавање из конвенксног, компактног подскупа Еуклидовог простора у самог себе садржи фиксну тачку. Ово важи јер су особине функције којима се бавимо(неприкидност, да ли је нека тачка фиксна) инваријантне у односу на хомеоморфизме.

Пример 6. *Ако посматрамо локације честица у изолованој, непроменљивој просторији у два различита временска тренутка, бар једна се налази на истом месту у оба временска тренутка.*

8.3 Генерализација Борсук-Уламове теореме

Теорема 35. *(Фанова теорема, генерализација (ЛС-ц)) Нека су $A_1, A_2, \dots, A_m$ затворени скупови који покривају S^n тако да $A_i \cap (-A_i) \neq \emptyset$ за све i(Напомена: примећујемо да је m независно од n, при чему из (ЛС-ц) имамо да мора бити $m \geq n+2$) онда постоје индекси $i_1, i_2, \dots i_{n+2}$ и $x \in S^n$ тако да $(-1)^j x \in A_{i_j}$, за $j = 1, 2, \dots, n+2$. Такође се затворени скупови могу заменити са отвореним.*

Теорема 36. *(Теорема Боургина и Јанга, генерализација (БУ1а)) Нека је $f : S^n \to R^m$, непрекидна функција онда је* koincidentni skup $x \in S^n : f(x) = f(-x)$ *димензије бар $n - m$.*

Литература

[1] J. Matoushek, *Using the Borsuk-Ulam Theorem*, Springer 2008.

Део II

Предавања за учитеље

Предавање 9

Нумерација и друга пребројавања

Миољуб Исаиловић, ОШ "Николај Велимировић"

9.1 Задаци за рад

Задатак 4. Које је слово на 10-ом, а које је на 30-ом месту у низу АБББВВВ...?

Решење: Низ је формиран тако да свако слово наше азбуке(редом) заузима онолико места колико је његов редни број у азбуци: А-1,Б-2,В-3, итд. Одговор: 1) 1(А) + 2(Б) + 3(В) + 4(Г) = 10 слова, тј. слово Г; 2) 1(А) + 2(Б) + 3(В) + 4(Г) + 5(Д) + 6(Ђ) + 7(Е) + 2(Ж) = 30 слова, тј. слово Ж.

Задатак 5. Откриј правило низа: $8, 13, 18, 23, \ldots$ Који је број на 10-ом месту?

Решење: Низ је аритметички: први члан је 8, а сваки следећи је за 5 већи:

$$a_1 = 8, a_2 = 8 + 5, a_3 = 8 + 2 \cdot 5, a_4 = 8 + 3 \cdot 5, \ldots, a_n = 8 + (n - 1) \cdot 5;$$

Одговор: $a_{10} = 8 + 9 \cdot 5$.

Задатак 6. Који број је на 20-ом месту у низу:

$$1)0, 1, 2, 3, 4, \ldots;$$

$$2)2, 4, 6, 8, \ldots;$$

$$3)0, 3, 6, 9, \ldots;$$

$$4)1, 3, 5, 7, \ldots;$$

$$5)0, 1, 4, 9, 16, \ldots;$$

$$6)6, 10, 14, 18, \ldots?$$

Решење: Одговор: 1)19; 2)40; 3)57; 4)39; 5) квадрати бројева за 1 мањи од броја места у низу: 361; 6)82.

Задатак 7. Ученик је на рачунару, без размака, откуцао природне бројеве до 200. Која цифра се налази на: 1)11. месту; 2)222. месту; 3)311. месту?

Решење: 1) Првх 9 места заузимају једноцифрени бројеви, 10-то место заузима цифра десетица броја 10, а 11-то цифра јединица тог броја. Дакле, на 11-том месту је цифра 0. 2) Једноцифрени бројеви заузели су 9 места, двоцифрени $90 \cdot 2 = 180$ места, а преостала $222-(9+180) = 33$ места троцифрени. Дакле, на 33 места заузело је првих 11 троцифрених бројева. На 222. месту је цифра 0. 3) Цлично претходном: $311 - (9 + 180) = 122; 122 : 3 = 40(2)$. У том низу је поред једноцифрених и двоцифрених бројева и 40 троцифрених и 2 цифре 41. (а то је број 140). Дакле, последња цифра је 4.

Задатак 8. Колико се цифара употреби за нумерисање књиге која има 120 страна, ако је: 1) свака страна нумерисана арапским цифрама; 2) првих 8 страна и последње 2 нису нумерисане, а остале јесу почев од броја 9; 3) првих 6 страна је нумерисано римским бројевима, а остале редом бројевима $1, 2, 3, \ldots$?

Решење: 1) $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + (120 - 9 - 90) \cdot 3 = 252$; 2) $1 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + (118 - 91) \cdot 3 = 262$; 3) Употребљене римске цифре су I, II, III, IV, V, VI-њих 11. Одговор: $11 + 9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + (120 - 6 - 9 - 90) \cdot 3 = 245$.

Задатак 9. Колико књига има страна ако је за њену нумерацију употребљено 2010 цифара, ако првих 6 страна није нумерисано, а остале су нумерисано почев од броја 7?

Решење: Неозначених страна има 6; страна са једноцифреним бројем има $3(7, 8, 9)$, са двоцифреним бројем има 90, а са троцифреним бројем има $(2010-3+90\cdot 2) : 3 = 609$. Књига има укупно: $6+3+90+609 = 708$ страна.

Задатак 10. У једној старој књизи све стране су нумерисане. Неко је исцепао, почев од 88. стране 20 листова. Последња страна нумерисана је бројем 320. Колико је цифара употребљено за означавање остатка књиге?

Решење: Да је књига комплетна за неку нумераицју било би употребљено: $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + (320 - 9 - 90) \cdot 3 = 852$ цифре. Како је уништено 20 листова, то треба одбацити 40 страна и то $(99 - 86) = 13$ са двоцифреним бројевима и $40 - 13 = 27$ са троцифреним бројевима. Одговор: $852 - (13 \cdot 2 + 27 \cdot 3) = 745$.

Задатак 11. У једној улици има 99 кућа, и то са десне стране 2 пута више него с леве. Све куће су означене узастопним непарним бројевима с леве и узастопним парним бројевима с десне стране. 1) Који број је на последњој кући са леве, а који са десне стране? 2) Колико цифара је употребљено за означавање сцих кућа у тој улици?

Решење: С десне стране има $(99:3)\cdot 2 = 66$, а са леве 33. 1) На последњој кући са леве страна је 65, а са десне 132. 2) С леве стране је 5 кућа с једноцифреним и 28 са двоцифреним непарним бројем, а с десне је 4 са једноцифреним и 45 са двоцифреним и 17 са троцифреним парним бројем. Одговор: $(5\cdot 1 + 28\cdot 2) + (4\cdot 1 + 45\cdot 2 + 17\cdot 3) = 206$.

Задатак 12. Која је последња цифра збира свих природних бројева који: 1) нису већи од 500; 2) су мањи од 2010?

Решење: 1) Треба израчунати збир: $1+2+3+\ldots+498+499+500 = (1+500)+(2+499)+\ldots+(250+251) = 501\cdot 250 = 125250$. Последња цифра је 0. 2) $1+2+3\ldots+2007+2008+2009 = (1+2008)+(2+2007)+\ldots+(1004+1005)+2009 = 1004\cdot 2009+2009 = 1005\cdot 2009 = 2019045$ Одговор: цифра 5.

Задатак 13. Одредити последње 4 цифре производа првих 20 природних бројева.

Решење: Посматрајмо производ узастопних бројева: $1\cdot 2 = 2$, $1\cdot 2\cdot 3 = 6$, $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$, $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$. Чим се појави број 5 као чинилац, прозивод узастопних бројева ће се завршавати нулом. Број 5 ће се појавити као чинилац још у бројевима $10, 15$ и 20, тј. на крају ће се појавити још 3 нуле. Одговор: 4 нуле.

9.2 Задаци за домаћи рад

Задатак 14. Колико пута се употреби цифра 9 у записивању свих бројева прве хиљаде?

Задатак 15. Исписани су редом парни природни бројеви. Која цифра је на 200. месту?

Задатак 16. Исписан је низ знакова $1, 2, 3, \ldots, 2010$. Које знак је на: 1) 4−том; 2) 100−том месту?

Задатак 17. Са колико нула се завршава производ свих бројева прве стотине?

Задатак 18. Једна књига има 104 листа.Првих 6 страна и последњи лист нису нумерисани, а остале су обележене почев од броја 7. Колико је цифара употребљено за нумерисање: 1) прве половине; 2) друге половине те књиге?

Литература

[1] М. Исаиловић, *Матема - Збирка задатака за III* разред , Шабац 2004.

[2] Б. Бајић, М. Исаиловић, *Математика на једноставан нацин за уценике II,III и IV разреда основне сколе* , Шабац 1995.

[3] М. Исаиловић, *Математика - збирка задатака за 5. разред основне сколе* , Београд 2008.

Предавање 10

Метода дужи у решавању проблемских задатака

Миољуб Исаиловић, ОШ "Николај Велимировић"

10.1 Задаци за рад

Задатак 19. Књига је 3 пута скупља од свеске, а свеска 4 пута од оловке. Заједно књига, свеска и оловка коштају 510 динара. Одреди њихове цене.

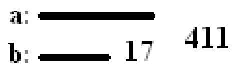
Решење: Оловка је најјефтинија и нека је њена цена x динара. У том случају свеска коста $4x$, а књига $12x$. Важи: $x + 4x + 12x = 510$, $17x = 510$, $x = 30$. Цена оловке је 30 динара, свеске 120, а књиге 360.

Задатак 20. Количник два броја је 6, разлика 180. Који су то бројеви?

Решење: Ако је количник 6, то значи да је један број 6 пута већи од другог, тј. $a = 6x$, $b = x$. Њихова разлика је $6x - x = 180$, $5x = 180$, $x = 36$. Бројеви су 36 и 216.

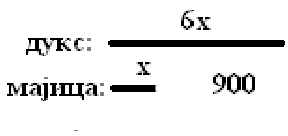
Задатак 21. Збир два броја је 411, а разлика 17. Одреди те бројеве.

Решење: Како је разлика тих бројева 17, то је један број за 17 већи од другог: $a = x + 17$, $b = x$. Према услову задатка $a + b = 411$, $2x + 17 = 411$, $x = 197$, $a = 214$, $b = 197$.



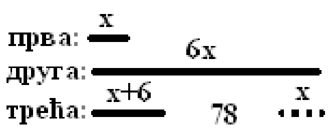
Задатак 22. Дуксерица је 7 пута скупља од мајице, а мајица је 900 динара јефтинија од дукса. Колике су њихове цене?

Решење: Према условима задатка дуксерица вреди $7x$, а мајица x, па важи $7x - x = 900$, $6x = 900$, $x = 150$ динара.



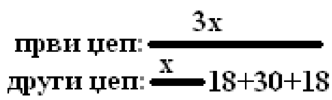
Задатак 23. На првој полици има 6 пута мање књига него у другој, а 6 књига мање него на трећој. Када би преместили све књиге са прве на трећу полицу, онда би на њој било 78 књига мање него на другој. Колико има укупно књига?

Решење: Прва полица: x, друга полица $6x$, трећа полица $x + 6$. После премештања на другој полици биће: $4x - 6 = 78$, $x = 21$. Укупно има 174 књиге.



Задатак 24. Дечак у једном џепу има 4 пута више новца него у другом. Када се из првог премести 18 динара у други, онда ће у другом бити 30 динара мање него у првом. Колико дечак има новца?

Решење: Први џеп: $3x$, други џеп: x. Услов $2x = 18 + 30 + 18$, $x = 33$. Има $4 \cdot 33 = 132$ динара.



Задатак 25. У првом вагону било је 5 пута више путника неко у другом вагону. Када је из првог вагона прешло 40 путника у други, онда је у другом вагону било 24 путника више него у првом. Колико путника је у оба вагона?

Решење: Први вагон: $5x$, други вагон: x. Услове из задатка приказати дужима: $4x = 40 + 40 - 24$, $x = 6$. Било је $6 \cdot 14 = 84$ путника.

Задатак 26. Пре 2 године отац, мајка и син имали су 58 година (заједно). За 2 године мајка ће бити 5 пута старија од сина. Колико година, сада, син, мајка и отац, ако је мајка 4 године млађа од оца?

Решење: За две године они ће заједно имати $58 + 3 \cdot 4 = 70$ година, а посебно: син: x, мајка: $5x$, отац: $5x + 4$. Услов: $11x + 4 = 70$, $x = 6$. Сада имају: син $6 - 2 = 4$ године, мајка $5 \cdot 6 - 2 = 28$, а отац $28 + 2 = 30$ година.

Задатак 27. Разлика два броја је 2010. Ако први помножимо са 3, а други са 5, добићемо исти производ. Одреди те бројеве.

Решење: Из услова задатка: $3a = 5b = p$, намеће се да производ p треба изразити преко треће променљиве. Увешћемо да је $p = 15x$, тј. $3a = 15x$ и $5b = 15x$, коначно $a = 5x$ и $b = 3x$. Даље, $5x - 3x = 2010$, $x = 1005$, $a = 5025$, $b = 3015$.

Задатак 28. Аца, Бане и Цане равноправно су учествовали у куповини лопте. Аца је дао половину свог новца, Бане трећину свог а Цане четвртину свог новца. Колико је ко имао новца, ако Аца и Бане имају 1200 динара више од Цана. Колика је цена лопте?

Решење: Ако Аца има a, Бане b а Цане c динара, онда су они за лопту дали $\frac{1}{2} \cdot a$, $\frac{1}{3} \cdot b$ и $\frac{1}{4} \cdot c$. Како су равноправно учествовали у куповини лопте, то је $\frac{1}{2} \cdot a = \frac{1}{3} \cdot b = \frac{1}{4} \cdot c = k$. Очигледно је: $a = 2k$, $b = 3k$, $c = 4k$, па је $2k + 3k - 4k = 1200$, тј. $k = 1200$. Аца је имао 2400, Бане 3600 а Цане 4800 динара. Лопта кошта 3600 динара.

10.2 Задаци за домаћи рад

Задатак 29. Одредити 4 узастопна природна броја чији је збир 2010.

Задатак 30. Броj има 9 пута више новца од сестре. Ако брат добије 70 динара, а сестра 30, имаће подједнако. Колико је ко имао новца на почетку?

Задатак 31. Син је 7 пута млађи од мајке, а годину од сестре. Мајка је 24 године старија од своје двоје деце. Када је ко рођен?

Задатак 32. Тата и његових двоје деце имају заједно 70 година. Број година једног детета једнак је половини, а другог четвртини татиних година. Колико ко има година?

Задатак 33. Када је Ана потрошила $\frac{1}{2}$ свог новца, Сања $\frac{3}{4}$ свог а Тања $\frac{4}{5}$ свог новца, остало им је подједнако. Колико је ко имао новца, ако су пре трошења, имали заједно 3300 динара.

Литература

[1] В. Андрић, *Припремни задаци за математичка такмичења, свеске 18, 20, 29*, Друштво математичара Србије, Београд 1987, 1988, 1991.

[2] М. Исаиловић, *Занимљива математика за 2. разред*, Графика-Шабац, Шабац, 2004.

[3] М. Исаиловић, *Занимљива математика за 3. разред*, Графика-Шабац, Шабац, 2004.

Предавање 11

Логичко комбинаторни задаци(Таблице,графови)

Миољуб Исаиловић, Ош "Николај Велимировић"

11.1 Задаци за рад

Задатак 34. Пола јата голубова за пола дана поједе 2кг хране. Колико хране поједе цело јато за 10 дана?

Решење:

Голубови	Дани	Количина хране
Пола јата	Пола дана	2 kg
Пола јата	Цео дан	4 kg
Цело јато	Цео дан	8 kg
Цело јато	Десте дана	80 kg

Задатак 35. Мачка и по за дан и по поједе 2 и по миша. У подруму има 120 мишева и 3 мачке. За колико дана ће те 3 мачке појести тих 120 мишева?

Решење: Према подацима из задатка, формирати табелу слично претходном задатку. Решење је 36 јаја.

Задатак 36. У чаши, балону и канти налазе се лимунада, млеко и вода. У канти није лимунада ни млеко. У чашии није лимунада. Која се течност налази у балону?

Решење:

	Чаша	Балон	Канта
Лимунада	$-$	$+$	$-$
Млеко	$+$	$-$	$-$
Вода	$-$	$-$	$+$

Задатак 37. Три другарице: Вера, Јелена и Каћа, дошле су на школску приредбу у хаљинама различитих боја: једна у плавој, једна у белој и једна у ружичастој хаљини. Каћа није била у ружичастој хаљини, а Вера ни у плавој ни у ружичастој хаљини. Која је била боја Каћине хаљине?

Решење: Образовати табелу сличну табели претходног задатка. Каћина хаљина је плаве боје.

Задатак 38. Разговарају три друга: Белић, Црнковић и Жутелија. Црнокоси каже Белићу: Занимљиво је да је један од нас са белом косом, један са црном и један са жуутом али ни једноме презиме не одговара боји косе. Какву боју косе има сваки од другова?

Решење: Користећи услове из задатка разврстане у табелу добијамо да Белић има жуту косу, Црнковић белу косу а Жутелија црну косу.

Задатак 39. У једној згради станују три другара: пекар, лекар и апотекар. Они се презивају: Белић, Ивић и Пилић. Пекар је јединац и најмлађи од тројице. Пилић је ожењен сестром Белића и старији је од лекара. Како се презива пекар, како лекар , а како апотекар?

Решење: Из услова задатка следи да Белић и Пилић нису пекари (јер Белић има сестру а Пилић није најмлађи); онда је пекар Ивић. Пошто Пилић није лекар он је апотекар, док је Белић лекар.

Задатак 40. Која се од фигура на слици може нацртати једним потезом оловке полазећи из: а) једне утврђене тачке; б) било које тачке фигуре.

Решење: Фигура се може нацртати једним потезом ако је свако теме парног степена или ако постоје два темена трећег степена, а остала су парна. Фигура A се не може нацртати једним потезом, фигура B може полазећи из непарног темена, а завршавајући у другом непарном темену, док се фигура V може нацртати једним потезом полазећи из било ког темена.

Задатак 41. У тачки A налази се гаража. Руководиоце те машине интересује да ли је могуће да машина очистити снег у целом граду, а да при том машина, која је пошла из гараже, сваком улицом прође само једном? Може ли се направити таква путања да се машина на крају посла опет нађе у тачки A?

Решење: Машина мора поћи из темена A и завршити у темену степена 3, јер су сва остала темена парног степена.

Задатак 42. Од три оловке (A, B, C) једна је црвена, друга бела, а трећа плава. Које боје је која оловка ако је само једна од следећих изјава тачна: A је црвена, B није црвена, а C није плава.

Решење: Испитујући једну по једну тврдњу закључујемо да је оловка A плава, B црвена, а C је бела.

Задатак 43. Лазић, Микић и Накић раде у банци као књиговођа, благајник, рачуновођа. Ако је Накић благајник, Микић је рачуновођа. Ако је Накић рачуновођа, Микић је књиговођа. Ако је Лазић књиговођа, Накић је рачуновођа. Ко се чме бави?

Решење: Из датих услова добија се: ако је Лазић књиговођа, Накић је рачуновођа, а ако је Накић рачуновођа, то је Микић књиговођа, што је немогуће. Дакле Лазић и Микић нису књиговође, тј. Накић је књиговођа. Из првог услова следи да Микић није рачуновођа; он је благајник. Лазић је рачуновођа.

11.2 Задаци за домаћи рад

Задатак 44. Кока и по за дан и по снесе јаје и по. Колико јаја ће снети 10 кока за 15 дана?

Задатак 45. Које се фигуре могу нацртати једним потезом?

Задатак 46. Костић, Мајкић и Спасић становници су наше улице. Један је столар, други је молер а трећи водоинсталатер. Молер је замолио столара да му нешто поправи у стану, али он није могао јер је радио код водоинсталатера. Спасић и Мајкић се не познају. Ко се чиме бави?

Задатак 47. Корађ, Докић, Марић и Сарић су пекар, лекар, инжењер и милиционер. Корађ и Докић су комшије и на посао се увек возе заједно. Докић је старији од Марића. Корађ је бољи стонотенисер од Сарића. Пекар на посао увек иде пешке. Милицонер није комсхија лекара. Инжењер и милиционер су се срели само једном када је милиционер казнио инжењера. Милиционер је старији од лекара и инжењера. Ко се чиме бави?

Задатак 48. У трци на 100 метара учествовали су Аца, Бранко, Драган, Младен, Доситеј и Вук. Утврдите редослед на крају трке, ако је познато следеће: 1) Драган је бржи од Младена; 2) Доситеј је заузео треће место; 3) Аца је стигао после Вука, али пре Драгана; 4) Вук није победио.

Литература

[1] В. Андриц, *Математика Ш* , Круг, Београд 1996.

[2] Ш. Ђармати *Имате ли кефало?* , Антуријум, Београд, 2005.

[3] М. Исаиловић *Занимљива математика 3* , Графика Шабац, Шабац, 2004.

Предавање 12

Пребројавања у геометрији

Миољуб Исаиловић, ОШ "Николај Велимировић"

12.1 Задаци за рад

Задатак 49. На једној правој дато је 17 тачака. Колико дужи, а колико полуправих, на тој правој, одређује задате тачке?

Решење: Број дужи је $(17 \cdot 16) : 2 = 136$, јер из сваке тачке полази 16 дужи, при чему се свака дуж појављује два пута. Једна тачка на правој одређује две полуправе, па је одређено $17 \cdot 2 = 34$ полуправе.

Задатак 50. Колико најмање, а колико највише правих може одредити 5 тачака?

Решење: Најмање једну ако су колинеарне, а највише 10 ако не постоје 3 тачке које су на истој правој.

Задатак 51. Можете ли распоредити 2011 тачака, тако да оне одређују тачно 2011 правих?

Решење: Могуће је: 2010 распоредимо на једну праву, а ван ње преосталу тачку.

Задатак 52. На две разне паралелне праве уочено је 9 тачака, 5 на једној и 4 на другој. Колико дужи, колико правих, колико троуглова и колико четвороуглова одређују те тачке?

Решење: Број дужи је: $(9 \cdot 8) : 2 = 36$. Број правих није 36. Свака права је одређена са две разне тачке, па свака тачка са једне праве са својом тачком друге праве одређује $5 \cdot 4 = 20$ правих, и још две дате; укупно 22. Постоје троуглови чије су основице на једној ($5 \cdot 4 : 2 = 10$ основица) и на другој правој ($4 \cdot 3 : 2 = 6$ основица),а треће теме на другој правој: $10 \cdot 4 + 6 \cdot 5 = 70$ троуглова. Да би добили четвороугао можемо узети једну дуж на једној правој (има их 10) и упарити са једном дужи друге праве (има их 6). Четвороуглова има $10 \cdot 6 = 60$.

Задатак 53. На кружници је 10 тачака. Колико оне одређују: 1) ду?и; 2) правих; 3) троуглова; 4) четвороуглова?

Решење: 1) $(10 \cdot 9) : 2 = 45$; 2) $(10 \cdot 9) : 2 = 45$; 3) $(10 \cdot 9 \cdot 8) : 6 = 120$, јер прво теме можемо изабрати на 10 начина, друго на 9, а треће на 8, а међу тим изборима има 6 који представљају исти троугао (нпр. $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$), зато се дели са 6. 4) Слично претходном, $(10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7) : 24 = 210$ четвороуглова.

Задатак 54. Колико дужи, а колико квадрата има на шаховској табли?

Решење: У једном правцу има $9 \cdot 8 : 2 = 36$ дужи, а таквих праваца има 18, па је укупан број дужи $36 \cdot 18 = 648$. Прво треба избројати квадрате са једним пољем, затим са 4, па са 9, итд. Има их: $64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204$.

Задатак 55. Колико има квадрата на шаховској табли ако се окрње два угаона поља?

Решење: $204 - (8 + 7) = 189$.

Задатак 56. Три паралелне праве пресечене су са 4 на њих нормалне праве. Колико правоугаоника оне одређују?

Решење: Свака дуж са хоризонталне праве са сваком дужи са вертикалне одређује један правоугаоник. Зато их има $((4 \cdot 3) : 2) \cdot ((3h2) : 2) = 18$.

Задатак 57. Колико најмање правоугаоника са различитим страницама могу одредити праве из претходног задатка?

Решење: Таквих правоугаоника ће бити најмање ако буде максималан број квадрата. Највише квадрата ће бити ако су сви једнопољци квадрати. Тада има 8 квадрата, дакле најмањи број правоугаоника може бити $18 - 8 = 10$.

Задатак 58. На колико највише делова могу три праве поделити један круг?

Решење: На седам делова.

12.2 Задаци за домаћи рад

Задатак 59. Колико тачака одређује тачно 55 дужи?

Задатак 60. Колико има троуглова на слици?

Задатак 61. Колико има квадрата на правоугаоној половини шаховске табле?

Задатак 62. Колико на шаховској табли има правоугаоника који нису квадрати?

Задатак 63. На једној кружници је распоређено 20 тачака, тако да се све дужи које оне образују међусобно секу и да не постоје 3 дужи које се секу у истој тачки. Колико има пресечених тачака тих дужи унутар те кружнице?

Литература

[1] В. Стојановић, *Математископ 1* , Београд 1999.

Предавање 13

Корпице

Миољуб Исаиловић, ОШ "Николај Велимировић"

13.1 Задаци за рад

Задатак 64. Одредити збир свих природних бројева који су мањи од 200.

Решење: Нека је $1 + 2 + 3 + \ldots + 197 + 198 + 199 = S$. Напишимо тај збир обрнутим редоследом: $199 + 198 + 197 + \ldots + 3 + 2 + 1 = S$. Ако саберемо ове две једнакости удружујући сабирке по правилу први са првим, други са другим, ..., добија се:

$$(199+1)+(198+2)+(197+3)+\ldots+(3+197)+(2+198)+(1+199) = 2 \cdot S.$$

Назовимо заграде корпицама. Дакле добили смо 199 корпица у којима је збир 200. Дакле $199 \cdot 200 = 2S$, $S = 19900$.

Задатак 65. Израчунај збир свих троцифрених бројева већих од 179.

Решење:

$$180 + 181 + 182 + \ldots + 997 + 998 + 999 = S,$$

или

$$999 + 998 + 997 + \ldots + 182 + 181 + 180 = S,$$

после сабирања добија се 820 корпица по 1179, па је $2S = 1179 \cdot 820$, итд.

Задатак 66. Изведи формулу за збир свих природних бројева који нису већи од n.

Решење: Нека је $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n$.Обрнуто $n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1 = S$, па се сабирањем, члан по члан ове две једнакости добија n корпица, у свакој по $n+1$, што значи да је $2S = n \cdot (n+1)$, тј. $S = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Задатак 67. Одреди формулу за израчунавање збира свих парних природних бројева који нису већи од $2n$.

Решење: Поступајући као у претходном задатку, добија се да је $S = n \cdot (n+1)$.

Задатак 68. Упрости збир: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-5) + (2n-3) + (2n-1)$.

Решење: Збир непарних природних бројева, применом истог поступка као у претходним задацима, износи n^2 .

Задатак 69. Шта је веће: збир свих парних природних бројева мањих од 1000 или збир свих непарних бројева прве хиљаде?

Решење: Нека је $2+4+6+\ldots+994+996+998 = A$, $1+3+5+\ldots+995+997+999 = B$. Збир A има 499 сабирака, и сваки је за један већи од првих 499 сабирака збира B, али збир B има и 500-ти сабирак (999), па је $B > A$ за $999 - 499 = 500$.

Задатак 70. Оловка и свеска коштају 47 динара. Две оловке и три свеске коштају 126 динара. Колико шта кошта?

Решење: Ако је цена оловке x динара, а цена свеске y динара, онда важи $x + y = 47$ и $2x + 3y = 126$. Замислите да је једна корпица $x + y = 47$. Другу једначину "распакујемо"на корпице које садрже прву: $(x+y) + (x+y) + y = 126$ тј. $47 + 47 + y = 126$, $94 + y = 126$, $y = 32$, $x = 47 - 32 = 15$.

Задатак 71. Три гумице и две оловке коштају 54 динара, а 4 гумице и 3 оловке 77 динара.Колико шта кошта?

Решење: : Ако је цена гумице x, а оловке y динара, онда важи: $3x + 2y = 54$ и $4x + 3y = 77$. Другу једначину "распакујте"преко прве: $4x+3y = (3x+2y)+(x+y) = 77$, тј. $x+y = 77-54 = 23$. "Распакујте"прву (може и другу) у корпице по $x + y$: $3x + 2y = (x+y) + (x+y) + x = 54, 23 + 23 + x = 54, x = 8, y = 15$.

Задатак 72. Збир троструке вредности броја A и четвороструке вредности броја B је 80. Збир четвороструке вредности броја A и троструке вредности броја B је 81. Одредите те бројеве.

Решење: Из услова задатка добијамо $3A + 4B = 80$ и $4A + 3B = 81$. Спакујте то све у једну корпицу и биће $7A+7B = 161$, одакле се добија $A+B = 23$. "Распакујте"једну од свих једначина у корпице $A+B$, нпр. другу $4A+3B = (A+B)+(A+B)+(A+B)+A = 81$, тј. $23+23+23+A = 81, A = 12, B = 11$.

Задатак 73. Крофна и сок коштају 85 динара, сок и чоколадица 55 динара, а крофна и чоколадица 80 динара. Колико шта кошта?

Решење: Ако је цена крофне K, сока S, а чоколадице C, важи $K+S=85$, $S+C=55$ и $K+C=80$. Све то спакујемо у једну корпицу: $2K+2S+2C=220$, тј. $K+S+C=110$. Користећи прву и последњу једначину добија се : $K=55, S=30$ и $C=25$.

13.2 Задаци за домаћи рад

Задатак 74. Одреди збир свих природних бројева мањих од 2011 и дељивих са 3.

Задатак 75. Одреди последњих 6 цифара збира свих непарних бројева: a) прве две хиљаде ; b) мањих од 2010.

Задатак 76. Којим се цифрама може завршавати збир узастопних n природних бројева?

Задатак 77. Мама и син имају 46 година, тата и мама 73, а тата и син 48 година. Колико ко има година?

Задатак 78. Одреди бројеве a, b и c, ако важи: $a+2b+3c=25, 2a+3b+c=21$ и $3a+b+2c=20$.

Литература

[1] М.Исаиловић *Материјал математицке сколе "Матема"*, Студио страних језика и математике "5Ђ", Шабац, 1991-2010.

Предавање 14

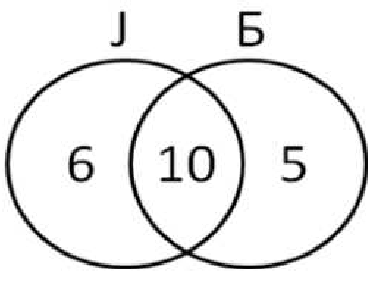
Венови дијаграми

Миољуб Исаиловић, ОШ "Николај Велимировић"

14.1 Задаци за рад

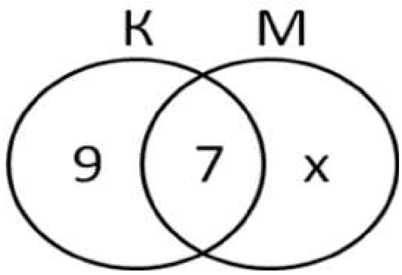
Задатак 79. У једној групи деце њих 6-оро воли само јабуке, 5-оро само крушке, а 10-оро и једно и друго воће. Колико деце: 1) има у тој групи; 2) воли јабуке; 3) воли крушке?

Решење: Решење: 1) 21; 2) 16; 3) 15.



Задатак 80. На једном слављу окупило се 30-оро деце. Њих 16-оро је јело крофне, а од њих 7-оро је јело и мекике. Колико је ученика јело мекике, ако се свако дете послужило мекикама или крофнама?

Решење: $x + 7 + 9 = 30; x = 14; M : 7 + 14 = 21.$



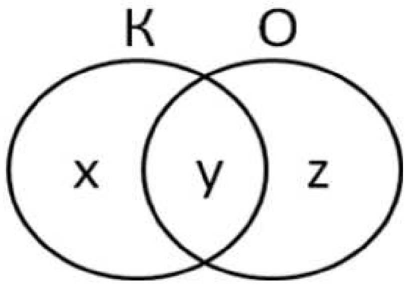
Задатак 81. У једном одељењу 25 ученика се бави спортом и то: 17 кошарком, а 15 одбојком. Колико се ученика бави и кошарком и одбојком?

Решење:

$$x + y + z = 25, x + y = 17; y + z = 15.$$

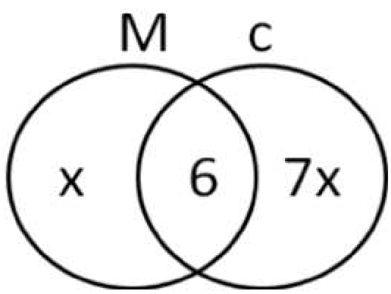
$$x = 25 - 15, x = 10; y = 17 - 10, y = 7;$$

$z = 15 - 7, z = 8$, 7 ученика.



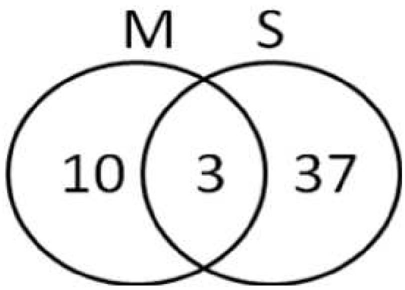
Задатак 82. Сви ученици једног одељења, њих 30, учлањени су у математичку или спорцку секцију. Само у спорцку секцију учлањено је 7 пута више него што је само у математичкој. Колико ученика похађа спорцку секцију, ако 6 ученика похађа обе секције?

Решење: $8x + 6 = 30, 8x = 24, x = 3$. Спорцку секцију похађа 27 ученика.



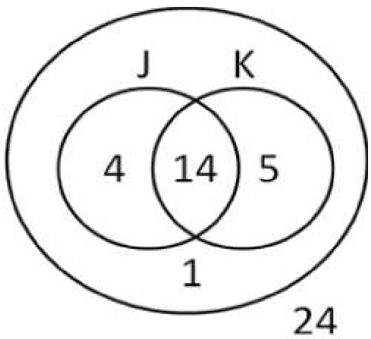
Задатак 83. Сви ученици једног одељења, њих 30, је данас одговарало математику или српски језик. Од 20 ученика који су одговарали српски језик 17 није одговарало математику. Колико је ученика одговарало: 1) оба предмета; 2) само математику; 3) само из једног предмета?

Решење: 1)3; 2)10; 3)27.. На слици је грешком представљено 37 уместо 17.



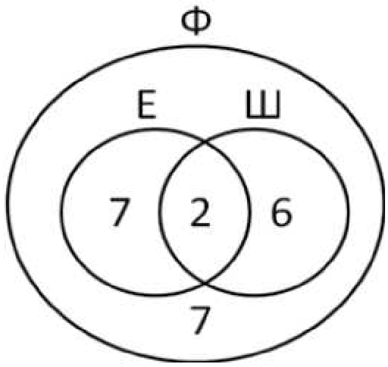
Задатак 84. У одељењу које има 24 ученика, 6 ученика не воли крушке, а 5 ученика не воли јабуке. Колико ученика воли и јабуке и крушке, ако 1 ученик не воли ни јабуке ни крушке?

Решење: Оба воћа 14 (види слику).



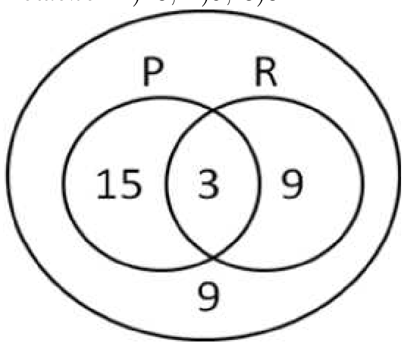
Задатак 85. У групи од 22 фудбалера, њих 7 не зна ни један страни језик, 9 говори енглески, а 8 шпански. Колико фудбалера говори: 1) и шпански и енглески; 2) само шпански?

Решење: 1)2; 2)6.



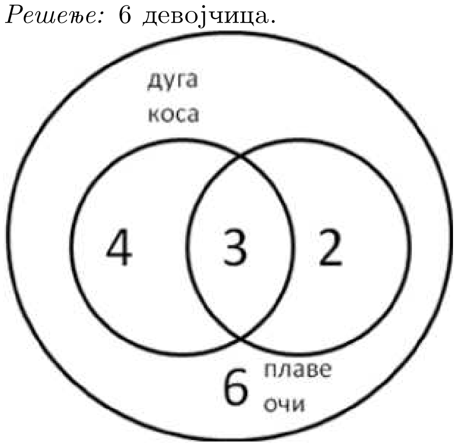
Задатак 86. Од 36 младих четвртина не воли забавну музику, трећина воли рок, а половина поп музику. Колико ученика воли: 1) поп музику; 2) само рок музику; 3) и поп и рок музику?

Решење: 1)18; 2)9; 3)3.



Задатак 87. Од 15 девојчица, њих 7 има дугу косу, а остале кратку. Пет девојчица има плаве очи, а од њих, 3 имају дугу кику. Колико има девојчица са кратком косом, а да немају плаве очи?

Решење: 6 девојчица.



14.2 Задаци за домаћи рад

Задатак 88. Тридесет ученика једног одељења је радило два задатка на контролној вежби. Оба задатка је решило десеторо ученика, а први, лакши задатак је решило још 12 ученика. Међутим, три ученика нису успела ништа да ураде. Колико је ученика решило тежи задатак, а лакши нису успели да ураде?

Задатак 89. У једном одељењу петог разреда има 30 ученика. Од њих 15 је претплаћено на часопис МАТЕМАТИСКОП, 7 купује МАТЕМАТИЧКИ ЛИСТ, а 12 ученика не чита математичке часописе. Учесници математичких такмичења купују и МАТЕМАТИСКОП и МАТЕМАТИЧКИ ЛИСТ. Колико је ученика из овог одељења учествовало на математичким такмичењима?

Задатак 90. У једном одељењу 18 ученика има плаве очи, 16 црну косу, а 10 прћаст нос. Четири плавоока ученика имају црну косу и прћаст нос, 1 црнокоси ученик има прћаст нос, а нема плаве очи, 6 ученика са прћастим носем има плаве очи, док 5 црнокосих нема ни плаве очи ни прћаст нос. Колико ученика има у том одељењу?

Задатак 91. На једном балу било је 100 дама, од којих је 60 имало и наруквицу и огрлицу, а без тога је било 10 дама. Остале даме су имале или наруквицу или огрлицу. Колико је било дама с огрлицом а колико с наруквицом, ако је број дама само с наруквицом 4 пута већи од броја дама само с огрлицом?

Задатак 92. Сто туриста је летовало на мору, језеру и планини: на мору 60, на језеру 30, а на планини 20 туриста. Они који су летовали на мору нису летовали на језеру. Број оних који су после мора отишли на планину једнак је броју оних који су после језера отишли на планину. Колико је туриста летовало: 1) и на мору и на планини; 2) само на једном месту?

Литература

[1] В. Стојановић *Збирка за V разред ОС* , Математископ, Београд 2007.

[2] В. Андрић, *Математика X* , Круг, Београд 1996.

[3] М. Исаиловић, *Математика за В разред* , Српска Школа, Београд 2008.

Предавање 15

Метода "Теразија"

Миољуб Исаиловић, ОШ "Николај Велимировић"

15.1 Задаци за рад

Задатак 93. Уз помоћ теразија реши једначине: 1) $x + 250 = 3x + 100$; 2) $6x - 111 = 2x + 9$; 3) $370 - 6x = 4x$; 4) $30 - x = 3x + 2$; 5) $3x - 5 = 10 - 2x$; 6) $17 - 2x = 53 - 11x$.

Решење: 1) Поставимо дату једначину на теразије које су у равнотежи: на један тас 1 куглицу X и још 250, а на други 3 исте такве куглице $3X$ и још 100. Теразије ће остати у равнотежи ако са оба таса скинемо по једну куглицу ($2X$) тада се добија $250 = 2X + 100, \ldots, X = 75$. 2) У овом случају куглице на левој страни су окрњене за 111. Поправимо прво њих: додајмо 111 на обе стране. Добија се $6X = 2X + 9 + 111$. Скинимо по $2X$, и тада настаје једначина $4X = 120$, ... 3) Сада је број 370 оштећен за $6X$. Додајмо и левој и десној страни, баш тих $6X$. Добија се $370 = 4X + 6X$, итд. 4) Слично претходном: додати X; $30 = 4X + 2$. 5) Додати $2X$! Добија се $5X - 5 = 10$, итд. 6) После додавања $11X$, добија се $17 + 9X = 53, \ldots$

Задатак 94. Ако се трострука вредност неког броја умањи за 123, добија се исто, као када тај број увећамо за 299. Одреди непознат број.

Решење: $3a - 123 = a + 299$ (скинути по a) ; $2a - 123 = 299$

Задатак 95. Књига је 7 пута скупља од свеске. Ако ученик купи свеску преостане му 135 динара, а ако купи књигу, преостане му само 15 динара. Одреди цену свеске, цену књиге и колико је новца имао ученик?

Решење: $a + 135 = 7a + 15$ (скинути по a); $135 = 6a + 15$

Задатак 96. Бициклиста A је кренуо у $7h$ и вози просечном брзином $8\frac{km}{h}$. За њим, у $8h$, истим путем кренуо је бициклиста B возећи просечном брзином $12\frac{km}{h}$. Када је бициклиста B стигао бициклисту A?

Решење: Нека се то деси за a часова од поласка бициклисте B. Да би бициклиста B стигао бициклисту A треба да пређу исте путеве тј. $8+8a=12a$. Скидањем по $8a$ добија се $8=4a$, $a=2$. Стићи ће га у 10 часова.

Задатак 97. Пешак треба да пређе пут за x часова, идући сталном брзином. Ако би прелазио по $7km$ сваког часа, онда би за то време (x часова) био 2 километра испред циља. Када би ишао километар брже, био би за то време 3 километра иза циља. Колика је дужина планираног пута?

Решење: Из услова задатка добија се $7x+2=8x-3$. После скидања по $7x$ добија се $2=x-3, x=5$. Дужина пута је $37km$.

Задатак 98. Брат има 451 динар, а сестра 199. Колико динара брат треба да поклони сестри да би имали исто?

Решење: $451-a=199+a$ (додати a), $451=199+2a$, итд.

Задатак 99. Ђорђе има 100 динара, а Душан 78. Када Ђорђе купи 3 сличице, а Душан једну такву сличицу, остане им подједнако. Колико коштају сличице?

Решење: $100-3a=78-a$ (додати $3a$), $100=78+2a$, итд. *Напомена:* Може се додати и само a.

Задатак 100. Јелена има 450 динара, а Ђорђе толико да може купити 3 тениске лоптице и рекет од 350 динара. Када би Јелена купила једну лоптицу, имала би исто новца као Ђорђе. Колико кошта лоптица?

Решење: $450-a=3a+350$ (додати a), $450=4a+350$, итд.

Задатак 101. Једну траку треба исећи на n једнаких делова дужине цео број дециметара. Ако је дужина сваког дела $6dm$ преостане $4dm$; а, ако би дужина била $7dm$, недостајало би, за последњи део, $2dm$. Колика је дужина траке? Колики може бити број делова после сечења?

Решење: $6n+4=7n-2,\ldots,n=6$. Дужина траке је 4 метра. $n \in \{2,4,5,8,10,20\}$.

Задатак 102. На аутобуској станици постоје две чекаонице. У првој је 4 пута више путника него у другој. Ако из прве отпутује 27 путника, а у другу дође три путника, онда их има подједнако. Колико је путника било, у обе чекаонице, на почетку?

Решење: $4a-27=a+3, 3a=30, a=10$. Било их је 50.

15.2 Задаци за домаћи рад

Задатак 103. Брат има два пута више новца од сестре. Да би имали исто новца, отац поклони ћерки 275 динара, а сину 27. Колико су они имали новца пре, а колико после очевог поклона?

Задатак 104. Мама је 6 пута старија од своје ћерке. Да је мама млађа 8 година, била би 5 пута старија. Колико ко има година?

Задатак 105. Ако дечак купи 8 сличица, преостане му 150 динара, а ако купи 14, преостане му 30 динара. Колико новца има дечак?

Задатак 106. Брат има 205 динара, а сестра 169. Када је брат купио 6 бојица, а сестра 4 исте такве бојице, остало им је подједнако. Колико кошта бојица?

Задатак 107. Ана има 500 динара, а Сања 220. Ана позајми Сањи тачно толико новца колико коштају 4 свеске. После поклона, Ана и Сања су имале исто новца. Колика је цена свеске?

Литература

[1] М. Исаиловић *Занимљива математика за трећи разред*, Шабац, 2004.

Део III

Предавања за средњу школу

Предавање 16

Идентитети са биномним коефицијентима

Душан Милијанчевић, Математичка гимназија

16.1 Теоријски увод

Дефиниција 19. За ненегативне целе бројеве n и k, $n \geq k$ дефинишемо број

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Теорема 37. За ненегативне целе бројеве n и k такве да је $n \geq k$ број различитих k-точланих подскупова скупа од n елемената је $\binom{n}{k}$.

Теорема 38. (Паскалова теорема) За природне бројеве n, k и $n \geq k$ важи $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

Теорема 39. (Њутнова биномна формула) За природан број n и полином $(x+1)^n$ важи $(x+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

16.2 Задаци за рад

Задатак 108. За биномни коефицијент $\binom{n}{k}$ важи $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Решење 1: Број $\binom{n}{k}$ представља број k-точланих подскупова скупа од n елемената. Сваки од тог k-точланог подскупа одређује тачно један $n-k$-точлан подскуп (његов комплемент), па је број подскупова са k и $n-k$ елемената једнак. Онда важи $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Решење 2: Доказ следи из следећег индентитета

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}=\binom{n}{n-k}.$$

Задатак 109. За ненегативне целе бројеве n,m,k, $n\geq m\geq k$ важи

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}=\binom{n}{m-k}\binom{n-m+k}{k}.$$

Решење: Из дефиниције биномног коефицијента следе наредне једнакости.

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k}=\frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{m!}{k!(m-k)!}=\frac{n!}{k!(n-m)!(m-k)!},$$

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-m)!(m-k)!}=\frac{n!}{k!(n-m)!(m-k)!},$$

$$\binom{n}{m-k}\binom{n-m+k}{k}=\frac{n!}{(m-k)!(n-m+k)!}\cdot\frac{(n-m+k)!}{(n-m)!k!}=\frac{n!}{k!(n-m)!(m-k)!}.$$

Задатак 110. (Паскалова теорема) За природне бројеве n,k и $n\geq k$ важи

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}.$$

Решење: Како је $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ и $\binom{n}{k-1}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$, то је

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k+1})=$$

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{n+1}{k(n-k+1)}=\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}=\binom{n+1}{k},$$

што је и требало доказати.

Задатак 111. За ненегативне целе бројеве m и n важи $\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{m+i}{i}=\binom{m+n+1}{n}$.

Решење: Доказујемо индукцијом по n. За $n=0$ једнакост очигледно важи. Претпосатвимо да једнакост важи за неко ненегативно цело n. Важе следеће једнакости

$$\sum_{i=0}^{n+1}\binom{m+i}{i}=\binom{m+n+1}{n+1}+\sum_{i=0}^{n}\binom{m+i}{i}=\binom{m+n+1}{n+1}+\binom{m+n+1}{n}=$$

$$\binom{m+n+2}{n+1},$$

што завршава доказ математихком индукцијом.

Задатак 112. За ненегативан цео број n важи $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Решење: Применимо Њутнову биному формулу за $x = 1$. Добијамо да важи

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Задатак 113. За сваки ненегативан цео број n важи $\binom{2n}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Решење: Посматрајмо коефицијенте уз x^n у полиному $(x+1)^{2n} = (x+1)^n \cdot (x+1)^n$. Коефицијент уз x^n у $(x+1)^{2n}$ је по Њутновој биномној формулиједнак $\binom{2n}{n}$. Коефицијент уз x^n у полиному $(x+1)^n \cdot (x+1)^n$ једнак је $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$. Како је $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, то је $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. Међутим, како су полиноми $(x+1)^{2n}$ и $(x+1)^n \cdot (x+1)^n$ једнаки, то су и њихови коефицинети уз x^k једнаки. Значи да важи једнакост

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2,$$

што је и требало доказати.

Задатак 114. За ненеагативне целе бројеве m, n и a, $a \leq min(m, n)$ важи $\binom{m+n}{a} = \sum_{k=0}^{a} \binom{n}{k}\binom{m}{a-k}$.

Решење: Посматрајмо коефицијент уз x^a у полиному $(x+1)^{m+n} = (x+1)^m \cdot (x+1)^n$. Коефицијент уз x^a у полиному $(x+1)^{m+n}$ је $\binom{m+n}{a}$, док је коефицијент уз x^a у полиному $(x+1)^m \cdot (x+1)^n$ једнак $\sum\limits_{k=0}^{a} \binom{n}{k}\binom{m}{k-a}$. Како су ова два полинома једнака, то су и ова два коефицијента једнака, па важи тражена једнакост

Задатак 115. За сваки природан број n важи $n\binom{2n-1}{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2$.

Решење: У претходном задатку ставимо $a = m = n - 1$ и добијамо $\binom{2n-1}{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\binom{n-1}{n-1-k}$. Како је $\binom{n}{n-k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{n-1-k}$, то је

$$n\binom{2n-1}{n-1} = n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)\binom{n}{n-k}^2 = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2,$$

што је и требало доказати.

Задатак 116. Доказати да за природне бројеве n, q, $n \geq q$ важи $\sum\limits_{k=q}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{q} = 2^{n-q}\binom{n}{q}$.

Решење: Пребројимо на два начина број различитх избора подскупова скупа од n елемената који има бар q елемената од којих је тачно q означених. Фиксирајмо један подскуп којима k елеманат $n \geq k \geq q$. Њега можемо изабрати на $\binom{n}{k}$ начина. Елементе од тих k елемената које ћемо означити можемо изабрати на $\binom{k}{q}$ начина што значи да укупно има $\sum\limits_{k=q}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{q}$ начина за избор подскупова од бар q елемената од којих су q означени. За други начин изаберимо на почетку q елемената које ћемо означити. То можемо урадити на $\binom{n}{q}$ начина, а преосталих $n-q$ елемената можемо на произвољан начин придруживати скупу. Значи да има тачно $2^{n-q}\binom{n}{q}$ подскупова са овом особином. Из овога следи тражена једнакост.

Задатак 117. За природан број n важи $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}2^{2n-2k} = \binom{4n}{2n}$.

Решење: Посматрајмо $4n$ објеката од којих је $2n$ обојено у белу боју, а других $2n$ у црни боју. Такође означимо беле и црне објекте бројевима $1, 2, ..., 2n$ (сваки бели објекат тачно једним бројем и сваки црни објекат тачно једним бројем). Пребројаћемо два пута на колико различитих начина можемо од датих $4n$ објеката изабрати $2n$ разлицхитих. То је очигледно могуће урадити на $\binom{4n}{2n}$ начина. За свако природно k, $0 \leq k \leq 2n$ избројаћемо колико има таквих избора таквих да се бројеви изабраних белих и црних објеката поклапају на тачно k места. Изабраних k објеката којима се бројеви поклапају бирамо на $\binom{2n}{k}$ начина, што нам оставља могућност да од $4n-2k$ објеката изаберемо $2n-2k$ међу којима нема оних који су означени истим бројем. То можемо учинити на $\binom{2n-k}{2n-2k}2^{2n-2k}$ начина, што значи да укупно имамо $\binom{2n}{k}\binom{2n-k}{2n-2k}2^{2n-2k}$ начина. Како је

$$\binom{2n}{k}\binom{2n-k}{2n-2k} = \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}\cdot\frac{(2n-k)!}{(2n-2k)!k!} = \frac{(2n)!}{(2k)!(2n-2k)!}\cdot\frac{(2k)!}{(k!)^2} = \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k},$$

што значи да је број тражених избора објеката једнак тачно $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}2^{2n-2k}$, чиме је тражена једнакост доказана.

16.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 118. Нека су n и k природни бројеви такви да важи $n \geq k+1$. Онда је $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$.

Задатак 119. За ненегативне целе бројеве m, n, $n \geq m$ важи $\sum\limits_{i=m}^{n} \binom{i}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

Задатак 120. За ненегативан цео број n важи $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = 0$.

Задатак 121. За ненегативне целе бројеве $m, n,\ n \geq m$ важи $\binom{n+m}{m} = \sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{m}{k}$.

Задатак 122. За природне бројеве m и n важи једнакост $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+k}{m} = \sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{m}{k}2^k$.

Литература

[1] Д. Милијанчевић, *Једнакости са биномним коефицијентима*, Центар за таленте 2009.

Предавање 17

Хомотетија

Душан Милијанчевић, Математичка гимназија

17.1 Теоријски увод

Дефиниција 20. Хомотетија $\mathcal{H}_{O,k}$ са центром у тачки O и коефицијентом k ($k \neq 0$) је пресликавање равни у саму себе такво да је $\mathcal{H}_{O,k}(X) = Y$, где је Y таква тачка да важи $\vec{OY} = k\vec{OX}$, тј. ако је $k > 0$ тачка Y је на полуправој OX таква да је $OY = kOX$, а ако је $k < 0$ тачка Y је на полуправој XO таква да је $OY = -kOX$.

Теорема 40. Нека се при хомотетија $\mathcal{H}_{O,k}$ тачке M и N сликају у тачке M' и N'. Онда је $\triangle OMN \sim \triangle OM'N'$ са коефицијентом k.

Теорема 41. При хомотетији праве се сликају у праве.

Теорема 42. При хомотетији кружница се слика у кружницу, а њен центар у центар нове кружнице.

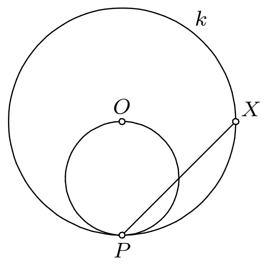
Теорема 43. При хомотетији угао између кривих се не мења.

Теорема 44. За сваке две кружнице $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ које нису концентричне постоје тачно две хомотетије које сликају k_1 у k_2. Центри тих хомотетија се налазе на правој O_1O_2 и деле је у размери $\frac{r_2}{r_1}$ и $-\frac{r_2}{r_1}$.

17.2 Задаци за рад

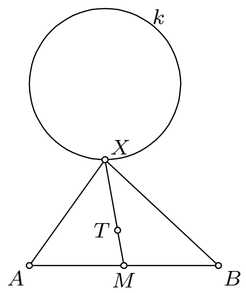
Задатак 123. Нека је тачка P на кружници k. Одредити скуп свих средишта дужи PX где $X \in k$.

Решење: Скуп свих средишта дужи PX је $\mathcal{H}_{P,\frac{1}{2}}(k)$ што је кружница над пречником PO, где је O центар k.



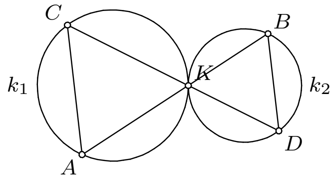
Задатак 124. У равни су дате тачке A и B и кружница k. Одредити скуп свих тежишта троуглова ABX где $X \in k$.

Решење: Нека је M средиште дужи AB. Како је тежиште T троугла ABX таква тачка на MX да $\frac{MT}{MX} = \frac{1}{3}$, то је тражени скуп заправо $\mathcal{H}_{M,\frac{1}{3}}$.



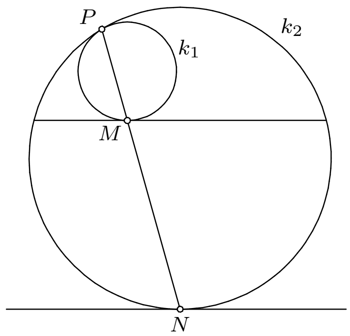
Задатак 125. Нека се кружнице k_1 и k_2 додирују споља у K. Две праве кроз K секу k_1 и k_2 у тачкама A и B, односно у тачкама C и D. Доказати да су праве AC и BD паралелне.

Решење: Посматрајмо хомотетију са центром у K која слика k_1 у k_2. Онда се A слика у B, а C у D. Самим тим се права AB слика у праву CD, па важи $AB||CD$.



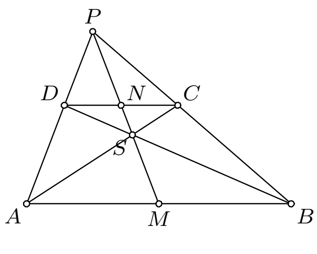
Задатак 126. Кружнице k_1 и k_2 се додирују изнутра у P. Паралелне тангенте кружница k_1 и k_2 додирују их редом у тачкама M и N. Доказати да су тачке P, M и N колинеарне.

Решење: Како се k_1 и k_2 додирују у P то постоји хомотетија $\mathcal{H}_{P,k}$ која слика k_1 у k_2. Онда се две дате тангенте сликају једна у другу, па се и M слика у N. Из овога следи да су тачке P, M и N заиста колинеарне.



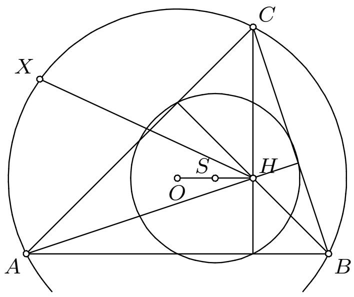
Задатак 127. Странице AD и BC трапеза $ABCD$ секу се у P. Ако су M и N средишта страница AB и CD, а S пресек дијагонала доказати да су тачке P, S, M и N колинеарне.

Решење: Посматрајмо хомотетију $\mathcal{H}_{S,-\frac{AB}{CD}}$. Овом хомотетијом се M слика у N због сличности троуглова SAB и SCD. Следи да су тачке M, S и N колинеарне. Посматрајмо сада хомотетију $\mathcal{H}_{P,\frac{AB}{CD}}$. Због сличности троуглова PCA и PBA овом хомотетијом се N слика у M, па су тачке P, N и M колинеарне. Следи да су све четири тачке P, S, M и N колинеарне, што је и требало доказати.



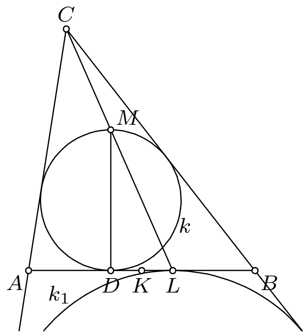
Задатак 128. Нека је H ортоцентар троугла ABC. Доказати да средиште дужи HX припада Ојлеровој кружници троугла ABC ако X припада кружници описаној око троугла ABC.

Решење: Нека су S и O центри Ојлерове и крузнице описане око троугла ABC. Како је $SH = SO$ то се при хомотетији $\mathcal{H}_{H,\frac{1}{2}}$ описана кружница слика у Ојлерову. То значи да за свако X са описане кружнице средиште дужи HX припада Ојлеровој кружници троугла ABC.



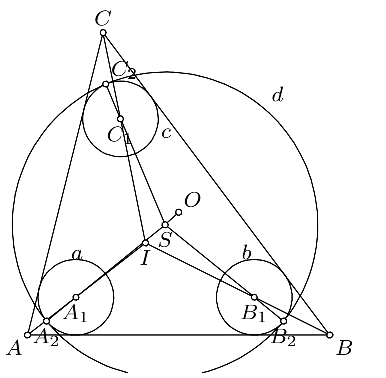
Задатак 129. У троуглу ABC уписана кружница додирује страницу AB у тачки D. Нека је M дијаметрално супротна тачка од D у уписаној кружници. Ако је K средиште странице AB, а L тачка на AB различита од D таква да је $DK = KL$ доказати да су тачке C, M и L колинеарне.

Решење: Означимо уписану кружницу са k, а приписану кружницу над страницом AB са k_1. Кружница k_1 додирује страницу AB у тачки L. Посматрајмо хомотетију са центром у C која слика k у k_1. Тангента у тачки M на k се слика у AB, па се M слика у L. Из овога следи да су тачке C, M и L колинеарне.



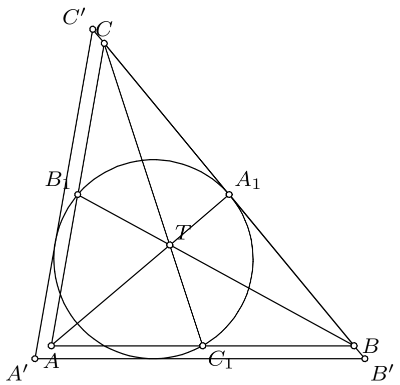
Задатак 130. Нека су a, b и c кружнице истог полупречника које додирују краке углова $\angle BAC, \angle ABC$ и $\angle ACB$. Ако a, b и c изнутра додирују кружницу d доказати да се центар кружнице d налази на правој IO где је I центар уписане, а O центар описане кружнице у троугао ABC.

Решење: Означимо са A_1, B_1 и C_1 центре уписаних кружница у a, b и c. Нека кружница d са центром S додирује a, b и c у тачкама A_2, B_2 и C_2. Онда је $SA_2 = SB_2 = SC_2$, а како је $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$ то је $SA_1 = SB_1 = SC_1$ што значи да је S центар описане кружнице троугла $A_1B_1C_1$. Како се праве AA_1, BB_1 и CC_1 секу у I и $A_1B_1||AB, A_1C_1||AC$ и $B_1C_1||BC$ то постоји хомотетија са центром у I која слика $A_1B_1C_1$ у ABC. При тој хомотетији се S слика у O, па су тачке I, S и O колинеарне.



Задатак 131. Ако су R и r полупречници описане и уписане кружнице неког троугла ABC доказати да је $R \geq 2r$.

Решење: Нека су A_1, B_1 и C_1 средишта страница BC, AC и AB троугла ABC, а T његово тежиште. Са хомотетијом $\mathcal{H}_{T,-\frac{1}{2}}$ троугао ABC се слика у троугао $A_1B_1C_1$ што значи да је полупречник R_1 описане кружнице троугла $A_1B_1C_1$ једнак $\frac{R}{2}$. Довољно је доказати да је $R_1 \geq r$. Повуцимо тангенте паралелне са страницама троугла на описану кружницу од $A_1B_1C_1$. Нека оне образују троугао $A'B'C'$. Како је троугао ABC хомотетичан са троуглом $A'B'C'$ са коефицијентом ≤ 1 то важи да је полупречник R_1 уписане кружнице у $A'B'C'$ већи или једнак од полупречника уписане кружнице у ABC што је r. Овим смо доказали тражену неједнакост.



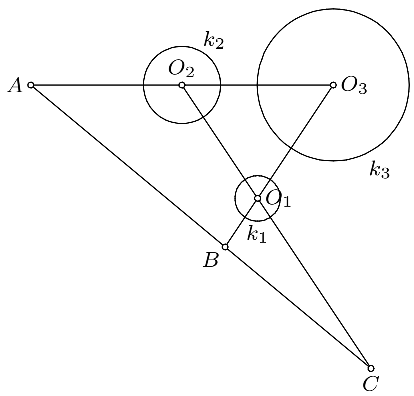
Задатак 132. Нека су k_1, k_2 и k_3 три кружнице за које постоје три хомотетије $\mathcal{H}_{A,p}, \mathcal{H}_{B,q}$ и $\mathcal{H}_{C,r}$ такве да је $p, q, r > 0$ и $\mathcal{H}_{A,p}(k_1) = k_2, \mathcal{H}_{B,q}(k_2) = k_3$ и $\mathcal{H}_{C,r}(k_3) = k_1$. Доказати да је $pqr = 1$ и да су тачке A, B и C колинеарне.

Решење: Нека су кружнице $k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2)$ и $k_3(O_3, r_3)$. Онда је $r_2 = pr_1, r_3 = qr_2$ и $r_1 = rr_3$, па је $r_1r_2r_3 = pqrr_1r_2r_3$ односно $pqr = 1$.

Како је $p, q, r > 0$ то се тачке A, B и C налазе на правама O_1O_2, O_2O_3 и O_3O_1 али ван дужи O_1O_2, O_2O_3 и O_3O_1 тим редом. Онда је $\frac{\vec{AO_2}}{\vec{AO_1}} = p$, $\frac{\vec{BO_3}}{\vec{BO_2}} = q$ и $\frac{\vec{CO_1}}{\vec{CO_3}} = r$, па је

$$\frac{\vec{O_1A}}{\vec{AO_2}} \cdot \frac{\vec{O_2B}}{\vec{BO_3}} \cdot \frac{\vec{O_3C}}{\vec{CO_1}} = \frac{-1}{pqr} = -1.$$

Из ове једнакости следи да су тачке A, B и C колинеарне по Менелајевој теореми, чиме је задатак завршен.



17.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 133. Нека су кружнице k_1 и k_2 дисјунктне. Доказати да су центри хомотетија које сликају k_1 у k_2 пресеци унутрашњих и спољашњих тангенти k_1 и k_2.

Задатак 134. У равни су дате тачке A и B и права p. Наћи скуп свих тежишта троуглова ABX где $X \in p$.

Задатак 135. Кружнице k_1 и k_2 се додирују споља у тачки P. Паралелне тангенте на k_1 и k_2 додирују их редом у тачкама M и N. Доказати да су тачке P, M и N колинеарне.

Задатак 136. Четири кружнице истих полупречника ρ конструисане су тако да једна додирује све три преостале, а остале три по две странице троугла ABC. Ако су полупречници описане и уписане кружнице троугла ABC једнаке R и r израчунати ρ.

Задатак 137. Круг S додирује странице AB и BC једнакокраког троугла ABC ($AB = BC$) у P и K редом и додирује описану кружницу од ABC. Доказати да је средиште дужи PK центар уписане кружнице у троугао ABC.

Напомена: Тврђене задатка важи за све троуглове, не обавезно за једнакокраки.

Литература

[1] В.В. Прасолов, *Problems in plane and solid geometry*, електронско издање.

[2] Д. Милијанчевић, *Хомотетија и сличност*, Зимски математички камп - Шабац 2009.

Предавање 18

Комбинаторна геометрија

Душан Милијанчевић, Математичка гимназија

18.1 Теоријски увод

Теорема 45. За сваки скуп од n тацака ($n \geq 3$) у равни, од којих нису све колинеарне, постоји конвексан многоугао са теменима у неким од датих тачака који садржи свих n тачака.

Дефиниција 21. Конвексан многоугао за датих n тачака из претходне теореме се назива конвексан омотач датог скупа од n тачака.

Теорема 46. Конвексан омотач датог скупа тачака је најмањи (по површини) конвексан многоугао који садржи дате тачке.

Теорема 47. Нека се конвексна фигура A налази унутар конвексне фигуре B. Онда је обим фигуре A мањи од обима фигуре B.

Теорема 48. (Пикова теорема) Многоугао чија су темена у целобројним тачкама има површину $\frac{i}{2}+u-1$, где је i број целобројних тачака на контури многоугла, а u број тачака у унутрашњости датог многогула.

Теорема 49. (Ван де Верденова теорема) За све природне бројеве k и r постоји природан број w такав да како год обојили бројеве $1, 2, ..., w$ у k боја постоји једнобојна аритметичка прогресија дужине r.

18.2 Задаци за рад

Задатак 138. У равни је дато неколико тачака. Доказати да постоји тачка од датих за коју постоји растојање до осталих тачака који се реализијуе не више од 3 пута.

Решење: Посматрајмо минимално растојање између датих тачака и тачке које реализује то растојање. Довољно је доказати да постоји тачка за коју се то растојање реализује највише 3 пута. Узмимо конвексни омотач тачака које учествују у реазлицију минималног растојања. Нека је P једно од темена конвексног омотача. Нека су A и B тачке такве да су AP и BP минимална растојања. Онда је $AB \geq AP = BP$, па је $\angle APB \geq 60^\circ$. Уколико би постојале бар четири тачке које са тачком P реализују минимално растојања онда би угао конвексног омотача код угла P био већи од $3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$, што је немогуће.

Задатак 139. У равни је дато $2n + 3$ тачака од којих не постоје три колинеарне или четири на истој кружници. Доказати да постоје три тачке од датих тако да се у њиховој описаној кружници налази тачно n преосталих тачака.

Решење: Нека су A и B две суседне тачке на конвексном омотачу од датих тачака. Онда се све од датих тачака налазе са исте праве AB. Означимо преостале тачке са $X_1, X_2, ..., X_{2n-1}$ тако да је $\angle AX_iB < \angle AX_jB$ за $i < j$ (ово је могуће постиће јер никоје четири тачке нису на истој кружници). Посматрајмо описану кружницу око троугла $AX_{n-1}B$. Она садржи тачке $X_n, X_{n+1}, ..., X_{2n-1}$ којих има тачно n, а не садржи тачке $X_1, X_2, ...X_{n-1}$ чиме смо решили задатак.

Задатак 140. Доказати да се сваки конвексан многоугао површине 1 може сместити у правоугаоник површине 2.

Решење: Нека је AB највећа дијагонала или страница конвексног многоугла. Нека је M неко друго теме многоугла. Онда је $\angle ABM, \angle BAM < 90^\circ$ па се цео многоугао налази у траци ширине AB која је нормална на AB. Нека су x и y највећа растојања темена многоугла са једне и друге стране праве AB (ако је AB страница многоугла онда је цео многоугао са једне стране AB, па се задатак решава посматрањем само једног растојања). Како је многоугао конвексан и површине 1 то је $1 \geq \frac{AB \cdot x}{2} + \frac{AB \cdot y}{2}$, па је $AB \cdot (x + y) \leq 2$. Конструихимо праве паралелене са AB на растојањима x (са оне стране са које највеће растојање x) и y (са оне стране са које је растојање y). Онда се цео многоугао налази у правоугаонику страница AB и $x+y$ чија је површине $AB \cdot (x+y) \leq 2$. Тај правоугаоник се може проширити до правоугаоника површине тачно 2, чиме смо решили задатак.

Задатак 141. У равни је дато n тачака ($n \geq 2$) између којих је максимално растојање 1. Ако је d минимално растојање између датих тачака доказати да је $d < \frac{2}{\sqrt{n}-1}$.

Решење: Опишимо око сваке од датих тачака кружнице полупречника $\frac{d}{2}$. Те кружнице се не секу, евентуално се додирују. Фиксирајмо једну тачки и око ње опишимо и кружицу полупречника $1 + \frac{d}{2}$. Све кружнице полупречника $\frac{d}{2}$ се налазе у овој кружници, па је збир њихових површина мањи од површине ове кружнице, односно важи $n\pi\frac{d^2}{4} \leq \pi(1 + \frac{d}{2})^2$. Из ове неједнакости следи да је $d < \frac{2}{\sqrt{n}-1}$, што је и требало доказати.

Задатак 142. Свака тачка равни је обојена са неком од три боје. Доказати да постоји троугао чија су темена исте боје, полупречник описане кружнице му је тачно 2010, а један угао је два пута већи од једног од преостала два угла тог троугла.

Решење: Посматрајмо произвољну кружинцу полупречника 2010. По Ван дер Верденовој теореими постоји природан број w такав да низ $1, 2, ..., w$ садржи једнобојну аритметичку прогресију дужине бар 4. Упишимо правилан w-тоугао у дату кружницу и узмимо исто бојење за дате тачке као бојење равни. Онда постоје четири тачке A, B, C и D исте боје на тој кружници такве да је $AB = BC = CD$. Како је $\angle ADC = 2\angle DAC$ то је троугао ACD тражени.

Задатак 143. У конвексном $2m$-тоуглу $A_1A_2...A_{2m}$ дата је тачка P која не припада ни једној дијагонали. Доказати да је број троуглова са теменима у $A_1, A_2, ..., A_{2m}$ који садрже тачку P паран.

Решење: Све дијагонале и странице датог многоугла деле раван на области. Доказаћемо да се проласком тачке P из једне области у другу парност броја троуглова којима тачка P припада не мења. Како је за област ван многугла тај број 0, то ће следити да је број тражених троуглова за сваку област паран. Посмтрајмо две сусдне области које су подељене дијагоналом или страницом PQ. Сваки троугао који нема страницу PQ садржи обе дате области, па је довољно разматрати оне троуглове који садрже дуж PQ. Нека је x број троуглова са страницом PQ који садрже прву област, а y број троуглова са страницом PQ који садрже другу област. Онда је $x + y = 2n - 2$, а како се преласком из једне у другу област број троуглова који садрже тачку P промени за $y - x = 2n - 2 - 2x$ што је паран број, задатак је решен.

Задатак 144. У равни је дато n тачака ($n \geq 3$) таквих да за сваке две од њих права која их садржи садржи бар још једну од датих тачака. Доказати да су датих n тачака колинеарне.

Решење: Претпоставимо супротно тј. да нису све тачке колинеарне. Посматрајмо сва могућа растојања датих тачака до правих које је не садрже. Међу тим растојањима постоји најмање, јер их има коначно много. Нека се то остварује за тачку A и праву p која садржи тачке B

и C. Нека је подножје нормала из A на p тачка M. Како права p сем тачака B и C садржи још неку тачку D из тог скупа онда постоје бар две тачке од B, C и D које су са исте стране тачке M праве p (неке од B, C или D могу да се поклапају са M). Нека су то без умањења општости тачке B и C. Можемо претпоставити и да је распоред тачака M, B и C баш $M - B - C$. Нека је N подножје нормале из B на AC и нека је N_1 пресек нормале из B на p са AC. Онда је $AM \geq BN_1 > BN$ што значи да је растојање тачке B од праве AC мање од растојања A до праве BC. Како смо претпоставили да је растојање AM најмање ово је контрадикција. Почетна претпоставка није тачна што значи да су свих n тачака колинеарне.

Задатак 145. У координатном систему дат је квадрат странице n. Доказати да он садржи највише $(n+1)^2$ целобројних тачака.

Решење: Нека је P конвексан омотач целобројних тачака које се налазе унутар датог квадрата. Нека квадрат садржи N целобројних тачака, а конвексан омотач k тачака на својој граници. По Пиковој теореми површине од P је једнака $\frac{k}{2} + N - k - 1 = N - \frac{k}{2} - 1$. Како је површина од P не већа од n^2, то је $N \leq n^2 + \frac{k}{2} + 1$. Обим многоугла P је већи од k (растојање сваке две целобројне тачке је ≥ 1), а мањи од обима квадрата који је $4n$. Онда је $k \leq n$, па је $N \leq n^2 + \frac{4n}{2} + 1 = (n+1)^2$.

Задатак 146. Дат је скуп од S од n тачака од којих не постоје три колинеарне са својством да за сваку тачку P из S постоји бар k тачака из S које имају исту удаљеност од P. Доказати да је $k < \frac{1}{2} + 2n$.

Решење: Претпоставимо супртоно тј. да је $k \geq \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$. За сваку тачку P постоји бар $\binom{k}{2}$ скупова $\{A, B\}$ таквих да је $AP = BP$. Онда је број уређених парова $(\{A, B\}, P)$ таквих да је $AP = BP$ бар $n\binom{k}{2}$. Како је

$$n\binom{k}{2} \geq \frac{n}{2}(\sqrt{2n} + \frac{1}{2})(\sqrt{2n} - \frac{1}{2}) = \frac{n}{2}(2n - \frac{1}{4}) > n(n-1) = 2\binom{n}{2},$$

то постоје бар три тачке P_1, P_2, P_3 за фиксиране A и B, такве да је $AP_1 = BP_1, AP_2 = BP_2$ и $AP_3 = BP_3$. Онда су тачке P_1, P_2 и P_3 колинеарне, што је контрадикција.

Задатак 147. У квадрату странице n дато је $(n+1)^2$ тачака међу којима нема три колинеарне. Доказати да постоје три од датих тачака које образују троугао површине не веће од $\frac{1}{2}$.

Решење: Нека конвексан омотач датих $(n+1)^2$ тачака унутар многоугла садржи k тачака. Онда се у његовој унутрашњости налази

$(n+1)^2 - k$ тачака. Узмимо произвољну триангулацију датог многоугла. У њој има $\frac{(k-2)\cdot\pi+((n+1)^2-k)\cdot 2\pi}{\pi} = 2(n^2+2n)-k$ троуглова. Како је површине многогула $\leq n^2$, то постоји троугао у триангулацији чија је површина не већа од $\frac{n^2}{2n^2+4n-k}$. За $k \leq 4n$ овај број је $\leq \frac{1}{2}$, па смо нашли троугао површине не веће од $\frac{1}{2}$. Нека је сада $k > 4n$. Обим датог многоугла је $\leq 4n$, па за неке две суседне странице дужина a и b тог многоугла важи $\frac{a+b}{2} \leq \frac{4n}{k}$. За површину P троугла са страницама a и b важи $P \leq \frac{ab}{2} \leq \frac{(a+b)^2}{8} \leq \frac{8n^2}{k^2}$. За $k > 4n$ важи $\frac{8n^2}{4k^2} < \frac{1}{2}$, па и у овом случају имамо троугао површине не веће од $\frac{1}{2}$.

18.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 148. У равни је дато n тачака од којих не постоје три колинеарне и четири на истој кружници. Нека је k природан број такав да је $3 \leq k \leq n-3$. Доказати да од датих n тачака можемо изабрати три A, B и C такве да кружница описана око троугла ABC садржи тачно k од датих тачака у својој унутршњости.

Задатак 149. Трака ширине x је скуп свих тачака који се налазе између или на две паралелене праве на растојању x. У равни је дато n тачака ($n \in \mathbf{N}$) таквих да се било које три од њих могу покрити траком ширине 1. Доказати да се свих n тачака може покрити траком ширине 2.

Задатак 150. Кружница је обојена са k боја ($k \in \mathbf{N}$). Доказати да постоје три тачке на тој кружници обојене истом бојом такве да образују троугао чији је један угао три пута већи од једног од преостала два угла тог троугла.

Задатак 151. У равни је дато неколико правих од којих не постоје две паралелене. Ако кроз пресек сваке две од њих пролази бар још једна права доказати да се све праве секу у једној тачки.

Задатак 152. У равни је дато n тачака ($n \geq 3$) од којих нису све на једној правој. Доказати да оне образују бар n различитих правих.

Литература

[1] А. Енгел, *Problem Solving Strategies*, Спрингер 1997.

[2] Д. Ђукић, В. Јанковић, И. Матић, Н. Петровић, *The IMO Compendium*, Спрингер 2006.

[3] В.В. Прасолов, *Problems in plane and solid geometry*, електронско издање.

Предавање 19

Полиноми

Душан Милијанчевић, Математичка гимназија

19.1 Теоријски увод

Теорема 50. Ако је $P(x)$ реалан полином онда $x-a|P(x)$ ($a \in R$) ако и само ако $P(a)=0$. Слично важи и за $P(x) \in \mathbf{Q}[x]$ и $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$.

Теорема 51. За полином $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$ и различите целе бројеве a и b важи $a-b|P(a)-P(b)$.

Теорема 52. Нека је $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$ моничан полином. Ако је r његова рационална нула онда $r \in \mathbf{Z}$.

Теорема 53. Ако полином $P(x) \in \mathbf{R}[x]$ има бар $\deg(P)+1$ нула онда је он индентички једнак 0.

Дефиниција 22. Полином $P(x)$ је иредуцибилан у $\mathbf{Z}[x]$ (слично и у $\mathbf{R}[x]$ и $\mathbf{Q}[x]$) ако не постоје два полинома $Q(x)$ и $R(x)$ из $\mathbf{Z}[x]$ (односно $\mathbf{R}[x]$ или $\mathbf{Q}[x]$) таква да је $P(x)=Q(x)R(x)$ чији су степени бар 1.

19.2 Задаци за рад

Задатак 153. Нека је $P(x)=(x^2+x+1)^{2010}$. Одредити разлику коефицијената на парним и непарним местима полинома $P(x)$.

Решење: Нека је $P(x)=\sum_{i=0}^{4020} a_i x^i$. Онда је $P(-1)=\sum_{i=0}^{4010}(-1)^i a_i$, па је тражена разлика једнака $P(-1)=1^{2010}=1$.

Задатак 154. Нека је $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ моничан полином и $k,p \in \mathbf{N}$. Ако $p+1$ не дели ниједан од бројева $f(k), f(k+1), ..., f(k+p)$ доказати да f нема рационалних нула.

Решење: Претпоставимо супротно, тј. нека је $r \in \mathbf{Q}$ рационална нула $f(x)$. Како је f моничан онда $r \in \mathbf{Z}$. Важи да је $f(x) = (x-r)g(x)$ где $g(x) \in \mathbf{Z}[x]$. За тачно један број $x = k, k+1, ..., k+p$ важиће $p+1|x-r$ односно да $p+1|f(k+i)$ за неко $0 \leq i \leq p$ што је у супротности са почетном претпоставком.

Задатак 155. Нека је $P(x)$ полином са целобројним коефицијентима такав да је $P(a) = P(b) = P(c) = -1$ за три различита цела броја a, b и c. Доказати да $P(x)$ нема целобројних нула.

Решење: Нека је $Q(x) = P(x) + 1$. Онда је $Q(a) = Q(b) = Q(c) = 0$, па је $Q(x) = (x-a)(x-b)(x-c)R(x)$ за неко $R(x) \in \mathbf{Z}[x]$. Ако би m била целобројна нула од $P(x)$ онда би важило $(m-a)(m-b)(m-c)R(m) = 1$ из чега следи да је $m-a, m-b, m-c = \pm 1$, односно да су бар два од a, b и c једнака што је котрадикција.

Задатак 156. Нека је $P(x)$ полином са ненегативним коефицијентима такав да важи $P(x)P(\frac{1}{x}) > 1$ за $x = 1$. Доказати да та иста неједнакости онда важи и за свако $x > 0$.

Решење: Нека је $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. За $x = 1$ имамо да је $P(1)^2 > 1$ односно да је $(\sum_{i=0}^{n} a_i)^2 > 1$. За произвољно $x > 0$ важи

$$(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i)(\sum_{i=0}^{n} a_i x^{-i}) \geq (\sum_{i=0}^{n} a_i)^2 > 1,$$

по Коши-Шварцовој неједнакости. Овим је задатак решен.

Задатак 157. Ако су $n, a_1, a_2, .., a_n$ различити цели бројеви доказати да је полином

$$(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n) - 1$$

иредуцибиалн у $\mathbf{Z}[x]$.

Решење: Означимо овај полином са $P(x)$ и претпоставимо супротно тј. да је $P(x) = Q(x)R(x)$ за нека два целобројна полинома $Q(x)$ и $R(x)$ степена бар 1. Онда је $Q(a_i)R(a_i) = -1$ за $i = 1, 2, ..., n$. Како су $P(a_i)$ и Q_{a_i} цели бројеви то мора да важи $P(a_i) + Q(a_i) = 0$. Посматрајмо полином $P(x)+R(x)$. Његов степен је мањи од n, а важи $P(a_i)+Q(a_i) = 0$ за n различитх реалних бројева. Онда је $P(x) + Q(x) = 0$ за свако реално x, односно важи

$$(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n) - 1 = -P(x)^2.$$

Степен уз x^n са леве стране је једнак 1, а са десне стране је негативан. Ово је немогуће јер су та два полинома једнака чиме смо добили контрадикцију. Следи да је тражени полином заиста иредуцибилан.

Задатак 158. Нека је $a_n \geq a_{n-1} \geq ... \geq a_0 > 0$ за $n \geq 2$. Доказати да за све реалне нуле a полинома $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_k x^k$ важи $|a| \leq 1$.

Решење: Како су сви коефицијенти позитивни то за реалну нулу a мора важити $a < 0$. Нека је $a < -1$. Онда је за парно n $P(a) < 0$ због $a_{2k}a^{2k} + a_{2k-1}a^{2k-1} < 0$ и $a_0 > 0$ за $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$. Ако је n непаран број онда је $P(a)»0$ због $a_{2k+1}a^{2k+1} + a_{2k}a^{2k} < 0$ за $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$.

НАПОМЕНА: Тврђење задатка важи и за комплексне нуле a полинома $P(a)$.

Задатак 159. Нека је

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

полином са целобројним коефицијентима степена $n \geq 3$ такав да је $a_k + a_{n-k}$ паран за $1 \leq k \leq n-1$ и a_0 паран број. Ако је $f(x) = g(x)h(x)$ где су $g(x)$ и $h(x)$ полиноми са целобројним коефицијентима и важи $\deg g \leq \deg h$. Ако су сви коефицијенти од $h(x)$ непарни доказати да $f(x)$ има целобројан корен.

Решење: Радићемо у $\mathbf{Z}_2[x]$. Имамо да је $f(x) \equiv_2 g(x)h(x)$. Нека је $\deg g = j$, а $\deg h = k$. Пошто $h(x)$ има све непарне степене то је

$$h(x) \equiv_2 1 + x + ... + x^k.$$

Нека је $g(x) = \sum_{i=0}^{j} b_i x^i$. Коефицијент уз x^{j-1} у $f(x)$ је $b_{j-1} + b_{j-2} + ... + b_0$ због $j \leq k$. Коефицијент уз x^{k+1} у $f(x)$ је $b_1 + b_2 + ... + b_j$. Ако је $j - 1 \geq 1$ имамо да је $a_{j-1} \equiv_2 a_{k+1}$ односно $b_0 \equiv_2 b_j \equiv_2 1$. Како је $0 \equiv_2 f(0) \equiv_2 g(0)h(0) \equiv_2 1$ немогуће је да буде $j \geq 2$. Следи да је $j = 1$, па $f(x)$ има линеаран фактор у $\mathbf{Z}[x]$ из чега следи да има и целобројан корен.

Задатак 160. Наћи све реалне полиноме $P(x)$ такве да важи

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c),$$

за све реалне бројеве a, b и c за које важи $ab + bc + ca = 0$.

Решење: Ако ставимо $a = b = c = 0$ добијамо да је $3P(0) = 2P(0)$, па је $P(0) = 0$. За $a = b = 0$ и произвољно c важи $ab + bc + ca = 0$, па важи $P(c) = P(-c)$ из чега следи да полином $P(x)$ има само парне степене. Нека је $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k}$. За $a = -3x, b = 2x$ и $c = -6x$ и произвољно $x \in \mathbf{R}$ важи $ab + bc + ca = 0$, па важи и

$$P(5x) + P(3x) + P(8x) = 2P(7x),$$

због $P(-8x) = P(8x)$ и $P(-7x) = P(7x)$. Онда за све $a_k \neq 0$ мора да важи $3^{2k} + 5^{2k} + 8^{2k} = 2 \cdot 7^{2k}$. За $k \geq 3$ важи $(\frac{8}{7})^{2k} \geq (\frac{8}{7})^6 = \frac{262144}{117649} > 2$, па је $k < 3$. Следи да полином $P(x)$ мора бити облика $a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4$. Како је збир свака два решења за P такође решење, довољно је проверити да ли су полиноми $1, x^2$ и x^4 решења. Константан полином није решења, а за x^2 имамо да важи

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = 2(a^2+b^2+c^2)$$
$$= 2(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc) = 2(a+b+c)^2,$$

што значи да x^2 јесте решење. За $P(x) = x^4$ нека је $m = a-b$ и $n = b-c$ због краћег записа. Онда је $b = a-m$ и $c = a-m-n$. Због услова $ab+bc+ca = 0$ имамо да важи $3a^2-4am-2an+m^2+mn = 0$. Сада је

$$2(a+b+c)^4 = 2(3a-2m-n)^4 = 2(9a^2+4m^2+n^2-12am-4mn-6an)^2 =$$
$$2(3(3a^2-4am-2an+m^2+mn)+m^2+mn+n^2)^2 = 2(m^2+mn+n^2)^2.$$

Сада је довољно доказати да је $m^4+n^4+(m+n)^4 = 2(m^2+mn+n^2)^2$. То следи из

$$m^4+n^4+(m+n)^4 = 2(m^4+2m^3n+3m^2n^2+2mn^3+n^4) = 2(m^2+mn+n^2)^2,$$

чиме је задатак завршен.

Задатак 161. Доказати да је за $n > 1$ полином $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ иредуцибилан у $\mathbf{Z}[x]$.

Решење: Претпоставимо супротно тј. да је $f(x) = g(x)h(x)$ за неке полиноме $g(x), h(x) \in \mathbf{Z}[x]$ степена бар 1. Нека су нуле од $g(x)$ једнаке $a_1, a_2, ..., a_k$, а нуле од $h(x)$ једнаке $b_1, b_2, ..., b_s$ где је $k+s = n$, а $k, s \in \mathbf{N}$. За $x = 0$ имамо да је $3 = f(0) = (-1)^{k+s}a_1a_2...a_kb_1b_2...b_s$, односно важи $3 = |a_1a_2...a_k| \cdot |b_1b_2...b_s|$. Без умањења општости можемо претпоставити да је $|a_1a_2...a_k| = 1$. Како су a_i (за $1 \le i \le k$) нуле и од $f(x)$ то је $|a_i^{n-1}(a_i+5)| = 3$, па важи

$$|a_1^{n-1}a_2^{n-1}...a_k^{n-1}| \cdot |(a_1+5)(a_2+5)...(a_k+5)| = 3^k.$$

Онда је $|(a_1+5)(a_2+5)...(a_k+5)| = 3^k$. Како је $|g(-5)| = |(a_1+5)(a_2+5)...(a_k+5)| = 3^k$ и $gg(-5)|f(-5) = 3$, то $3^k|3$ одакле следи да је $k = 1$. Добили смо да је полином $g(x)$ линеаран, односно да $f(x)$ има целобројну нулу a_1. Ако је a_1 паран број онда је $f(a_1) \equiv_2 f(3) \equiv_2 3$, што је немогуће због $f(a_1) = 0$. Слично и за непарно a_1 важи $f(a_1) \equiv_2 f(1) \equiv_2 9$ што је исто немогуће. Овим смо добили контрадикцију, па је $f(x)$ заиста иредуцибилан полином.

Задатак 162. Нека је $P(x)$ полином са јцелобројним коефицијентима степена $n > 1$. Означимо са $Q(x) = P(P(...P(x))...)$ где се P појављује k пута ($k \in \mathbf{N}$). Доказати да једначина $Q(t) = t$ има највише n целобројних решења.

Решење: Доказаћемо прво да за свако целобројно решење $Q(t) = t$ важи $P(P(t)) = t$, тј. да можемо претпоставити да је $k \leq 2$. Нека је $x_0 = x$, $x_1 = P(x)$ и $x_{i+1} = P(x_i)$ за $i \in \mathbf{N}$. Имамо да важи

$$x_0 - x_1 | x_1 - x_2 | ... | x_{k-1} - x_k | x_k - x_1.$$

Како је $x_k = x = x_0$, то су све разлике $x_i - x_{i+1}$ за $0 \leq i \leq k$ једнаке по апсолутној вредости. Нека је $d = x_0 - x_1$. Ако је $x_1 - x_2 = -d$ онда је $x_0 = x_2$ односно $P(P(x)) = x$. Међутим ако је $x_1 - x_2 = x_0 - x_1 = d$ настављамо поступак даље. Нека смо добили да је $x_i - x_{i+1} = d$ за све $i \leq m$ и нека је m највећи такав број. Ако је $m > k$, онда је x_i строго монотон низ па се не може десити да је $x_0 = x_k$. Следи да за такво m мора да важи $m \leq k$. Онда је $x_{m+1} - x_{m+2} = -d = -(x_m - x_{m+1})$, тј. важи $x_m = x_{m+2}$. Из овога следи да је $x_{m+s} = x_{m+2+s}$ за свако $s \in \mathbf{N}$, па следи и да је $P(P(x)) = x$ за $s \equiv_k -m$. Овим смо добили да су све фиксне тачке од $Q(x)$ уједно и фиксне тачке од $P(P(x))$.

Довољно је доказати да једначина $P(P(x)) = x$ има највише n целобројних решења. Ако је период свих решења у итерацијама од $P(x)$ једнак 1 онда сва та решења задовољавају $P(x) = x$, па их не може имати више од n. Нека постоји решење a чији је период тачно 2 и нека је c неко друго решење (чији је период 1 или 2). Нека је $b = P(a)$ и $d = P(c)$. Онда је $P(b) = a$ и $P(d) = c$. Имамо да важи $a - c | P(a) - P(c) = b - d | P(b) - P(d) = a - c$, па је $|a - c| = |b - d|$. Слично имамо да важи $a - d | P(a) - P(d) = b - c | P(b) - P(c) = a - d$, па је и $|a - d| = |b - c|$. Уколико је $a + b \neq c + d$ онда мора да важи $a - c = b - d$ и $a - d = b - c$ односно $a - b = c - d = d - c$, тј. $c = d$ из чега следи $a = b$ што је супротно са претпоставком да је период од a тачно 2. Следи да је $a + b = c + d$. Даље следи да за свако целобројно решење x једначина $P(P(x)) = x$ важи $P(x) + x = a + P(a)$ из чега следи да је x решење полиномне једначине n-тог степена, па самим тим једначина $P(P(x)) = x$ не може имати више од n целобројних решења.

19.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 163. Одредити збир коефицијената на парним местима полинома $P(x) = (x^2 - x + 1)^{2010} + (x^2 + x + 1)^{2011}$.

Задатак 164. Нека је $p > 2$ прост број и полином $P(x) = x^p - x + p$. Доказати:

а) Ако је α нула ($\alpha \in \mathbf{C}$) полинома $P(x)$ онда је $|\alpha| < p^{\frac{1}{p-1}}$;
б) $P(x)$ је иредуцибилан у $\mathbf{Z}[x]$.

Задатак 165. Нека је $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$ такав полином да су $P(0)$ и $P(1)$ непарни бројеви. Доказати да $P(x)$ нема целобројне нуле.

Задатак 166. Да ли постоји полином $P(x)$ са целобројним коефицијентима такав да је $P(x) = P(-x)$ за све реалне x и важи $P(1) = 9$ и $P(9) = 41$.

Задатак 167. Нека је

$$a_0 + a_1x + ... + a_{2n}x^{2n} = (x + 2x^2 + ... + nx^n)^2.$$

Доказати да је $\sum_{i=n+1}^{2n} a_i = \frac{n(n+1)(5n^2+5n+2)}{24}$.

Литература

[1] А. Енгел, *Problem Solving Strategies*, Спрингер 1997.

[2] Д. Ђукић, В. Јанковић, И. Матић, Н. Петровић, *The IMO Compendium*, Спрингер 2006.

[3] В. Јовановић, З. Каделбург, П. Младеновић, *Међународне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995. године*, Материјали за младе математичаре - свеска 32, Друштво математичара Србије 1996.

[4] Додатна настава у Математичкој гимназији

[5] Сајт *www.mathlinks.ro*

Предавање 20

Разни задаци из теорије бројева

Душан Милијанчевић, Математичка гимназија

20.1 Задаци за рад

Задатак 168. Наћи све различите природне бројеве x и y такве да је $x^y = y^x$.

Решење: Без умањења општости можемо претпоставити да је $x > y$. Из дате релације следи да x и y имају једнаке просте факторе. Нека је $x = \prod_{i=1}^{s} p_i^{a_i}$, а $y = \prod_{i=1}^{s} p_i^{b_i}$. Онда важи $ya_i = xb_i$ за свако $1 \leq i \leq s$. Како је $x > y$ то је $b_i < a_i$ за $1 \leq i \leq s$ па $y|x$. Нека је $x = yz$ за неки природан број z. Онда важи $(yz)^y = y^{yz}$ односно $z = y^{z-1}$. За $y = 1$ мора да буде $x = 1$, па важи $y \geq 2$. Онда је $z \geq 2^{z-1}$. Како је $2^{z-1} > z$ за $z \geq 3$ то је $z = 1$ или $z = 2$. Због $x \neq y$ мора да буде $z = 2$, па је $y = 2$ и $x = 4$.

Задатак 169. Наћи све природне бројеве x и y такве да је $x^y = y^{x-y}$.

Решење: Из дате релације следи да је $x \geq y$, па је $y^{x-y} = x^y \geq y^y$ па мора да важи $x \geq 2y$. Онда је $(\frac{x}{y})^y = y^{x-2y}$ цео број па $y|x$. Нека је $x = yz$ за неко природно z. Замењујући ову једнакосту у полазну добијамо да је $(yz)^y = y^{y(z-1)}$, односно $yz = y^{z-1}$, тј. $z = y^{z-2}$. За $y = 1$ имамо решење $x = 1$. Иначе за $y \geq 2$ важи $z = y^{z-2} \geq 2^{z-2}$. Како је за $z \geq 5$ $2^{z-2} > z$ то је $z \leq 4$. Из $z = y^{z-2}$ добијамо да су једине могућности $(y, z) \in \{(2, 4), (3, 3)\}$ што даје решења $(x, y) \in \{(8, 2), (9, 3), (1, 1)\}$.

Задатак 170. Нека је x_n низ са својством $x_0 = 1$ и $x_{n+1} = 2x_n + \sqrt{3x_n^2 + 1}$. Доказати да су сви чланови низа цели бројеви.

Решење: Из дате релације имамо да је $(x_{n+1} - 2x_n)^2 = 3x_n^2 + 1$ односно

$$x_{n+1}^2 - 4x_n x_{n+1} + x_n^2 = 1.$$

Померањем индекса за 1 добијамо да важи и

$$x_{n+2}^2 - 4x_{n+1}x_{n+2} + x_{n+1}^2 = 1.$$

Одузимањем претходне две релације имамо да важи

$$x_n^2 - x_{n+2}^2 + 4x_{n+1}(x_{n+2} - x_n) = 0,$$

односно

$$(x_{n+2} - x_n)(4x_{n+1} - x_n - x_{n+2}) = 0.$$

Како је низ x_n растући то је $4x_{n+1} - x_n - x_{n+2} = 0$, односно $x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$, па су сви чланови низа природни бројеви.

Задатак 171. Дат је низ a_n са својством $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ и $a_{n+3} = \frac{1+a_{n+1}a_{n+2}}{a_n}$. Доказати да је низ a_n целобројан.

Решење: Из дате релације имамо да важи

$$a_n a_{n+3} = 1 + a_{n+1}a_{n+2},$$

односно после померања индекса да важи

$$a_{n+1}a_{n+4} = 1 + a_{n+2}a_{n+3}.$$

Одузимањем ове две једнакости добијамо да је

$$a_n a_{n+3} - a_{n+1}a_{n+4} = a_{n+1}a_{n+2} - a_{n+2}a_{n+3}.$$

Трансформацијом ове једнакости добијамо да је

$$a_{n+3}(a_n + a_{n+2}) = a_{n+1}(a_{n+2} + a_{n+4}),$$

односно

$$\frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+2} + a_{n+4}}{a_{n+3}}.$$

Померањем индекса на даље претходни израз је једнак $\frac{a_1+a_3}{a_2} = 2$ и , $\frac{a_2+a_4}{a_3} = 3$ важи да је $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$ или $a_{n+2} = 3a_{n+1} = a_n$, тј. сви чланови низа су цели бројеви, а како су и позитивни то $a_n \in \mathbf{N}$ за $n \in \mathbf{N}$.

Задатак 172. Ако су a, b и $\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{b}}$ природни бројеви доказати да су a и b потпуни квадрати.

Решење: Ако $\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{b}} \in \mathbf{N}$ онда и $a + \frac{1}{b} + 2\sqrt{\frac{a}{b}} \in \mathbf{N}$, па је $\frac{1}{b} + 2\sqrt{\frac{a}{b}} \in \mathbf{Z}$. Ако све помножимо са b добићемо $1 + 2\sqrt{ab} \in \mathbf{Z}$, односно $\sqrt{ab} \in \mathbf{Q}$. Како је корен природног броја или ирационалан или природан број закључхујемо да $\sqrt{ab} \in \mathbf{N}$, односно $ab = m^2$ (за неко приодно m). Замењујући ово у почетну једнакост добијамо да је $\frac{\sqrt{ab}+1}{\sqrt{b}} = \frac{m+1}{\sqrt{b}}$ природан број. Онда b мора бити поптун квадрат (ако b неби био потпун квадрат онда би $\sqrt{b}$ био ирационалан број, па би и цео број $\frac{m+1}{\sqrt{b}}$ био ирационалан). Како је и ab потпун квадрат то је и a поптун квадрат.

Задатак 173. Дат је природан број n. У интервалу (n^2, n^2+n) изабрана су два природна броја a и b. Доказати да у том интервалу нема целобројних делиоца од броја ab различитих од a и b.

Решење: Претпоставимо супротно тј. да постоји делилац d броја ab из интервала (n^2, n^2+n). Онда $d \mid |(d-a)(d-b)|$, а како d, a и b припдају интервалу (n^2, n^2+n) то је $|(d-a)(d-b)| < n^2$. Како $d \mid |(d-a)(d-b)|$ то је $d \leq |(d-a)(d-b)|$, па је $d < n^2$. Ово је контрадикција јер је $d > n^2$ (пошто припада интервалу (n^2, n^2+n)). Значи почетна претпоставка је нетачна, па не постоји делилац d броја ab који припада интервалу (n^2, n^2+n).

Задатак 174. Ако је p прост број доказати да је

$$\sum_{k=1}^{p-1}[\frac{k^3}{p}] = \frac{(p+1)(p-1)(p-2)}{4}.$$

Решење: Приметимо следеће:

$$\sum_{k=1}^{p-1}[\frac{k^3}{p}] = \sum_{k=1}^{p-1}\frac{k^3}{p} - \{\frac{k^3}{p}\}.$$

Како је

$$\{\frac{k^3}{p}\} = \frac{k^3 \bmod p}{p},$$

то је

$$\sum_{k=1}^{p-1}[\frac{k^3}{p}] = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}k^3 - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p-1}k^3 \bmod p.$$

Како је $\sum_{k=1}^{p-1}k^3 = \frac{p^2(p-1)^2}{4}$ и $\sum_{k=1}^{p-1}k^3 \bmod p = \frac{p(p-1)}{2}$, то је

$$\sum_{k=1}^{p-1}[\frac{k^3}{p}] = \frac{p(p-1)^2}{4} - \frac{p-1}{2} = \frac{(p+1)(p-1)(p-2)}{4},$$

што је и требало доказати.

Задатак 175. Доказати да је број $5^{100}+5^{75}+5^{50}+5^{25}+1$ сложен.

Решење: Стављањем $x = 5^{25}$ добијамо да је

$$x^4+x^3+x^2+x+1 = (x^2+3x+1)^2 - 5x(x+1)^2.$$

Како је $5x = 5^{26}$ потпун квадрат, то се горњи резулатат може факторисата као разлика квадрата, где су оба чиниоца већа од 1, па је дати број сложен.

Задатак 176. Нека је S_k збир првих k простих бројева. Доказати да се за свако природно k између S_k и S_{k+1} налази бар један потпун квадрат.

Решење: Непосредно се проверава тврђење важи за $k = 1, 2, 3$. Доказахимо сада индукцијом по k, $k \geq 4$ да важи неједнакост $\sqrt{S_{k+1}} - \sqrt{S_k} > 1$.

база индукције За $k = 4$ имамо $\sqrt{28} - \sqrt{17} > 1$, што је тачно.

индукцијска претпоставка Нека је $\sqrt{S_{k+1}} - \sqrt{S_k} > 1$ за $k \geq 4$.

индукцијски корак Нека је p_n $n-$ти прост број. Онда је $\sqrt{S_k + p_{k+1}} > \sqrt{S_k} + 1$, односно $S_k + p_{k+1} > S_k + 1 + 2\sqrt{S_k}$ што се своди на $p_{k+1} > 1 + 2\sqrt{S_k}$, односно $(p_{k+1} - 1)^2 > 4\sqrt{S_k}$. Очигледно је $p_{k+2} - p_{k+1} \geq 2$ и $p_{k+2} + p_{k+1} - 2 \geq 2p_{k+1}$, па је

$$(p_{k+2} - p_{k+1})(p_{k+2} + p_{k+1} - 2) \geq 4p_{k+1},$$

односно

$$(p_{k+2} - 1)^2 \geq 4p_{k+1} + (p_{k+1} - 1)^2, \text{ а}$$

како је $(p_{k+1} - 1)^2 > 4S_k$ и $S_{k+1} = p_{k+1} + S_k$, то је

$$(p_{k+2} - 1)^2 > 4S_{k+1}.$$

Сада пошто је $S_{k+2} - S_{k+1} = p_{k+2}$ то је

$$S_{k+2} - S_{k+1} - 1 > 2\sqrt{S_{k+1}},$$

односно

$$S_{k+2} > (\sqrt{S_k + 1} + 1)^2,$$

што се своди на

$$\sqrt{S_{k+2}} - \sqrt{S_{k+1}} > 1.$$

Овим је доказана неједнакост $\sqrt{S_{k+2}} - \sqrt{S_{k+1}} > 1$ за свако $k \geq 4$. Сада претпоставимо супротно тј. да се између неких S_k и S_{k+1} не налази потпун квадрат. Онда је $S_{k+1} \leq ([\sqrt{S_k}] + 1)^2$ ($([\sqrt{S_k}] + 1)^2$ је најмањи квадрат већи од S_k), односно $\sqrt{S_{k+1}} - \sqrt{S_k} \leq 1$, што је немогуће по доказаној неједнакости. Контрадикција!! Значи између S_k и S_{k+1} се увек налази потпун квадрат.

Задатак 177. Наћи све парове природних бројева a и b таквих да је $b^2 + a$ степен простог броја и $b^2 + a$ дели $a^2 + b$.

Решење: Из услова дељивости добијамо да је $a \geq b$. Како $b^2 + a \mid b^2 + a, a^2 + b$ имамо да је $b^2 \equiv_{b^2+a} -a$ и $a^2 \equiv_{b^2+a} -b$. Квадрирањем преве и заменом у другу конгруенцију добијамо да је $b^4 \equiv_{b^2+a} -b$, односно $b^2 + a \mid b^4 + b = b(b^3 + 1)$. Нека је $b^2 + a = p^m$, ,где је p прост број. Како је $(b, b^3 + 1) = 1$ и $b^2 + a$ степен простог броја то $b^2 + a \mid b$ или $b^2 + a \mid b^3 + 1$. Први случај отпада јер је $b^2 + a > b$. Значи $b^2 + a \mid (b + 1)(b^2 - b + 1)$. Како су и $b + 1$ и $b^2 - b + 1$ мањи од $b^2 + a$ то неки степени простог броја p деле $b + 1$, а неки деле $b^2 - b + 1$ (из овога следи да је $b^2 - b + 1 > 1$, односно $b > 1$). Значи $p \mid (b + 1, b^2 - b + 1) = d$. Како је $d = (b(b + 1), b^2 - b + 1) = (b^2 + b, 2b - 1)$. Добили смо да $d \mid 2b - 1$ и $d \mid b + 1$, односно $d \mid 2b + 2$. Користећи да $d \mid 2b - 1$ и $d \mid 2b + 2$ добијамо да је $d = 3$ (не може бити $d = 1$ јер је d неки степен броја p). Значи $p = 3$. Није тешко проверити да 9 никад не дели $b^2 - b + 1$, што значи да $3^{m-1} \mid b + 1$. Из претходног закључујемо да је $b \geq 3^{m-1} - 1$, а како је $b^2 + a = 3^m$ добијамо да је $3^m > b^2 \geq 3^{2m-2} - 2 \cdot 3^{m-1} + 1$, односно $3^m + 2 \cdot 3^{m-1} = 5 \cdot 3^{m-1} > 3^{2m-2} \geq 9 \cdot 3^{2m-4} > 53^{2m-4}$. Онда важи да је $3^{m-1} > 3^{2m-4}$, односно $m - 1 > 2m - 4$ из чега се добија да је $m \leq 2$. Како степен неки степен простог броја p дели $b + 1$, а неки $b^2 - b + 1$ то је $m \geq 2$. Добијамо да је $m = 2$. Решавањем једначине $9 = b^2 + a$ и користећи то да је $b > 1$ добијамо решење $a = 5$ и $b = 2$. Како $9 \mid 27$ (услов дељивости), закључујемо да је ово заиста решење и то јединствено.

20.2 Задаци за домаћи рад

Задатак 178. Доказати да низ $[2^{k+\frac{1}{2}}]$ за $k \in \mathbf{N}$ садржи бесконачно много парних бројева.

Задатак 179. Ако са $S(n)$ означимо збир цифара природног броја n израчунати $S(S(S(4444^{4444})))$.

Задатак 180. Ако су a и b различити природни бројеви, већи од 1, такви да је $b^2 + a - 1$ дели $a^2 + b - 1$, доказати да број $b^2 + a - 1$ има бар два различита проста фактора.

Задатак 181. Наћи све природне бројеве x и y за које важи $x^{y^2} = y^x$.

Задатак 182. Нека је x_n низ природних бројева такав да је $x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^2 + c}{x_n}$ за неки природан број c. Ако су x_1, x_2 и $\frac{x_1^2 + x_2^2 + c}{x_1 x_2}$ природни бројеве доказати је x_n природан број за свако природно n.

Литература

[1] М. Радовановић, *Низови и рекурентне једначине*, Додатна настава у Математичкој гимназији

[2] *www.mathlinks.ro*

Предавање 21

Три теореме елементарне теорије бројева

Душан Милијанчевић, Математичка гимназија

21.1 Теоријски увод

Теорема 54. (Мала Фермаова теорема) Нека је p прост број који не дели a. Онда је $a^{p-1} \equiv_p 1$.

Теорема 55. (Ојлерова теорема) Нека је m број који је узајамно прост са a. Онда је $a^{\varphi(m)} \equiv_m 1$.

Теорема 56. (Вилсонова теорема) Природан број p је прост ако и само ако важи $(p-1)! \equiv_p -1$.

21.2 Задаци за рад

Задатак 183. Доказати малу Фермаову теорему.

Решење: Нека је $\{a_1, a_2, ..., a_{p-1}\}$ редукован систем остатака по модулу p. Онда је због $(a,p) = 1$ и $\{aa_1, aa_2, ..., aa_{p-1}\}$ редукован систем остатака, па важи $a^{p-1}a_1a_2...a_{p-1} \equiv_p a_1a_2...a_{p-1}$. Из овога следи да је $a^{p-1} \equiv_p 1$, што је и требало доказати.

Задатак 184. Доказати Вилсонову теорему.

Решење: Нека је p прост број. За сваки $a \in \{2, 3, ..., p-2\}$ постоји јединствен $b \in \{2, 3, ..., p-2\}$ такав да је $b \neq a$ и $ab \equiv_p 1$. Самим тим је $(p-1)! \equiv_p 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 \cdot -1 \equiv_p -1$. Претпоставимо сада да за p важи дата релација. Нека је d произвољан делилац од p који је мањи од њега. Онда $d|(p-1)!$, па $d|-1$ из чега следи да је $d = 1$. Самим тим p мора бити прост број.

Задатак 185. Доказати да за све природне бројеве a и n важи $n|\varphi(a^n - 1)$.

Имамо да важи $a^n-1|a^n-1$ и $a^n-1|a^{\varphi(a^n-1)}-1$, па $a^n-1|a^{(n,\varphi(a^n-1))}-1$. Како је $n \leq (n, \varphi(a^n-1)) \leq n$, то је $n = (n, \varphi(a^n-1))$ па важи $n|\varphi(a^n-1)$.

Задатак 186. Доказати да је тачно један од бројева A и B дељив са p (p је непаран прсот број) ако је

$$A = a^{1+2+\ldots+p-1} - 1 \text{ и } B = a^{1+2+\ldots+p-1} + 1,$$

где је a неки цео број узајамно прост са p.

Решење: На почетку покажимо следеће. Ако је a цео број узајамно прост са p (p је непаран прсот број) онда је $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 (mod\ p)$. Очигледно је $(a^{\frac{p-1}{2}})^2 \equiv 1(mod\ p)$, па имамо да $p|(a^{\frac{p-1}{2}}+1)(a^{\frac{p-1}{2}}-1)$, па је или први фактор дељив са p или други фактор. Имамо да је $A = (a^{\frac{p-1}{2}})^p - 1$ и $B = (a^{\frac{p-1}{2}})^p + 1$. Разликујемо два случаја:

1° $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1(mod\ p)$. Онда је $A \equiv 0(mod\ p)$.

2° $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1(mod\ p)$. Онда је $B \equiv 0(mod\ p)$,

чиме смо завршили задатак.

Задатак 187. Доказати да за различите просте бројеве p и q важи $pq|p^{q-1} + q^{p-1} - 1$.

Решење: Ако је $p = q$ треба доказати да $p^2|2p^{p-1}$. Ту имамо два случаја ако је $p = 2$ и $p \geq 3$. За $p = 2$ имамо $4|2 \cdot 2$ што је тачно, а за $p \geq 3$ $p^2|p^{p-1}|2p^{p-1}$. Нека је сада $p \neq q$. Онда су p и q узајамно прости па је $p^{q-1}+q^{p-1} \equiv p^{q-1} \equiv 1(mod\ q)$, па $q|p^{q-1}+q^{p-1}-1$. Слично добијамо и да $p|p^{q-1} + q^{p-1} - 1$, па $pq|p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ јер су p и q узајмно прости.

Задатак 188. Доказати да за сваки природан број n важи $2730|n^{13} - n$.

Решење: Како је $2730 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ довољно је доказати да сваки од ових простих бројева дели $n^{13} - n$. Нека $p \in \{2, 3, 5, 7, 13\}$. Ако је $(p, n) = 1$ онда $p|n^{p-1} - 1$. Како $p - 1 \in \{1, 2, 4, 6, 12\}$ то $n^{12} \equiv_p n^{p-1}$, па имамо да за $(n, p) = 1$ важи $p|n^{12} - 1$, односно $p|n^{13} - n$. У другом случају $p|n$ ва важи $p|n^{13} - n$. Из овога следи да заиста $2730|n^{13} - n$.

Задатак 189. Низ a_n дефинисан је са $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$, за $n \geq 1$. Одредити све природне бројеве који су узајамно прости са свим члановима низа.

Решење: Очигледно је један такав број 1. Доказаћемо да је и једини тако што ћемо показати да за сваки прост број p постоји $i \in \mathbf{N}$ такво да $p|a_i$. За $p = 2$ имамо $a_1 = 10$, а за $p = 3$ имамо $a_2 = 48$. Нека је сада $p \geq 7$. Онда је $6a_{p-2} = 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6$, а како су $2, 3, 6$ узајамно прости са p ($p \geq 7$) то је $2^{p-1} \equiv 3^{p-1} \equiv 6^{p-1} \equiv 1 (mod\ p)$, па је $6a_{p-2} \equiv 3 + 2 + 1 - 6 \equiv 0 (mod\ p)$. Значи $p | 6a_{p-2}$,а пошто је $(6, p) = 1$ то добијамо $p | a_{p-2}$, чиме смо завршили задатак.

Задатак 190. Ако је p непаран прост број и a и b узајамно прости бројеви такви да $p | a^2 + b^2$ онда је $p \equiv_4 1$.

Решење: Претпоставимо супротно тј. да је $p = 4k+3$, за неко $k \in \mathbf{N}_0$. Из $a^2 + b^2 \equiv_p 0$ имамо да је $a^2 \equiv_p -b^2$, па је $a^{p-1} \equiv_p (-1)^{2k+1} b^{p-1}$ (после степеновања са $\frac{p-1}{2} = 2k + 1$). Ако p дели један од a и b, онда дели и други па a и b не могу бити узајамно прости. Значи a и b су узајамно прости са p. Онда је $a^{p-1} \equiv_p 1 \equiv_p -1 \equiv_p -b^{p-1}$, чиме смо добили контрадикцију због $p \neq 2$. Следи да је заиста $p \equiv_4 1$

Задатак 191. Доказати да број $7p + 3^p - 4$ није потпун квадрат ако је p прост.

Решење: Означимо дати број са N. Ако је $p = 2$ онда је $N = 19$, што очигледно није потпун квадрат. Нека је сада $p \geq 3$. Претпоставимо супротно тј. да је N потпун квадрат ($N = n^2$). Онда је $N \equiv_p 3^p - 4 \equiv_p -1$, па $p | n^2 + 1^2$, а како су n и 1 узајамно прости то је $p \equiv_4 1$. Међутим онда је $N \equiv_4 7 + (-1)^p - 4 \equiv_4 2$, што је немогуће јер квадрат целог броја не може да даје остатак 2 по модулу 4.

21.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 192. Доказати да $7 | 5^{999999} + 1$.

Задатак 193. Доказати Ојлерову теорему.

Задатак 194. Нека су a и b природни бројеви, а p прост број. Доказати да $6 | ab^p - a^p b$.

Задатак 195. Нека је a природан број, а p и q различити прости бројеви. Доказати да $pq | a^{(p-1)(q-1)} - 1$.

Задатак 196. Ако је p прост број и k произвољан природан број доказати да
$$1^k + 2^k + ... + (p-1)^k$$
има остатак -1 при дељењу са p ако $p - 1 | k$, а иначе је дељив са p.

Литература

[1] Д. Милијанчевић, *Аритметичке функције*, Летњи математички камп - Шабац 2010.

[2] *www.mathlinks.ro*

[3] Д. Милијанчевић *Мала Фермаова теорема*

Предавање 22

Елементарна геометрија 1

Ерна Оклапи, Електротехнички факултет

22.1 Теоријски увод

Аксиом 1. За сваке две разне тачке постоји тачно једна права која их садржи.

Аксиом 2. За сваке три тачке постоји бар једна раван која их садржи.

Аксиом 3. Ако две разне тачке неке праве припадају некој равни, тада и све тачке те праве припадају тој равни.

Аксиом 4. Ако су две равни инцидентне са неком тачком, тада су оне инцидентне са бар још једном тачком.

Аксиом 5. Постоје четири некомпланарне тачке.

Теорема 57. Ако тачка A не припада правој p тада постоји јединствена раван која садржи тачку A и праву p.

Теорема 58. Ако две разне равни имају заједничку тачку тада је њихов пресек права.

Доказ: Према аксиомама 1,3 и 4 ово тврђење важи.

Теорема 59. Ако права која је у равни троугла ABC не садржи ни једно од његових темена и сече једну његову ивицу, тада та права сече тачно још једну његову ивицу.

Аксиом 6. *(Плејферова аксиома паралелности)* Ако тачка A не припада правој p, тада у равни њима одређеној постоји тачно једна права која садржи тачку A и дисјунктна је са правом p.

Аксиом 7. *(Аксиома паралелности Лобачевског)* Ако тачка A не припада правој p, тада у равни њима одређеној постоје бар две праве које садрже тачку A и дисјунктне су са правом p.

Теорема 60. Релација паралелности правих је релација еквиваленције.

Теорема 61. Релација паралелности равни је релација еквиваленције.

Аксиом 8. Ако су A, B и A_1 дате тачке такве да је A_1 почетна тачка неке полуправе a_1 тада на полуправој A_1a_1 постоји тачно једна тачка B_1, таква да је $\{A_1, B_1\} \cong \{A, B\}$

Аксиом 9. Нека су A, B, C и A_1, B_1, C_1 тачке такве да $A - B - C$ и $A_1 - B_1 - C_1$. Тада ако је $\{A_1, B_1\} \cong \{A, B\}$ и $\{B_1, C_1\} \cong \{B, C\}$, онда је и $\{A_1, C_1\} \cong \{A, C\}$.

Аксиом 10. Ако су A, B, C три неколинеарне тачке и A_1, B_1 тачке ивице a_1 полуравни $a_1\alpha_1$ такве да је $\{A_1, B_1\} \cong \{A, B\}$ тада у отвореној полуравни α_1 постоји тачно једна тачка C_1, таква да је $\{B_1, C_1\} \cong \{B, C\}$, и $\{A_1, C_1\} \cong \{A, C\}$.

Теорема 62. Ако су Opq и $O_1p_1q_1$ два конвексна угла, таква да је $Op \parallel O_1p_1$ и $Oq \parallel O_1q_1$, тада су ова два угла једнака ако су оба оштра или оба тупа. Ако је један од тих углова оштар, а други туп, онда су они суплементни.

Теорема 63. Страница a троугла ABC већа је од странице b ако и само ако је насрамни угао α већи од угла β.

22.2 Задаци за рад

Задатак 197. Нека је тачка A ван правих p и q. Ако постоје две разне праве које садрже тачку A и секу праве p и q, тада су p и q компланарне праве. Доказати.

Решење: Нека поменуте праве секу праву p у тачкама B и C, а праву q у тачкама D и E. Праве BE и CD се секу.За сваке две праве које се секу постоји јединствена раван која их садржи.

Задатак 198. Ако су α и β равни и p права, при чему $p \parallel \alpha$ и $\alpha \parallel \beta$ доказати да је $p \parallel \beta$

Решење: Нека је $\alpha \neq \beta$. Због $p \parallel \alpha$, постоји права r која припада равни α, $p \parallel r$. Тада је и $r \parallel \beta$ и на крају $p \parallel \beta$.

Задатак 199. У скупу од 12 тачака постоји тачно 6 четворки компланарних тачака и не постоји 5 тачака које су компланарне. Колико равни одређују ових 12 тачака?

Решење: Никоје 3 од 12 датих тачака нису колинеарне. (Ако би неке тачке биле колинеарне, онда би свака од 9 преосталих тацхака била са њима компланарна, па би било бар 9 компланарних четворки.) Четири компланарне тачке одређују једну раван, а четири некомпланарне тачке одређују 4 равни. Према томе, тражени број је $\frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} - 6\cdot 3 = 202$

Задатак 200. Дате су тачке A, B, C, D, S, тако да су било које четири од њих некомпланарне. Нека права AB продире раван SCD у тачки M, права BC продире раван SAD у тачки N, права CD продире раван SAB у тачки P и права DA продире раван SBC у тачки Q. Доказати да су тачке M, N, P, Q компланарне.

Решење: Нека се равни SAB и SCD секу по правој p. Правој p припадају тачке S, M и P. Нека се, даље, равни SBC и SAD секу по правој q. Правој q припадају тачке S, N и Q. Праве p и q се секу (имају заједничку тачку S), па одређују једну раван која садржи M, N, P и Q.

Задатак 201. Ако су a и b две мимоилазне праве, тада постоје две паралелне равни α и β, тако да $a \subset \alpha$ и $b \subset \beta$. Доказати.

Решење: Раван α одређена је правом a и неком правом b_1 која сече праву a и паралелна је правој b. Слично се одређује раван β.

Задатак 202. Нека је дат коначан скуп P дужи праве p са својством да сваке две имају непразан пресек. Доказати да постоји тачка праве p која припада свим дужима скупа P.

Решење: Без смањења општости можемо претпоставити да се дужи скупа P налазе на бројној правој. Нека су $a_1, a_2, ..., a_n$ леви крајеви дужи из скупа P и нека је $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$, а $b_1, b_2, ..., b_n$ десни крајеви дужи из скупа P и $b_n \leq b_{n-1} \leq ... \leq b_1$. Тада важи $a_n \leq b_n$. (Ако би било $a_n > b_n$, онда дуж са левим крајем a_n и дуж са десним крајем b_n немају заједничких тачака што је контрадикција.) Тачка a_n је заједничка тачка свих дужи скупа P. Заиста ако је $[a_j, b_j]$ дуж из скупа P тада важи $a_i \leq a_n \leq b_n \leq b_j$.

Задатак 203. Троугао ABC има углове $\beta = 15^o$ и $\gamma = 30^o$. Права која садржи тачку A и нормална је на AB сече дуж BC у тачки D. Доказати да је $2AC = BD$.

Решење:

I начин: Конструишимо дуж AE тако да је $\angle AED = 30^o$. Израчунавањем унутрашњих углова закључујемо да су троуглови ACE, ADE, ABE једнакокраки и анализом једнаких страница долазимо до закључка да је $2AC = BD$.

II начин:

Нека је на страници CB тачка E таква да је троугао $\angle AED$ прав угао. Троуглови ADE и AEB су слични и важи:

$$\tan 15^o = \frac{p}{b/2}$$

$$\tan 15^o = \frac{b/2}{q}$$

где је $p = DE$, $b = AC$ и $q = EB$. Како је $BD = p + q$ можемо написати и да је $BD = \frac{b}{2}(\tan 15^o + \frac{1}{\tan 15^o})$. Дакле треба доказати да је $\tan 15^o + \frac{1}{\tan 15^o} = 4$. Применом тригонометријских трансформација добијамо

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{sin\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}$$

α је угао од 30^o и заменом вредности добијамо да је $\tan 15^o = 2-\sqrt{3}$. На крају се добија да је $\tan 15^o + \frac{1}{\tan 15^o} = 4$ што је и требало доказати.

Задатак 204. На симетрали спољашњег угла код темена C троугла ABC изабрана је произвољна тачка M. Доказати да је $MA + MB > AC + BC$

Решење: На правој AC изаберимо тачку D, такву да је $A-C-D$ и $CD = CB$. Очигледно је симетрала CM угла BCD уједно и симетрала дужи BD, па је $MD = MB$. У троуглу ADM важи $AM + MD > AD = AC + CD$, а одавде је $MA + MB > AC + BC$.

Задатак 205. Доказати да у сваком троуглу већој страници одговара мања тежишна линија, а мањој страници веца тежишна линија.

Решење: Нека су у троуглу ABC тежишне линије AA_1, BB_1, CC_1, тежиште T и нека је $AC < BC$. Треба доказати да је $BB_1 > AA_1$. У троугловима AC_1C и BC_1C којима страница CC_1 заједничка, странице AC_1 и C_1B су једнаке и $BC > AC$. Закључујемо да је $\angle AC_1C < \angle BC_1C$. У троугловима AC_1T и BC_1T је $\angle AC_1T < \angle BCT$, па ће за странице напрам тих углова важити $AT < BT$. Пошто је $AT = \frac{2}{3}AA_1$ и $BT = \frac{2}{3}BB_1$, биће $AA_1 < BB_1$ што је и требало доказати.

Задатак 206. Нека су тачке K, L, M средишта страница BC, AC и AB троугла ABC, а P, Q и R средишта изломљених линија BAC, ACB и CBA.Доказати да се праве KP, LR и MQ секу у једној тачки.

Решење: Нека је $BC \geq AB \geq CA$. Из $PB = \frac{AB+AC}{2} = \frac{AC}{2} + MB$. Следи да је $PM = \frac{AC}{2}$. Сем тога је и $MK = \frac{AC}{2}$, па је $PM = MK$, због чега је $\angle PKM = \angle MPK = \varphi$. Како је $\angle MPK = \angle LKP = \varphi$ (углови са паралелним крацима), биће $\angle LKP = \angle MKP$. Следи да је KP симетрала угла LKM. Слично се доказује да су MQ и LR симетрале углова LMK и KLM троугла MLK, из чега следи да се све те праве секу у једној тачки.

22.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 207. Три различите праве a, b, c равни α имају заједничку тачку N. Права n садржи тачку N и са правим a, b, c одређује једнаке углове. Доказати да је права n нормална на раван α.

Задатак 208. У скупу од n тачака има тачно k тројки колинеарних тачака. Колико различитих правих одређују тачке овог скупа?

Задатак 209. Да ли постоји затворена изломљена линија која сече сваку своју дуж тачно једанпут, а састоји се од седам дужи?

Задатак 210. У једнакокраком троуглу ABC угао при врху C је 108^o.На краку BC дата је тачка E, таква да права AE полови угао BAC. Ако је дуж CD висина овог троугла, доказати да је $AE = 2CD$

Задатак 211. Из једног темена оштроуглог троугла конструисана је висина, из другог симетрала угла, из трећег тежишна дуж. Њихове пресечне тачке су темена новог троугла. Доказати да тај троугао не може бити једнакостраничан.

Литература

[1] В. Стојановић, *Математископ 3*, Математископ, 2004.

[2] М. Митровић, С. Огњановић, М. Вељковић, Љ. Петковић, Н. Лазаревић *Геометрија за први разред Математичке гимназије*, Круг, 2003.

[3] П. Миличић, В. Цтојановић, З. Каделбург, Б.Боричић *Математика за први разред средње школе*, Завод за уџбенике и наставна средства 2004.

Предавање 23

Стереометрија

Ерна Оклапи, Електротехнички факултет, Београд

23.1 Теоријски увод

Стереометрија је део елементарне геометрије која проучава својства фигура смештених у простору. По начину образовања геометријских тела, стереометрија се дели на стереометрију полиедара и стереометрију обртних тела.

Дефиниција 23. Унија свих права које пролазе кроз неку тачку дате равне изломљене линије $A_1A_2...A_n$, а паралелне су датој прави l која сече раван изломљене линије, назива се **призматична површ**.

Дефиниција 24. Призма је геометријско тело ограничено призматичном површи и двема паралелним пресечним равнима те површи.

Дефиниција 25. Нека је B тачка која не припада равни многоугла $A_1A_2...A_n$. Унија свих полуправа са заједничним почетком B које секу затворену изломљену линију $A_1A_2...A_n$, назива се **n-тострана рогљаста површ**.

Дефиниција 26. Пирамида је геометријско тело ограничено рогљастом површи и једном равни која не садржи њен врх, а сече све њене изводнице.

Дефиниција 27. Полиедар је правилан ако су све његове стране правилни многоуглови са истим бројем страница и ако се у сваком темену састаје исти број ивица.

Правилни полиедри (Платонова тела):

- **Тетраедар** - састоји се од 4 једнакостранична троугла.

- **Хексаедар или коцка** - састоји се од 6 квадрата.
- **Октаедар** - састоји се од 8 једнакостраничних троуглова.
- **Додекаедар** - састоји се од 12 петоуглова
- **Икосаедар** - састоји се од 10 једнакостраничних троуглова.

Површина и запремина одговарајућег тела се одређује уз помоћ следећих формула:

Површина призме: $P = 2B + M$
Површина пирамиде: $P = B + M$
Површина зарубљене пирамиде: $P = M + B + B_1$

Запремина призме: $V = B \cdot H$
Запремина пирамиде: $V = \frac{1}{3}BH$
Запремина зарубљене пирамиде: $V = \frac{H}{3}(B + \sqrt{BB_1} + B_1)$

Дефиниција 28. Површ која се добија обртањем линије l око утврђене дужи AB за пун угао назива се **обртна површ**.

Дефиниција 29. Обртна површ добијена обртањем праве која је паралелна оси, назива се **права цилиндрична површ**.

Дефиниција 30. Обртна површ добијена обртањем праве која сече осу, а није нормална на њу, назива се **права конусна површ**

Дефиниција 31. Обртна површ добијена обртањем полукружнице око праве која садржи њен пречник, назива се **сфера**.

Аналогно полиедрима, површина и запремина обртних тела се одређује на следећи начин:

Површина ваљка: $P = 2B + M = 2r\pi(r + H)$
Површина праве купе: $P = B + M = r\pi(r + s)$
Површина зарубљене праве купе: $P = M + B + B_1 = \pi(R^2 + r^2 + (R + r)s)$

Запремина ваљка: $V = B \cdot H = r^2\pi H$
Запремина купе: $V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}r^2\pi H$
Запремина зарубљене купе: $V = \frac{H}{3}(B + \sqrt{BB_1} + B_1) = \frac{1}{3}H\pi(R^2 + Rr + r^2)$

Дефиниција 32. Тело ограничено сфером назива се лопта.

Површина сфере полупречника r: $P = 4r^2\pi$

Запремина лопте полупречника r: $V = \frac{4}{3}r^3\pi$
Запремина лоптиног одсечка: $V = \frac{\pi H^2}{3}(3r - H)$

23.2 Задаци за рад

Задатак 212. Основа пирамиде је тангентни полигон са n страница описан око круга полупречника r. Обим полигона је $2p$, а бочне стране пирамиде нагнуте су према равни основе под углом φ. Одредити запремину пирамиде.

Задатак 213. Правилна четворострана призма основне ивице a и висине h пресечена је са равни која пролази кроз ивицу горње базе и са њом затвара угао од 30^o . Израчунати површину и запремину доњег дела призме.

Задатак 214. Око основе ваљка описан је једнакокраки трапез поврсхине $50cm^2$, са оштрим углом од 30^o. Израчунати површину и запремину ваљка ако је његова висина једнака краку трапеза.

Задатак 215. Трапез ротира једном око веће, а затим око мање основице. Запремине добијених обртних тела се односе као 3:4. Одредити размеру основица трапеза.

Задатак 216. Обим правоуглог троугла је једнак $2p$, а хипотенуза c. Израчунати запремину ваљка чија је основа круг уписан у троуглу, а његова висина једнака је хипотенузи.

Задатак 217. Ромб чије су дијагонале $3dm$ и $4dm$ ротира око висине која садржи средиште ромба. Израчунати запремину добијеног тела.

Задатак 218. Висина купе чија је запремина V подељена је на три једнака дела. Кроз деоне тачке постављене су равни паралелне са равни основе. Одредити запремину средњег дела купе.

Задатак 219. Око дате лопте је описана права зарубљена купа. Доказати да је површина лопте мања од омотача купе.

Задатак 220. Око лопте описана је правилна тространа призма, а око ње је описана лопта. Одредити однос површина лопти.

Задатак 221. Свака од четири кугле које леже на равном столу (и додирују сто) додирују остале три кугле. Три кугле имају полупречник R. Одредити полупречник четврте кугле.

23.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 222. Дата је коцка $ABCDA'B'C'D'$. На бочним странама $ADD'A'$ и $BCC'B'$ одредити редом тачке M и N, такве да је дужина изломљене линије $AMNC'$ минимална.

Задатак 223. Колику површину види пилот са висине h изнад Земље?

Задатак 224. У простору су дате тачке A, B, C и D. Ако је $\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = 90^\circ$ доказати да су A, B, C и D компланарне.

Задатак 225. Странице троугла ABC су a, b, c. Наћи полупречнике сфера које додирују раван троугла ABC у тачкама A, B, C и које се додирују међусобно.

Задатак 226. Доказати да за сваке 4 некомпланарне тачке постоји јединствена тачка која је једнако удаљена од њих.

Предавање 24

Теорија графова

Никола Мркшић, Математичка гимназија

24.1 Теоријски увод

Дефиниција 33. Прост граф(неусмерен, нетежински, без циклуса) може се дефинисати као уређена тројка $G = (V, E, I)$, где су V и E дисјунктни, коначни скупови а I релација односа таква да је сваки елемент E у односу са тачно два различита елемента V, а никоја два елемента E нису у односу са истим паром из V. Ова ограничења могу се варирати да би се добиле друге врсте графова(бесконачни, усмерени, оријентисани, итд). Скуп V називамо чворовима, а E ивицама графа.

Дефиниција 34. Степен чвора v је број ивица које полазе из датог чвора. Уколико је у питању усмерен граф, можемо разликовати улазни степен(број ивица које се завршавају у датом чвору), и излазни(број ивица које "извиру"из датог чвора). Два чвора су суседна ако садрже заједницку ивицу. Степен чвора једнак је броју суседа датог чвора.

Дефиниција 35. Степен чвора v је број ивица које полазе из датог чвора. Уколико је у питању усмерен граф, можемо разликовати улазни степен(број ивица које се завршавају у датом чвору), и излазни(број ивица које "извиру"из датог чвора). Два чвора су суседна ако садрже заједницку ивицу. Степен чвора једнак је броју суседа датог чвора. Комплетан граф је онај граф у коме између свака два чвора постоји ивица.

Дефиниција 36. Повезан граф је онај граф у коме постоји пут од сваког чвора до било ког другог чвора. Уколико граф није повезан, он се може поделити у коначно много повезаних компоненти, где је свака компонента подграф оригиналног графа, и сама за себе представља повезан граф.

Дефиниција 37. Пут у графу је секвенца наизменичних чворова и ивица, таква да се између свака два чвора налази ивица која их спаја. Пут који има исти почетни и крајњи чвор назива се циклус. Повезан граф који не садржи циклусе назива се дрво(стабло). Уколико није повезан, назива се шума. Ојлеров пут(или циклус), је онај пут(циклус) чијим би проласком обишли сваку ивицу графа тачно једном. Хамилтонов пут(циклус) је онај чијим би проласком обишли сваки чвор графа тачно један пут.

Теорема 64. Неусмерен граф има Ојлеров циклус ако и само ако су му сви степени чворова парни. У супротном, ако тачно два чвора имају непаран степен, граф садржи Ојлеров пут. Уколико је граф неусмерен, да би садржао Ојлеров циклус сви његови чворови морају имати једнак улазни и излазни степен. Додатно, ако је код тачно једног чвора излазни степен за један већи од улазног, и ако је код тачно једног улазни степен за један већи од излазног, дати граф садржи Ојлеров пут.

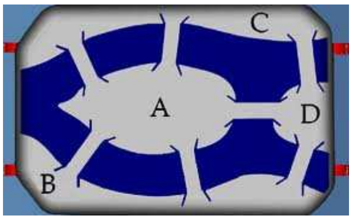
Дефиниција 38. Тежински граф је граф у коме је свакој ивици додељена одређена тежина, која, на пример, може означавати време потребно да се пређе растојање од чвора u до чвора v. Најкраћи пут од цвора u до чвора v је, дакле, низ ивица и чворова чијим се проласком најбрже прелази пут између та два чвора. У истом таквом тежинском графу, разапињуће стабло је подграф датог графа који садржи све његове чворове и повезан је, али нема циклусе - тј. у питању је стабло. Назовимо минималним разапињућим стаблом оно стабло које задовољава дате услове и чији је збир тежине ивица најмањи могући. Ексцентрицитет чвора v представља најдуже од свих минималних растојања од чвора v до свих осталих чворова у графу. Нека чвор v има највеци екцентрицитет, а чвор u најмањи - $e(v)$ представља *дијаметар* графа, а $e(u)$ *радијус* графа G.

Дефиниција 39. Планаран граф је онај граф који може бити представљен у равни тако да се његове ивице додирују само у чворовима графа.

Теорема 65. Довољан услов да граф буде планаран је да не садржи подграф који представља комплетан бипартитиван $K3,3$ граф, или комплетан $K5$ граф. За прост, повезан граф, постоји једноставан критеријум за одређивање планарности: Уколико је $v > 2$, онда је $e < 3v - 5$. Додатно, ако је $v > 3$ и ако у графу нема циклуса дужине 3, онда је $e < 2v - 3$.

24.2 Задаци за рад

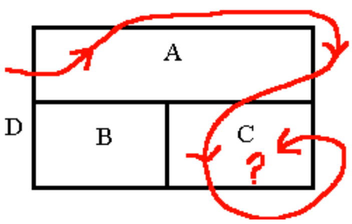
Задатак 227. Да ли је могуће прећи свих седам мостова тако да се ни један од њих не пређе више од једанпут?

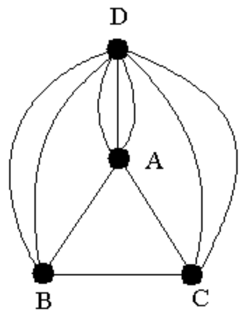


Решење: Евидентно, овде се од нас тражи да уочимо да ли у датом графу постоји Ојлеров пут. Уочимо да су, ако посматрамо дате делове копна као чворове, а мостове као ивице графа, степени датих чворова 5, 3, 3 и 3. Како је неопходан услов за постојање Ојлеровог пута да степени тачно ниједног или два чвора буду непарни, јасно је да он за овај граф не постоји, те да је ове мостове немогуће прећи на тражени начин.

Задатак 228. Да ли се може нацртати линија кроз свих десет дужи дате слике без подизања оловке и пролажења оловком кроз неке од ивица два пута?

Решење: Посматрајмо сваку од површина одређених датом фигуром као чвор графа. Десет датих дужи представљају гране које спајају те чворове. Сада, потребно је наћи Ојлеров пут кроз дати граф. Са слике се види да пут мора кренути из чворова A или D, како су то једина два чвора са непарним степеном. Како су степени B и C парни, Ојлеров пут постоји, те је тражени задатак изводљив.





Задатак 229. Да ли се четири ивице правоугаоника и његове две дијагонале могу нацртати у једном потезу?

Решење: Ако ивице правоугаоника посматрамо као чворове, видимо да су степени свих чворова једнаки 3. Дакле, Ојлеров пут овде не постоји.

Задатак 230. а) Да ли постоји граф са 6 чворова чији су степени 2,2,3,3,4,5? б) Да ли постоји граф са 5 чворова чији су степени 0,1,2,3,4? в) Да ли постоји граф са 6 чворова чији су степени 2,3,3,4,4,4? г) Да ли постоји граф са 7 чворова чији су степени 6,3,3,3,3,3,3? Да ли ти графови садрже Хамилтонов и Ојлеров пут, односно циклус?

Решење: а) Не, зато што збир свих степена треба да буде паран - свака грана диже степене два чвора за један. б) Не, јер уколико један чвор има степен $n-1$, онда је он повезан са свим осталим чворовима. Међутим, дат нам је и један чвор са степеном 0, што нас доводи до контрадикције. в) Да, прилично га је лако и конструисати. Чим постоји, јасно нам је(по његовим степенима), да садржи Ојлеров пут, али не и циклус. Такође, са слике се види да дати граф садржи и Хамилтонов пут. г) Да, и такође се лако да конструисати. Опет, тривијално следи да садржи Хамилтонов пут, али не и циклус. Због више од два чвора са непарним степеном, можемо бити сигурни да Ојлеровог пута нема.

Задатак 231. Граф је бипартитиван уколико се може поделити у два дисјунктна подграфа тако да унутар њих никоја два чвора нису повезана, а гране постоје искључиво између дате два подграфа. Доказати да је граф бипартитиван ако и само ако не садржи циклусе непарне дужине.

Решење: Испратимо следећи алгоритам: Изаберимо било који чвор и ставимо га у скуп A. Затим, испратимо сваку ивицу која креће из датог чвора и ставимо све чворове са другог краја тих ивица у скуп B. Избришимо све ивице које смо управо употребили. Сада, за све човорове из B до којих смо управо дошли, испратимо све гране који крећу из њих и чворове са друге стране ставимо у скуп A. Избрисхемо све управо употребљене ивице, те понављамо алгоритам док не класификујемо све чворове датог графа. Овај алгоритам никад неће покушати да премести чвор из једног скупа у други - ако је неком чвору v већ доделио скуп, ако би га сусрео при алоцирању чворова у онај други скуп, то би значило да га је сусрео после непарног броја корака, тј. да у датом графу постоји циклус непарне дужине, што је у супротности са иницијалним тврђењем.

Задатак 232. Доказати да у сваком простом графу постоје два чвора са истим степеном.

Решење: Нека дати граф има n чворова. Највећи степен који неки чвор може имати је $n-1$. Уколико постоји чвор са тим степеном, он је повезан са свим осталим чворовима, те не може постојати чвор са степеном 0. Слично, ако постоји чвор са степеном 0, не може постојати чвор са степеном $n-1$. Дакле, степени чворова могу имати највише

$n-1$ различитих вредности. Како граф има n чворова, следи(по Дирихлеовом принципу), да постоје бар два чвора са истим степеном.

Задатак 233. Ако је n људи присуствовало конференцији, и ако се део званица поздравио са одређеним бројем људи, показати да постоје бар две особе које су се поздравиле са истим бројем људи.

Решење: Посматраћемо званице као чворове графа. Ивица између два чвора постоји акко су се те две особе поздравиле. Уколико су се неке две особе поздравиле са истим бројем људи, степен та два чвора бице једнак. Дакле, проблем се своди на решење задатка 6.

Задатак 234. Сваки град у некој држави повезан је директним авионским линијама са тачно три друга града. Из сваког града се са највише једним преседањем може стићи у било који други град те државе. Колики је највећи могући број градова у тој држави?

Решење: Означимо градове бројевима $1, 2, 3....$ Из града 1 се, са једним преседањем може стићи у још највише шест градова, те максимални број градова није већи од 10. Релативно лако се може наћи распоред тих 10 градова тако да задовољавају услове задатка.

Задатак 235. У држави Океанији постоји $n, n > 1$ градова, које треба повезати телефонским линијама тако да важе следећи услови: а) Свака линија повезује два града. б) Постоји укупно $n-1$ линија. в) Из сваког од тих градова може се(макар индиректно) разговарати са свим осталим градовима. Доказати да постоји град који је директно повезан са тачно једним градом, те да је овај скуп телефонски линија у ствари стабло.

Решење: Градови представљају чворове графа, а телефонске везе између њих телефонске везе. Дати граф је повезан, а ми треба да докажемо да постоји чвор са степеном 1. Из услова задатка имамо да је $S1 + ...Sn = 2(n-1)$ Дакле, за бар један чвор вази $Si < 2$. Како је по условима задатка граф повезан, следи да је степен сваког чвора већи од нуле, те можемо закључити да овде имамо бар два чвора степена 1. Остали чворови могу имати степене и веће од 2, али укупан број чворова онемогућава постојање циклуса. Дакле, овај граф је у ствари стабло.

Задатак 236. У држави Океанији изграђена је мрежа путева,таква да из сваког града полазе тачно три пута. Путник намерник из свог града полази произвољним путем - у првом граду у ком стигне он скрене лево, у следећем десно, у наредном лево, и тако наизменично. Доказати да ће се путник после коначно много корака вратити кући.

Решење: Означимо са 0 тренутак поласка путника, а са $1, 2, 3..$ редом тренутке скретања. Назовимо директним путем део путне мреже којим се из једног града може стићи у други без проласка кроз неки од осталих градова. Ако путник путује довољно дуго, пропутоваће више од $4n+1$ директних путева, а бар једним директним путем AB(где су A и B градови), проћи ће бар 5 пута и при томе бар три пута скренути у истом смеру, рецимо десно. Нека се то десило у тренуцима i и j, где $i < j$. То значи да је у тренуцима $i-1, j-1$ скренуо лево, $i-2, j-2$ десно... То значи да је путник прешао исти пут у тренуцима 0 до i, као од $j-i$ до j. Према томе, у свом граду био је у тренутку $j-i$, што значи да се вратио кући после коначно много корака.

24.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 237. На шаховској табли димензија а) 5×4; б) 4×4 у доњем левом углу налази се скакач. Да ли скакач може да обиђе сва поља шаховске табле тачно једанпут?

Задатак 238. Краљ Шонгабонга је имао четири сина. Десет од његових мушких потомака су имали по три сина сваки, петнаест од његових мушких потомака су имали по два сина сваки, док су сви остали умрли без деце. Ако је познато да краљ Шонгабонга није имао женских потомака, колико је укупно мушких потомака имао овај краљ?

Задатак 239. У некој држави између свака два града постоји једносмерна авионска линија.Доказати да постоји град из којег се у сваки други град може стићи авионом са највише једним преседањем.

Задатак 240. Свако од 20 људи шаље некој десеторици од осталих по једно писмо. Доказати да постоје две особе које су једна другој послале писмо.

Задатак 241. Град има квадратну мрежу са м "хоризонталних"и н "вертикалних"улица. Колика је најмања дужина дела мреже који треба асфалтирати тако да се од сваке раскрснице до било које друге може доћи асфалтом?

Литература

[1] П. Младеновић, *Комбинаторика*, Друштво математичара Србије, Београд 2001.

[2] Р. Диестел, *Graph Theory*, Спрингер-Верлаг, Хеилделберг 2001.

Предавање 25

Елементарна геометрија 2

Јелена Пајовић, Физички факултет

25.1 Задаци за рад

Задатак 242. Нека је $\triangle\ ABC$ троугао, чији је ортоцентар обележен са H, центар уписане са I, а центар описане кружнице обележен са O. Нека права CI сече описану кружницу у L. Ако је $AB = IL$ и $AH = OH$, наћи све углове троугла $\triangle\ ABC$.

Решење: Лако се показује да је $\angle IAL = \angle AIL = \frac{\alpha+\gamma}{2}$, одакле следи да је $AL = IL = AB = BL$. Значи, троугао $\triangle ABL$ је једнакостраничан, тј. $\angle ALB = 60^o$. Стога, закључујемо да је $\gamma = 120^o$, а и $\angle AOB = 120^o$. (=> почетни троугао је тупоугли.) Са друге стране, имамо $\angle A_1HB_1 = 360^o - 180^o - \gamma = 60^o$, где су A_1 и B_1 подножја висина из темена A и B. Одатле, $\angle AHB = 60^o$, и знајући да је $\angle AOB = 120^o$, закључујемо да су тачке A, B, O и H концикличне. Последица тога је да је $\angle AHO = \angle ABO = \frac{180^o-120^o}{2} = 30^o$ Из услова да је $AH = OH$, добијамо $\angle HAO = \angle\ HOA = \frac{180^o-30^o}{2} = 75^o$. Даље, важи $\angle CAH = 90^o - (180^o - 120^o) = 30^o = \angle BAO$. Одатле директно следи да је, због $\angle HAO = \alpha + 60^o = 75^o$, $\alpha = 15^o, \beta = 45^o, \gamma = 120^o$.

Задатак 243. У равни су дати круг k са центром у O и права l која не сече круг k. Доказати да постоји јединствена тачка Q, која припада нормали повученој из O на праву l, таква да за било коју тачку P, која припада l, тангента из P на k јесте исте дужине као и PQ.

Решење: Нека је R подножје нормале из O на l, и нека је u дужина тангенте RX из R на k. На OR изаберемо Q тако да је $QR = u$. Показаћемо да је Q жељена тачка. Зарад тога, узмимо било коју тачку P на правој l и нека је y дужина тангенте PY из P на k. Даље, нека је r радијус круга k, као и y дужина тангенте PY, $x = QP$, $z = OP$, и

$t = RP$. Из правоуглих троуглова POY, OXP, ORP, PQR имамо респективно $z^2 = r^2 + y^2, OR^2 = r^2 + u^2, z^2 = OR^2 + t^2 = r^2 + u^2 + t^2, x^2 = u^2 + t^2$. Одатле следи да $y^2 = z^2 - r^2 = r^2 + u^2 + t^2 - r^2 = u^2 + t^2 = x^2$. Значи, $y = x$, што у ствари даје $PY = PX$, а то је и требало показати.

Задатак 244. Нека је $\triangle\ ABC$ једнакокраки троугао ($AC = BC$). Тачка P је на луку $\widehat{\mathrm{AB}}$ на којем није треће теме C. Подножје нормале из темена C на дуж PB је тачка Д. Доказати да је $PA + PB = 2PD$.

Решење: Продужимо праву PB и уочимо тачку Z тако да је $BZ = AP$. Троуглови $\triangle\ BCZ$ и $\triangle\ APC$ су подударни. Одатле следи да је $CP = CZ$, што значи да је троугао $\triangle CPZ$ једнакокрак, и да му је једна висина управо CD. Обзиром да је D средиште дужи PZ, следи $2PD = PZ = PB + BZ = PA + PB$, што је и требало показати. Други начин- помоћу Птоломејеве теореме.

Задатак 245. Нека је $\triangle ABC$ једнакокраки троугао ($AB = AC$) и $\angle A = 20^o$. На страници AC се налази тачка D тако да $AD = BC$. Наћи $\angle BDC$.

Решење: Пошто је угао при врху 20^o, значи да су углови $\angle B = \angle C = 80^o$. Конструишимо тачку E на страници AC такву да је $\angle\ CBE = 20^o$, потом тачку F на страници AB тако да је $\angle\ BEF = 60^o$, као и тачку M на страници AC тако да је$\angle\ FME = 40^o$. Лако се доказује да је $BC = BE = BF = FE = FM = MA$. То значи да је $M \equiv D$. Такође, види се да је троугао $\triangle\ BFM$ једнакостраничан, па је$\angle\ FMB = \frac{180^o - 120^o - 100^o}{2} = 10^o$, што повлачи да је $\angle BDC = 40^o - 10^o = 30^o$.

Задатак 246. У унутрашности троугла $\triangle ABC$ се налази тачка P таква да је$\angle\ BPC = 90^o$ и$\angle\ BAP = \angle\ BCP$. Нека су M и N средишта страница AC и BC. Ако важи $BP = 2PM$, доказати да су тачке A, P и N колинеарне.

Решење: Продужимо CP до D тако да је $CP = PD$. Обележимо са $\alpha\angle\ BCP = \angle\ BAP$. Очигледно је да је $\triangle BPD \cong \triangle BPC$, па је$\angle\ BDP = \alpha$. Одатле се може закључити да су тачке B, P, A и D концикличне. Пошто је $BP \perp CD$, следи да је$\angle\ DAB = 90^o$. Обзиром да је M средиште странице AC, PM је, као средња линија, паралелна са страницом DA и упола краћа. Значи, гледајући и услов задатка, важи $DA = 2PM = BP$, одакле се види да је $BPAD$ једнакокраки трапез, јер припада и кружници. Из претходног се може закључити да је $BD \| AP$. Зато,$\angle\ DPA = \angle\ BAP = \angle\ BCP = \angle\ NPC$, где су у последњој једнакости искори71ене чињенице да је$\angle\ BPC = 90^o$ и $NP = NC = NB$. Из свега претходног се закључује да су A, P и N колинеарне тачке. Други начин- преко аналитичке геометрије.

Задатак 247. Нека је $\triangle ABC$ троугао и k његов описан круг. Нека је тачка M у унутрашњости троугла и припада симетрали угла$\angle\ BAC$.

Нека AM, BM, CM секу k у A_1, B_1, C_1. Ако се са P обележи пресек A_1C_1 и AB, а са Q пресек A_1B_1 и AC, доказати да је PQ паралелно са BC.

Решење: Нека је$\angle\ A = 2\alpha$. Онда је$\angle\ A_1AC = \angle BAA_1 = \alpha$. Зато $\angle A_1B_1C = \alpha = \angle BB_1A_1 = \angle A_1C_1C = \angle BC_1A_1$. Такође, нека је$\angle\ B_1CQ = \angle AA_1B_1 = \beta$. Види се да су $\triangle MA_1B_1 \approx \triangle QCB_1$, па зато важи $\frac{QC}{MA_1} = \frac{B_1C}{B_1A_1}$. Слично, види се $\triangle ACM \approx \triangle C_1A_1M$, па добијамо и $\frac{AC}{MA} = \frac{C_1A_1}{C_1M}$. Користећи тачку P, добијамо следеће односе $\frac{PB}{MA_1} = \frac{C_1B}{A_1C_1}$, $\frac{AB}{AM} = \frac{A_1B_1}{MB_1}$. Одатле, $\frac{QC}{PB} = \frac{A_1C_1 \cdot B_1C}{C_1B \cdot B_1A_1}$, као и $\frac{AC}{AB} = \frac{MB_1 \cdot C_1A_1}{A_1B_1 \cdot C_1M} = \frac{MB_1 \cdot C_1A_1}{C_1M \cdot A_1B_1} = \frac{MB_1 \cdot CB \cdot QC}{C_1M \cdot PB \cdot B_1C}$. Користећи сличност троуглова $\triangle C_1BM$ и $\triangle B_1CM$, из последње релације се добија $\frac{AC}{AB} = \frac{QC}{PB}$, одакле закључујемо да је PQ паралелно са BC.

Задатак 248. Нека је $ABCD$ четвороугао, и X и Y средишње тачке дијагонала AC и BD. Праве, повучене из X и Y, паралелне респективно са BD и AC, секу се у тачки O. Ако су P, Q, R, S средишта страница AB, BC, CD, DA, доказати да (а) четвороуглi $APOS$ и $APXS$ имају исту површину, и (б) површине четвороуглова $APOS, BQOP, CROQ$ и $DSOR$ су исте.

Решење: Дуж BD је паралелна са PS као и OX. Обзиром да је $[APXS] = [APOS]$, додавајући $[PAS]$ са обе стране једнакости, добијамо прво тврђење. Ако се посматра четвороугао $APXS$, види се да $[APXS] = [APX] + [ASX] = \frac{1}{2}[ABX] + \frac{1}{2}[ADX] = \frac{1}{4}[ABC] + \frac{1}{4}[ADC] = \frac{1}{4}[ABCD]$. Због тврђења под (а), важи $[APOS] = \frac{1}{4}[ABCD]$. По симетрији, добија се да је површина сваког четвороугла $[AQOP], [CROQ]$ и $[DSOR]$ једнака четвртини површине четвороугла $[ABCD]$, што повлачи да су све четири међусобно једнаких површина.

Задатак 249. Нека су тачке P и M на страницама DC и BC квадрата $ABCD$, такве да је PM тангента круга са центром A и полупречником AB. Даље, нека су Q и N тачке пресека правих PA и MA са дијагоналом BD. Доказати да тачке P, M, N, Q и C припадају једном кругу.

Решење: Круг пречника MP садржи тачку C, јер је $\angle MCP = 90^o$. Како су MB, MT, PT и PD тангентне дужи, следи да је AM симетрала угла BAT и AP симетрала угла DAT па је $\angle MAP = 45^o$. Међутим, $\angle PDN = 45^o$, па је четвороугао $ANPD$ тетивни. У овом четвороуглу је $\angle ADP = 90^o$, па из $\angle ADP + \angle ANP = 180^o$, следи да је $\angle ANP = 90^o$. Због тога је тачка N на кругу пречника MP. Слично закључујемо за тачку Q из четвороугла $ABMQ$.

Задатак 250. Дат је једнакокраки троугао ABC, $AC1BC$. Ма какав био круг k са полупречником једнаким висини h_c овог троугла, који додирује страницу AB, и странице AC и BC сече редом у тачкама D и E, доказати да лук $\widehat{DE}$ им константну вредност.

Решење: Центар S наведеног круга припада правој s која пролази кроз C и паралелна је са AB. Нека је E' тачка симетрична са E у односу на s. Углови HCE и HCE' су једнаки и једнаку углу α, па је $\angle ACE + \angle ECE' = \gamma + 2\alpha = 180^o$, што значи да су тачке A, C, E' колинеарне. Због тога је $\angle CE'E = \frac{1}{2}\gamma$, а отуда $\angle DSE = 2\angle CE'E = \gamma = const$.

Задатак 251. На једној гусарској карти пише: "На острву Лагатор налазе се: бор, чемпрес и палма. Пођи од бора према чемпресу и broj кораке, па се окрени удесно за 90 степени и иди исти толики број корака. Ту постави знак. Затим поново пођи од бора према палми и број кораке, па се окрени 90 степени и иди исти толики број корака. Ту постави знак. Копај на средини између два знака и наћи ћеш сакривено благо." Један морнар је нашао острво и чемпрес и палму на њему, али бора, одакле је требало почети трагање, није било, па се вратио празних руку. Да је знао мало математике нашао би благо. Можете ли ви то учинити?

Решење: Са B, C, P, K означимо редом бор, чемпрес, палму и ковчег са благом. Према упуцтву са карте $BC = CD$ и $CD \perp BC$, као и $PQ = BP$ и $PQ \perp BP$. Нека су A, S, T, R редом подножја нормала из D, K, B, Q на праву CP. Сада се лако доказује да је $\triangle ACD \cong \triangle TBC$ и $\triangle PQR \cong \triangle BPT$. Дакле, четвороугао $DARQ$ је правоугли трапез коме је KS средња линија, па је $AD = CT, RQ = TP, AC = BT = PR$ и $KS = \frac{1}{2}(AD + QR) = \frac{1}{2}(CT + TP) = \frac{1}{2}CP$, где је S средиште дужи CP.

25.2 Задаци за домаћи рад

Задатак 252. Кругови K' и K" додирују се споља, а њихова заједничка спољна тангента додирује их у тачкама A_1 и A_2. Нека су C_1 и C_2 редом центри кругова K' И K" и нека је E пресек заједничке спољашње и заједничке унустрашње тангенте тих кругова. (а) Доказати да је троугао $\triangle C_1EC_2$ правоугли; (б) Ако се кругови K' и K" и дуж A_1A_2 ротирају око праве C_1C_2, онда дуж A_1A_2 описује омотач зарубљене купе, а кругови K' И K" описују сфере. Израчунати површину M омотача зарубљене купе. (ц) Ако су полупречници добијених сфера променљиви, а њихов збир константан, израчунати максималну могућу вредност површине M.

Задатак 253. Дат је квадрат Q страница a у који је уписан квадрат Q', тако да му темена припадају страницама квадрата Q. У квадрат Q' и у сва четири добијена троугла уписани су кругови. Одредити положај темена уписаног квадрата Q', тако да збир површина свих пет уписаних кругова буде минимална.

Задатак 254. Над страницама паралелограма $A_1A_2A_3A_4$ конструисани су са унутрашње стране квадрати $A_1B_1C_1A_2$, $A_2B_2C_2A_3$, $A_3B_3C_3A_4$ И

$A_4B_4C_4A_1$. Доказати да средишта O_1, O_2, O_3, O_4 тих квадрата чине квадрат чија је површина једнака збиру четвртина површина тих квадрата умањеном за површину датог паралелограма.

Задатак 255. Праве одређене теменима паралелограма и срединама несуседних страница, својим пресецима одређују један осмоугао. Доказати да је површина тог осмоугла једнака шестини површине датог паралелограма.

Задатак 256. Ако је збир дужи одређених средиштима парова супротних страница четвороугла једнак његовом полуобиму, онда је тај четвороугао паралелограм. Доказати.

Литература

[1] В. Стојановић, Збирка решених задатака за први разред средњих школа, Математископ 2000.

[2] *http://olympiads.hbcse.tifr.res.in/subjects/mathematics/previous-question-papers-and-solutions*

[3] З. Каделбург, П. Младеновић, Савезна такмичења из математике, Друштво математичара СР Србије, 1990.

Предавање 26

Неједнакости

Јелена Пајовић, Физички факултет

26.1 Теоријски увод

Неједнакости између средина: Нека је за $k \in R \setminus \{0\}$, средина k-тог реда:

$$M_k(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = (\frac{x_1^k + x_2^k + x_3^k + \ldots + x_n^k}{n})^{\frac{1}{k}}.$$

M је растућа функција по k, односно $k \geq l \Rightarrow M_k \geq M_l$. Специјално M_{-1} је хармонијска, M_1 је аритметичка, M_2 квадратна, а $\lim_{x \to 0} M_x$ геометријска средина бројева $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Због тога важи неједнакост међу срединама $M_2 > M_1 > M_0 > M_{-1}$. Једнакост важи акко $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n$.

Неједнакост Коши-Шварц-Буњаковског: Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ две n-торке реалних бројева. Тада важи неједнакост

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2.$$

Последица: Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ три n-торке позитивних реалних бројева. Тада важи неједнакости

$$(\frac{a_1}{b_1} + \ldots + \frac{a_n}{b_n})(c_1 b_1 + \ldots + c_n b_n) \geq (\sqrt{(}a_1 c_1) + \ldots + \sqrt{a_n c_n})^2;$$

$$(\frac{a_1}{b_1} + \ldots + \frac{a_n}{b_n})(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n) \geq (a_1 + \ldots + a_n)^2.$$

26.2 Задаци за рад

Задатак 257. Доказати неједнакост: $\frac{a^2+8}{\sqrt{a^2+3}} > 2$.

Решење: Користи се позната неједнакост да за $x > 0$ важи $x+\frac{1}{x} > 2$, при чему једнакост важи за $x = 1$. $\frac{a^2+8}{\sqrt{a^2+3}} = \frac{a^2+3+5}{\sqrt{a^2+3}} = \sqrt{a^2+3} + \frac{5}{\sqrt{a^2+3}} > \sqrt{a^2+3} + \frac{1}{\sqrt{a^2+3}} \geq 2$.

Задатак 258. Ако је $0 \leq x, y, z \leq 1$, онда је $xy + yz + zx \geq 2xyz$.

Решење: За сваки од бројева $0 \leq x, y, z \leq 1$ важи $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$, при чему једнакости важе када је $x = 0$ или $x = 1$. Сада имамо $x(y+z) \geq x(y^2+z^2) \geq 2xyz$ и $yz = 1 \cdot yz \geq xyz$, што када саберемо добијамо $xy + yz + zx \geq 3xyz \geq 2xyz$, што је и требало показати.

Задатак 259. Нека је $A = \frac{(\frac{\sqrt[4]{bc^3}+\sqrt[4]{a^2bc}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} + \sqrt[4]{bc})^2+bc+3}{\sqrt{bc}+3}$, и нека су $a, b, c \in R^+$. Доказати да је $A \leq 1 + \frac{b+c}{2}$.

Решење: Приметимо да је $\frac{\sqrt[4]{bc^3}+\sqrt[4]{a^2bc}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} = \sqrt[4]{bc}$, одакле је $A = \frac{(2\sqrt[4]{bc})^2+bc+3}{\sqrt{bc}+3} = \frac{bc+4\sqrt{bc}+3}{\sqrt{bc}+3} = \frac{(\sqrt{bc}+3)(\sqrt{bc}+1)}{\sqrt{bc}+3} = \sqrt{bc}+1$. Сада применимо неједнакост аритметичке и геометријске средине и добијамо $A \leq \frac{b+c}{2} + 1$.

Задатак 260. Нека су x, y и z ненегативни бројеви такви је да $x+y+z = 1$. Доказати да је: $xy + yz + 2zx \leq \frac{1}{2}$.

Решење: Квадрирањем услова $x + y + z = 1$, добијамо да је $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 1$. Одавде следи да је $2(xy + yz + zx) = 1 - (x^2 + y^2 + z^2 - 2zx) = 1 - (x - z)^2 - y^2 \leq 1$. Једнакост важи кад је $x = z$ и $y = 0$, односно за $x = z = \frac{1}{2}$ и $y = 0$. (Постоји још бар три начина!)

Задатак 261. Доказати да важи: $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$.

Решење: Показаћемо да важи: $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geq \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$. Лева неједнакост је КА неједнакост, док ћемо за десну страну користити неколико пута АГ неједнакост: $(a+b+c+d)^3 = a^3+b^3+c^3+d^3+3(ab^2+bc^2+ca^2)+3(a^2b+b^2c+c^2a)+3(b^2c+c^2d+d^2b)+3(ac^2+cd^2+da^2)+6(abc+abd+acd+bcd)$. Из $a^3+b^3+c^3+d^3 = \frac{a^3+b^3+c^3}{3} + \frac{a^3+b^3+d^3}{3} \frac{a^3+c^3+d^3}{3} \frac{b^3+c^3+d^3}{3} \geq abc+abd+acd+bcd$, $a^2b+b^2c+c^2a \geq 3abc$ и аналогно $a^2b+b^2d+d^2a \geq 3abd$, $b^2c+c^2d+d^2b \geq 3bcd$ и $ac^2+cd^2+da^2 \geq 3acd$, добијамо $(a+b+c+d)^3 \geq 16(abc+abd+acd+bcd)$. Стога је $\frac{(a+b+c+d)^3}{64} \geq \frac{abc+abd+acd+bcd}{4}$, тј. $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$, чиме смо показали тражену неједнакост.

Задатак 262. Ако су a_1, a_2, a_3 позитивни реални бројеви који задовољавају услов $a_1+a_2+a_3 = 1$, доказати да важи: $\frac{a_1^2}{a_1+a_3} + \frac{a_2^2}{a_2+a_1} + \frac{a_3^2}{a_3+a_2} \geq \frac{1}{2}$.

Решење: Како је $\frac{a_1^2+a_1a_3}{a_1+a_3}+\frac{a_2^2+a_2a_1}{a_2+a_1}+\frac{a_3^2+a_3a_2}{a_3+a_2}=a_1+a_2+a_3=1$ и како из АГ неједнакости имамо $\frac{a_1a_3}{a_1+a_3}+\frac{a_2a_1}{a_2+a_1}+\frac{a_3a_2}{a_3+a_2}\leq\frac{1}{4}(\frac{(a_1+a_3)^2}{a_1+a_3}+\frac{(a_2+a_1)^2}{a_2+a_1}+\frac{(a_3+a_2)2}{a_3+a_2})=\frac{1}{2}$, добијамо тражену неједнакост. (Постоји још бар један начин.)

Задатак 263. Нека бројеви $a,b,c\in R^+$ задовољавају $a^2\leq b^2+c^2$, $b^2\leq c^2+a^2$ и $c^2\leq a^2+b^2$. Доказати неједнакост: $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)\geq 4(a^6+b^6+c^6)$.

Решење: Неједнакост Коши-Шварц-Буњаковског даје $(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)=((\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2)$. Даље, $((a^{\frac{3}{2}})^2+(b^{\frac{3}{2}})^2+(c^{\frac{3}{2}})^2)\geq(\sqrt{a}a^{\frac{3}{2}}+\sqrt{b}b^{\frac{3}{2}}+\sqrt{c}c^{\frac{3}{2}})^2\geq(a^2+b^2+c^2)^2$. Сада имамо да је $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3)\geq(a^2+b^2+c^2)^3=a^6+b^6+c^6+3[a^4(b^2+c^2)+b^4(c^2+a^2)+c^4(a^2+b^2)]+6a^2b^2c^2\geq a^6+b^6+c^6+3[a^6+b^6+c^6]+6a^2b^2c^2\geq 4(a^6+b^6+c^6)$. У изразима у средњим заградама смо користили услове задатка: $a^2\leq b^2+c^2$, $b^2\leq c^2+a^2$ и $c^2\leq a^2+b^2$. Једнакост не важи никада јер су $a,b,c\in R^+$, па је $6a^2b^2c^2>0$.

Задатак 264. Ако су x,y,z позитивни ралну бројеви, доказати: $(x+y+z)^2(yz+zx+xy)^2\leq 3(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)(x^2+xy+y^2)$.

Решење: Очигледно важи: $x^2+xy+y^2=\frac{3}{4}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x-y)^2\geq\frac{3}{4}(x+y)^2$, и исто важи и за y^2+yz+z^2 и z^2+zx+x^2. Зато, $3(x^2+xy+y^2)(y^2+yz+z^2)(z^2+zx+x^2)\geq\frac{81}{64}(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2$, тако да је довољно доказати: $(x+y+z)(xy+yz+zx)\leq\frac{9}{8}(x+y)(y+z)(z+x)$. Приметимо $(x+y)(y+z)(z+x)=(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz$. Тако, тражена неједнакост добија форму $(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8xyz$, која следи из АГ неједнакости: $x+y\geq 2\sqrt{xy}$, $y+z\geq 2\sqrt{yz}$ и $z+x\geq 2\sqrt{zx}$. (Постоје још бар два решења!)

Задатак 265. За било који природни број $n>1$, доказати неједнакост: $\frac{1}{2}<\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$.

Решење: Очигледно је да $n^2<n^2+1<n^2+2<\ldots<n^2+n$. Стога, $\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n}>\frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+n}+\ldots+\frac{n}{n^2+n}=\frac{1}{n^2+n}(1+2+3+\ldots+n)=\frac{1}{2}$. Слично, видимо да $\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n}<\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$.

Задатак 266. Нека су a,b,c позитивни реални бројеви такви да задовољавају једначину $a^3+b^3=c^3$. Доказати да важи $a^2+b^2-c^2>6(c-a)(c-b)$.

Решење: Услов задатка може да се напише и у облику $a^3=c^3-b^3=(c-b)(c^2+cb+b^2)$, што је исто што и $\frac{a^2}{c-b}=\frac{c^2+cb+b^2}{a}$. Слично важи и $\frac{b^2}{c-a}=\frac{c^2+ca+a^2}{b}$. Приметимо да $\frac{a^2}{c-b}+\frac{b^2}{c-a}=\frac{c(a^2+b^2)-a^3-b^3}{(c-a)(c-b)}=\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{(c-a)(c-b)}$. Одавде следи да $\frac{a^2+b^2-c^2}{(c-a)(c-b)}=\frac{c^2+cb+b^2}{ca}+\frac{c^2+ca+a^2}{cb}$. Значи, довољно је доказати:

$\frac{c^2+cb+b^2}{ca} + \frac{c^2+ca+a^2}{cb} \geq 6$. Узгред, важи $c^2 + b^2 \geq 2cb$ и $c^2 + a^2 \geq 2ca$. Зато, користећи АГ неједнакост, долазимо до $\frac{c^2+cb+b^2}{ca} + \frac{c^2+ca+a^2}{cb} \geq 3(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}) \geq 3 \cdot 2 = 6$.

26.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 267. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви такви да важи $abc = 2$. Доказати: $a^3 + b^3 + c^3 \geq a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b}$.

Задатак 268. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви. Доказати да важи: $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \leq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$.

Задатак 269. Нека су x, y, z реални бројеви већи од 1 и важи $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Доказати да онда важи неједнакост: $\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$.

Задатак 270. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви такви је да $abc = 1$. Доказати да је $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$.

Задатак 271. Доказати да је $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$ за позитивне a, b и c.

Литература

[1] *http://srb.imomath.com/dodatne*

[2] *http://olympiads.hbcse.tifr.res.in/subjects/mathematics/previous-question-papers-and-solutions*

Предавање 27

Рационални алгебарски изрази

Стефан Станојевић, Математичка гимназија

Рационални алгебарски изрази су они изрази у чијем формирању учествују *рационалне алгебарске операције* - сабирање, одузимање, множење (самим тим и степеновање) и дељење.

27.1 Задаци за рад

Задатак 272. Упрости следећи израз:
$\frac{a^2-b^2+c^2+2ac}{a^2-b^2-c^2+2bc}$.

Решење: Када препознамо квадрате бинома a^2+c^2+2ac и b^2+c^2-2bc можемо раставити бројилац и именилац овог разломка и израз трансформисати у
$\frac{(a+b+c)(a+c-b)}{(a+b-c)(a+c-b)}$, што кад скратимо $a+c-b$ даје
$\frac{a+b+c}{a+b-c}$. Услов под којим су почетни и добијени израз идентични је $a+c \neq b$.

Задатак 273. Средити израз
$\frac{x^{n+2}-2x^n+x^{n-2}}{x^{n+2}-x^{n+1}+x^{n-1}-x^{n-2}}$, $n \in N$.

Решење: Када поделимо бројилац и именилац разломка са x^{n-2} добићемо израз
$\frac{x^4-2x^2+1}{x^4-x^3+x-1}$, што се даље лако доводи до коначног решења
$\frac{x^2-1}{x^2-x+1}$
Услов под којим су крајњи и почетни израз идентични је $x^2 \neq 1$.

Задатак 274. Упростити рационални израз $\frac{x^5+x+1}{x^3-1}$.

Решење: Елементарним трансформацијама растављамо бројилац разломка

$x^5+x+1=(x^5+x^4+x^3)-(x^4+x^3+x^2)+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^3-x+1)$.

Како је $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, разломак можемо скратити и добијамо резултат $\frac{x^3-x+1}{x-1}$.

Задатак 275. Ако су x и a реални бројеви и $x+a\neq 0$, доказати да је $\frac{x^4+x^2a^2+a^4}{x^3+a^3}=\frac{x^2+xa+a^2}{x+a}$.

Решење:
$\frac{x^4+x^2a^2+a^4}{x^3+a^3}=\frac{x^4+2x^2a^2+a^4-x^2a^2}{x^3+a^3}$
$=\frac{(x^2+a^2)^2-x^2a^2}{x^3+a^3}=\frac{(x^2+a^2-ax)(x^2+a^2+ax)}{(x+a)(x^2-ax+a^2)}$.

Ако је $x+a\neq 0$, онда x и a нису истовремено једнаки 0 па је $x^2+a^2-ax>0$. После скраћивања добијамо тражену једнакост.

Задатак 276. Одредити вредност израза $\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}$ ако је $xyz=1$.

Решење: Проширујући први разломак са z, други са xz и користећи услов $xyz=1$ израз трансформишемо у
$\frac{z}{z+xz+z}+\frac{xz}{1+z+xz}+\frac{1}{1+z+xz}=\frac{z+xz+1}{1+z+xz}=1$.

Задатак 277. Ако је $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$ и $abc\neq 0$, доказати да је $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

Решење: Означимо $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}=t$. Тада је
$ay-bx=ct$, $cx-az=bt$, $bz-cy=at$. Дељењем прве релације са ab, друге са ac, треће са bc добијамо:
$\frac{y}{b}-\frac{x}{a}=\frac{c}{ab}t$, $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=\frac{b}{ac}t$, $\frac{z}{c}-\frac{y}{b}=\frac{a}{bc}t$

Сабирањем ових једначина добијамо $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}t=0$, па како $a^2+b^2+c^2\neq 0$ закључујемо да мора бити $t=0$. Сада је $ay-bx=cx-az=bz-cy=0$ одакле следи $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

Задатак 278. Ако је $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, $abc\neq 0$, $a+b+c\neq 0$, доказати да је:

а) $a+b=0$ или $b+c=0$ или $a+c=0$;
б) $\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}$ за било које непарно n.

Решење: Множећи дату једнакост прво са abc, па са $a+b+c$ добијамо
$(ab+ac+bc)(a+b+c)=abc$. Када средимо ову релацију добићемо
$a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc=0$, што је еквивалентно са $(a+b)(a+c)(b+c)=0$. Одавде следи да је
$a+b=0$ или $b+c=0$ или $a+c=0$.

б) Ако у ову једначину заменимо $a^n=-b^n$ добићемо релацију
$\frac{1}{c^n}=\frac{1}{c^n}$ која је увек тачна.

Задатак 279. Ако је $a+b+c=0$, доказати да је $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Решење: Задатак се једноставно решава корисћењем релације
$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

Задатак 280. Изачунати збир $\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}$
ако је $abc \neq 0$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=4$, $\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}=5$.

Решење: Нека је
$x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$, $z=\frac{c}{a}$.
По услову задатка је
$xyz=1$, $x+y+z=4$, $5=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=xy+xz+yz$.
Сада можемо добити $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)=6$.
Тако имамо $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)+3xyz=7$.

Задатак 281. Реални бројеви a,b,c,d задовољавају једнакости
$(1+\frac{a}{bc})(1+\frac{b}{ac})(1+\frac{c}{ab})d^2=1$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$.
Доказати да је $a+b+c=1$.

Решење: Из услова задатка је
$(1+\frac{a}{bc})(1+\frac{b}{ac})(1+\frac{c}{ab})=\frac{1}{d^2}=(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c})^2$ (1)
Множењем фактора на левој страни формуле добијамо
$(1+\frac{a}{bc})(1+\frac{b}{ac})(1+\frac{c}{ab})=(1+\frac{b}{ac}+\frac{a}{bc}+\frac{1}{c^2})(1+\frac{c}{ab})$
$=1+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{abc}$. (2)
Десна страна једнакости (1) једнака је
$(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c})^2=1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2}{a}-\frac{2}{b}-\frac{2}{c}+\frac{2}{ab}+\frac{2}{ac}+\frac{2}{bc}$. (3)
Из (2) и (3) добијамо
$\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}+\frac{1}{abc}=\frac{2}{ab}+\frac{2}{ac}+\frac{2}{bc}-(\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c})$. (4)
Множећи (4) са abc добијамо
$a^2+b^2+c^2+1=2c+2b+2a-(2bc+2ac+2ab)$,
тј. $(a+b+c)^2+1=2a+2b+2c$, што је еквивалентно са
$((a+b+c)-1)^2=0$, одакле добијамо $a+b+c=1$.

27.2 Задаци за домаћи рад

Задатак 282. Скратити разломак $\frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}$.

Задатак 283. Нека је $y=\frac{x^2+x^{-2}}{x^2-x^{-2}}$ и $z=\frac{x^4+x^{-4}}{x^4-x^{-4}}$. Изрази z у функцији од y.

Задатак 284. Нека су a,b,c међусобно различити бројеви који нису једнаки 0, а x,y,z произвољни реални бројеви.Ако важи $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$, доказати да је

$$\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}.$$

Задатак 285. Ако су бројеви a,b,c,x,y,z различити од нуле и ако је
$\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-xz}{b}=\frac{z^2-xy}{c}\neq 0$,
онда је $\frac{a^2-bc}{x}=\frac{b^2-ac}{y}=\frac{c^2-ab}{z}$. Доказати.

Задатак 286. Наћи вредност израза $x^6+x^3y^3+y^6$, ако реални бројеви x и y задовољавају једнакости
$x^2+xy+y^2=4$ и $x^4+x^2y^2+y^4=8$.

Литература

[1] Ратко Тошић, *Математички проблеми '97*, Алеф, КММ Архимедес 1997.

[2] Ариф Золић,З. Каделбург,Срђан Огњановић, *Анализа са алгебром 1*, Круг 2006.

[3] Владимир Драговић, Павле Младеновић, Срђан Огњановић *Припремни задаци за математичка такмичења за ученике средњих скола*, Друштво математичара Србије 1999.

Предавање 28

Теорија игара

Андреа Шипка, ***Queen Elizabeths Community College***

28.1 Теоријски увод

Игра нулте суме (зеро сум гаме): Укупан добитак једног или више играча је једнак укупном губитку поражених играча.

Равнотежа игре: Ситуација која је прихватљива за све учеснике у игри.

Чиста стратегија: Пружа комплетну дефиницију начина на који играч игра партију.

Мешовита стратегија: је додела вероватноће свакој чистој стратегији.

Оптимална стратегија: Она стратегија која у вишеструком понављању игре обезбеђује максималан просечан добитак односно минималан просечан губитак.

Доминантна стратегија: Стратегија која је боља од неке друге стратегије, без обзира на то шта други играчи играју.

Вредност игре: Вредност коју један играч мора да исплати другом након што је равнотежа постигнута, односно када је игра готова.

28.2 Задаци за рад

Задатак 287. Полиција је сигурна да су двојица осумњичених починила злочин, али нема доказе за то. Осумњичени су одвојени и нуди им се договор. Ако само један од њих призна, допуштајући полицији да осуди другог, биће ослобођен, док ће други бити осуђен на максималну казну од 20 година. Ако оба признају добијају снижене казне од по 5 година. Ако ниједан не призна, биће осуђени на казну од шест месеци због поседовања оружја.

Овај проблем се може представити табелом:

	Затвореник B ћути	Затвореник Б признаје
Затвореник A ћути	6 месеци, 6 месеци	20 година, слободан
Затвореник А признаје	слободан, 20 година	5 година, 5 година

Која стратегија је најбоља за затворенике?

Решење: : За обојицу је исплативије да признају злочин, што представља једину равнотежну тачку за оба затвореника. Без обзира шта је саизвршилац одлучио, издаја се сваком од њих више исплати.

Задатак 288. Марко и Катарина играју игру нулте суме.

Следећа матрица показује исплату за Марка, где је x константна вредност.

		Катарина	
		К1	К2
Марко	М1	5	x
	М2	-2	4

1. Пронађи изразе за Марков очекивани добитак, ако он игра $M1$ са вероватноћом P.
2. Ако је вредност игре 8/3, пронађи вредност P и x.

Решење:

1. $K1 : 5P - 2(1 - P)K2 : xP + 4(1 - P)$
2. $5P-2(1-P) = 8/3P = 2/3\ xP+4(1-P) = 8/3\ 2/3x+4/3 = 8/3\ x = 2$

Задатак 289. У следећој табели су дате вредности у игри између Лазе и Пере. У свакој ћелији, лева цифра је дата за Лазу а десна за Перу.

стратегија	A	B	C
D	(3, 3)	(0, 5)	(1, 2)
E	(4, 2)	(8, 7)	(6, 4)
F	(5, 7)	(5, 8)	(2, 5)

1. Да ли Лаза има доминантну стратегију? Образложи свој одговор
2. Да ли Пера има доминантну стратегију? Образложи.

Решење:

1.) Не. Ако Пера изабере Е, могуће је да ће добити више ако изабере Ф, бар у једној ситуацији.
2. Да. Очигледно је да ће Лаза добити највише ако игра Б, ма шта Пера урадио.

Задатак 290. Срећко и Бранко играју игру нулте суме. Игра је одређена следећом матрицом за Срећка

стратегија	X	Y	Z
I	-4	-3	0
II	5	-2	2
III	1	-1	3

1. Да ли ова игра има равнотежу?
2. Пронађи оптималну ("$playsafe$") стратегију за оба играча.
3. Која је вредност игре?

Решење:

1. Минимум по редовима: -4, -2, -1; Максимум по колонама: 5, -1, 3. Најмањи могући добитак (-1) је једнак највећем могућем губитку (-1). То значи да је решење стабилно и равнотежа постигнута.
2. Срећко игра III, а Бранко Y.
3. Вредност игре је -1.

Задатак 291. Филип и Тео играју игру нулте суме. Игра је одређена следећом матрицом за Филипа:

стратегија	C1	C2	C3
A	3	2	1
B	-2	-1	2

1. Да ли ова игра има равнотежу?
2. Пронађи оптималну мешовиту стратегију за Филипа.
3. Пронађи вредност игре.

Решење:

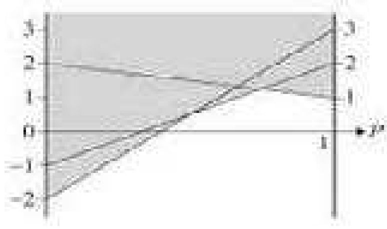
1. Не.
2. Филип игра A са вероватноћом P, а B са вероватноћом $(1-P)$. Његов очекивани добитак када Тео игра:

$$C1 : 3P - 2(1-P) = 5P - 2$$

$$C2 : 2P - (1-P) = 3P - 1$$

$$C3 : P + 2(1-P) = 2 - P$$

Ако се ово представи на графику где је на x оси $0 \leq P \leq 1$, добијемо:



Највиша тачка неосенченог региона је на $P = 0,75$. Дакле, Филип треба да игра А са вероватноћом 0,75 и Б са вероватноћом 0,25.

3. Вредност игре је: $3 \cdot 0,75 - 1 = 1,25$ или $2 - 0,75 = 1,25$. Оба начина рачунања су погодна.

Задатак 292. Јелена и Ерна играју игру нулте суме. Игра је одређена следећом матрицом за Јелену:

стратегија	$A1$	$A2$	$A3$
$P1$	5	2	1
$P2$	-3	-1	5
$P3$	4	1	-2

1. Пронађи оптималну ("$playsafe$") стратегију за Јелену.
2. Да ли постоји равнотежа?
3. Коју стратегију Јелена никада не треба да игра?
4. Пронађи оптималну мешовиту стратегију за Јелену. Графички илуструј.
5. Нађи вредност игре.

Решење:

1. Минимум за $P1(5, 2, -1)$ је -1. Минимум за $P2(-3, -1, 5)$ је -3. Минимум за $P3(4, 1, -2)$ је -2. Максимум минимума је -1. Дакле, $P1$ је оптимална $playsafe$ стратегија за Јелену.
2. Максимум: $A1 = 5, A2 = 2, A3 = 5$. Минимум $(5, 2, 5) = 2$ Пошто је максимум минимума за Јелену -1, а за Ерну 2, не постоји стабилно решење.
3. Стратегија $P3(4, 1, -2)$ увек даје мању исплату од $P1(5, 2, -1)$, независно од тога шта Ерна игра. Дакле, Јелена никада не треба да игра $P3$.

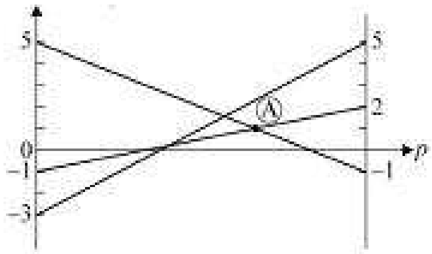
4. Јелена игра $P1$ са вероватноћом P, а $P2$ са вероватноћом $(1-P)$. Очекивани добитак за Јелену, зависно од тога да ли Ерна игра A1, A2 или A3 је:

$$A1 : 5P - 3(1-P) = 8P - 3$$

$$A2 : 2P - (1-P) = 3P - 1$$

$$A3 : -P + 5(1-P) = 5 - 6P$$

Графички приказано:



5. Највиша тачка ограниченог региона је A. У тој тачки важи једначина $3P - 1 = 5 - 6P$, $9P = 6$ $P = 2/3$ Дакле, Јелена игра $P1$ 2/3 времена, и $P2$ 1/3 времена, те је вредност игре $3 \cdot (2/3) - 1 = 1$

Задатак 293. Маша и Петар играју игру нулте суме. Игра је одређена следећом матрицом за Машу:

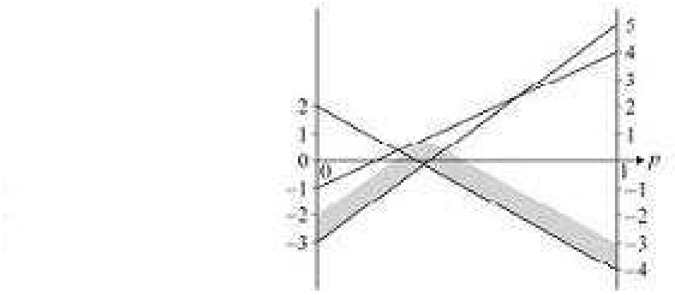
стратегија	$C1$	$C2$	$C3$
$R1$	-4	5	4
$R2$	2	-3	1
$R3$	-5	4	3

1. Пронађи оптималну ("$playsafe$") стратегију за Петра.
2. Коју стратегију Маша никада не треба да игра?
3. Пронађи оптималну мешовиту стратегију за Машу.

Решење:

1. Максимални добитак по колонама за Петра је 2, 5, 4. Минимум максимума је 2. Дакле, Петрова оптимална $playsafe$ страгеија је $C1$.

2. $R3$ доминира $R1$, односно Машин добитак је увек већи ако игра $R1$, а не $R3$, независно од Петровог избора.



3. Маша игра $R1$ са вероватноћом P и $R2$ са вероватноћом $1-P$. $R3$ се не разматра, зато што је $R1$ доминантна стратегија у односу на њу. Машин очекивани добитак када Петар игра:

$$C1 : -4P + 2(1 - P) = 2 - 6P$$

$$C2 : 5P - 3(1 - P) = -3 + 8P$$

$$C3 : 4P - (1 - P) = -1 + 5P.$$

Графички приказано:

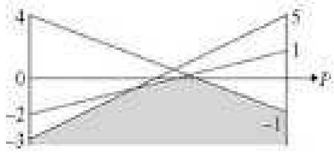
На највишој тачки важи да $2 - 6P = -3 + 8P$ Дакле, $P = 5/14$, и Маша треба да игра $R1$ са вероватноћом $5/14$ и $R2$са вероватноћом $1 - (5/14)$, односно $9/14$.

Задатак 294. Која је равнотежа игре за следећу игру између Кувајта и Саудијске Арабије? Плаћање је по фунтама за милионе барела уља који су произведени. На пример, ако Саудијска Арабија произведе 5 милиона барела дневно, добија профит од 16 фунти по барелу. Ако произведе 6 милиона барела дневно, онда добија 12 фунти по барелу. Игра се може представити на следећи начин:

	Кувајт		
	производња	$1m$ барела дневно	$2m$ барела дневно
Саудијска Арабија	$4m$ барела дневно	(64, 16)	(48, 24)
	$5m$ барела дневно	(60, 12)	(40, 16)

Решење: Саудијска Арабија треба да произведе 4 милиона барела а Кувајт два. Кувајт има доминантну стратегију. Без обзира на то шта СА уради, Кувајту се више исплати да производи два милиона барела дневно. Ако Саудијска Арабија зна да ће Кувајт увек да игра на 2 милиона, они ће изабрати да производе 4 милиона, а не 5, зато што тако максимизују свој профит.

Задатак 295. Немања и Урош играју игру нулте суме. Игра се може презентовати на следећој матрици за Немању:



стратегија	$U1$	$U2$	$U3$
$N1$	-3	-4	1
$N2$	1	5	-1
$N3$	-2	-3	4

Анализирај ову игру. (Пронађи доминирану стратегију, оптималну мешовиту стратегију за Немању, вредност игре.)

Решење: Игра нема стабилно решење, зато што је минимум максимума (1) различит од максимума минимума (-1). $N1$ је увек лошија опција од $N3$, дакле $N3$ доминира $N1$. Немања не треба да игра $N1$. Немања игра $N2$ са вероватноћом P, а $N3$ са вероватноћом $1-P$. Ако Урош игра: $U1$, Немања очекује да добије: $P-2(1-P)=3P-2$; $U2: 5P-3(1-P)=8P-3$; $U3: -P+4(1-P)=4-5P$

На "Највишој"тачки важи да $3P-2=4-5P$, односно $P=3/4$. Дакле, Немањина меовита стратегија је: $N2$ са вероватноћом $3/4$; $N3$ са вероватноћом $1/4$. Вредност игре је $3\cdot 3/4-2=1/4$

Задатак 296. Три особе играју игру. Први играч бира ред (горе или доле), други играч бира колону (лево или десно) а трећи играч бира матрицу (А или Б). Први број у свакој ћелији је добитак/губитак за играча 1, други број је за другог играча, и тако даље.

Матрица А

	лево	десно
горе	(6, 3, 2)	(4, 8, 6)
доле	(2, 3, 9)	(4, 2, 2)

Матрица В

	лево	десно
горе	(7, 2, 2)	(0, 0, 2)
доле	(9, 4, 8)	(0, 0, 0)

Пронађи равнотежу за ову игру.

Решење: У матрици A, играч 1 има доминантну стратегију (увек му је боље да игра горе). Играч 2 нема доминантну стратегију, али ако је рационалан зна да ће играч 1 увек играти горе. У матрици B, и играч 1 и играч 2 имају доминантну стратегију. Играч 1 ће увек играти доле, а играч 2 лево. Затим, играч 3 може да донесе одлуку тако што ће да посматра шта играчи 1 и 2 могу да играју. Играч 3 бира матрицу B, зато што у том случају добија 8, док у случају играња A добија 6.

28.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 297. Играчи A и B наизменично постављају ловце на слободна поља шаховске табле. A поставља беле ловце, а B поставља црне. Ловац се не сме поставити ако је на удару противничког ловца (супротне боје). Играч који је на потезу може поставити свог ловца на поље било које боје. Губитник је играч који не може повући потез. Ко побеђује?

Задатак 298. 2. На гомили се налази n жетона. Два играча, A и B, играју игру у којој наизменично повлаче по 5, 7 или 11 жетона са гомиле. Губи играч који не може да повуче потез. Који играч има победничку стратегију, ако је $n = 2001$ а који ако је $n = 5000$?

Задатак 299. Дата је табла $1x2000$. Играчи A и B уписују наизменично слова S и O у таблу. Победник је онај играч који направи три суседна слова SOS у том редоследу. Доказати да B има победничку стратегију.

Задатак 300. Тома и Сима деле гомилу од 25 новчића са вредностима 1, 2, 3, ..., 25 алтина. При сваком потезу један од њих бира новчић са гомиле, а други говори коме да се да тај новчић. Први бира Тома, а потом онај који тренутно има више алтина. Ако имају једнако, онда онај који је бирао прошли пут. Може ли Тома поступати тако да на крају има више алтина од Симе, или пак, Сима може увек у томе спречити Тому и на крају имати више алтина од Томе?

Задатак 301. Краљ стоји у горњем десном углу шаховске табле $8x8$. Једним потезом он се може преместити за једно поље улево, за једно поље надоле или за једно поље по дијагонали улево-надоле. Победник је играч који постави краља у доњи леви угао табле. Ко побеђује у оваквој игри?

Литература

[1] *http://www.kevinhinde.com/*

[2] *http://web.aqa.org.uk/qual/gce/maths*

[3] А. Илић *Хајде да се играмо*, Истраживачка станица Петница, 2006.

[4] Б. Стојановић *Теорија игара, елементи и примена*, Службени гласник, 2005.

Предавање 29

Нестандардни задаци из теорије бројева

Раде Шпегар, Математичка гимназија

29.1 Теоријски увод

Теорема 66. [Дирехлеова теорема] Свака бесконачна аритметичка прогресија са основом и кораком природним бројевима садржи бесконачно много простих бројева.

29.2 Задаци за рад

Задатак 302. Да ли је могуће да скуп са 2010 различитих бројева бројева има својство да како год изабрали 2 броја из овог скупа однос већег према мањем је прост број?

Решење: Нека су a, b, c три броја из овог скупа и $a > b > c$. Сада је $\frac{a}{b} = p_1, \frac{b}{c} = p_2, \frac{a}{c} = p_3$ где су p_1, p_2, p_3 прости бројеви. Сада је $p_1 p_2 = p_3$ што је контрадикција јер је p_3 прост број.

Задатак 303. За сваки скуп A природних бројева нека је n_A број тројки (x, y, z) елемената A таквих да је $x < y$ и $x + y = z$. Ако A садржи 7 различитих бројева одредити максималну вредност n_A.

Решење: Максимум 9 остварен је за $A = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Да би доказали да је 9 максимум, посматрајмо 7 бројева $a < b < c < d < e < f < g$ и одредимо за сваки од њих колико пута мозе послужити као средњи члан тражене тројке. Одговор је $0, 1, 2, 3, 2, 1, 0$ респективно, па је $n_A \leq 9$.

Задатак 304. Нека је скуп $S = 105, 106, ..., 210$. Одредити минималну вредност n такву да сваки n-точлани подскуп T од S садржи бар 2 елемента који нису узајмно прости.

Решење: Нека је p прост број из скупа $S.2p > 210$ следи $2p$ не припада S односно p је узајамно прост са било којим другим бројем из S. Одредићемо број простих бројева у S. Одредимо колико је бројева у S таквих да је сваки од њих дељив са бар једним од бројева $2, 3, 5, 7, 11$ и назовимо тај скуп А.Назовимо подскуп од A са A_i ако је A_i скуп свих бројева из A дељивих са i . Користећи принцип укључења и искључења добијамо: $A = A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7 \cup A_1 1$. $|A| = |A_2| + |A_3| + |A_5| + |A_7| + |A_{11}| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_2 \cap A_7| - |A_2 \cap A_{11}| - |A_3 \cap A_5| - |A_3 \cap A_7| - |A_3 \cap A_{11}| - |A_5 \cap A_7| - |A_5 \cap A_{11}| - |A_7 \cap A_{11}| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_7| + |A_2 \cap A_3 \cap A_{11}| + |A_2 \cap A_5 \cap A_7| + |A_2 \cap A_5 \cap A_{11}| + |A_2 \cap A_7 \cap A_{11}| + |A_3 \cap A_5 \cap A_7| + |A_3 \cap A_5 \cap A_{11}| + |A_3 \cap A_7 \cap A_{11}| + |A_5 \cap A_7 \cap A_{11}| - |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| - |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_{11}| - |A_2 \cap A_3 \cap A_7 \cap A_{11}| - |A_2 \cap A_5 \cap A_7 \cap A_{11}| - |A_3 \cap A_5 \cap A_7 \cap A_{11}| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7 \cap A_{11}| = 137 - 66 + 16 - 1 + 0 = 86$. Видимо да је једини сложен број из S који није у A $13^2 = 169$ јер $13 \cdot 17 = 221 > 220$. Одавде добијамо да се С састоји од 87 сложених и 19 простих бројева. Доказаћемо да у сваком скупу од 26 бројева из S постоје нека два која нису узајамно проста. Бар 6 од њих припадају скупу A па из Дирихлеовог принципа добијамо да бар 2 припадају истом A_i па они нису узајамно прости јер су оба дељиви са i. На крају нам остаје да конструишемо решење са 25 елемената тако да је у њему сваки пар бројева узајамно прост.Нека је P скуп свих простих бројева из S. Посматрајмо скуп: $P \cup 11^2, 5^3, 2^7, 3^2 \cdot 17, 13^2, 7^2 9$ ово је 25-точлани скуп који испуњава услове задатка.

Задатак 305. Колико има уређених парова природних бројева (x, y) таквих да је $x \leq y$ за које важи $(x, y) = 5!$ и $[x, y] = 50!$

Решење: Прво приметимо да између 1 и 50 има 15 простих бројева. Нека је $f(a, b)$ највеци степен броја b који дели a. За сваки прост број p имамо да је $f(x, p) = f(5!, p)$ и $f(y, p) = f(50!, p)$ или $f(y, p) = f(5!, p)$ и $f(x, p) = f(50!, p)$. Такође важи $f(50!, b) > f(5!, b)$. Сада је јасно да како имамо 15 простих бројева то онда имамо 2^{15} парова бројева (x, y) (за сваки прост број бирамо који од x и y ћемо да ставимо већи степен) и x није једнако y. Можемо упарити све (x, y) и (y, x) где је $x < y$ и на крају из сваког пара узети одговарајући уређени пар и на тај начин добити 2^{14} уређених парова који испуњавају услове задатка.

Задатак 306. Наћи све скупове 100 природних бројева таквих да је сума свака четири четврта степена од тих бројева дељив са производом та четири броја.

Решење: Овакви скупови морају бити облика $n, n, ..., n$ или $3n, n, n, ..., n$ за неки природан број n. Јасно је да ако сваки број скупа A помнозхимо или поделимо истим природним бројем и даље добијамо скуп који испуњава услов задатка те је довољно испитати случај када сви ови бројеви немају заједнички фактор. Нека су x, y, z, w, q 5 од ових бројева, сада zwq дели $z^4+w^4+q^4+x^4$ и $z^4+w^4+q^4+y^4$ па дели и x^4-y^4. Слично $w^4 \equiv q^4 \equiv x^4(mod\ z)$ па је $3w^4 \equiv 0(mod\ z)$. Ако z има прост делилац који није једнак 3 онда овај прост делилац дели све остале бројеве из скупа што је контрадикција. Ако је z дељив са 9 онда су сви остали бројеви из скупа дељиви са 3 сто је такође котрадикција. Одавде добијамо да су сви бројеви или једнаки 1 или 3. Ако је неки број једнак 3, онда су сви остали конгруенти по модулу 3, али не могу бити дељиви са 3 јер долазимо до контрадикције па су онда сви конгруентни са 1. Овим је доказ завршен.

Задатак 307. Наћи све полиноме P са целобројним коефицијентима такве да ако је p прост број онда је и $P(p)$ прост број.

Решење: Ако $P \not\equiv x$ онда постоји број p који је прост такав да је $P(p) = q \neq p$ прост. Због $kq|P(p+kq) - P(p)$ за свако природно k имамо да $q|P(p+kq)$ за свако природно k, али скуп $\{p+kq|k \in \mathbb{N}\}$ има бесконачно много простих елемената, одакле је $f(x) \equiv q$. Коначно, одговор је $P(x) \equiv x$ или $P(x) \equiv q$, где је q прост.

Задатак 308. За $x \in (0,1)$ нека је $y \in (0,1)$ број чија је n-та цифра у децималном запису 2^n-та цифра броја x у децималном запису. Показати да ако је x рационалан онда је и y.

Решење: Познато је тврђење да је број рационалан ако и само ако су у било ком бројевном систему после неке тачке његове цифре периодичне. Односно од неке цифре у децималном запису броја x добијамо периоду и хоцемо да докажемо да исто важи и за y, одакле би следило да је и y рационалан. Нека d дужина периоде којом се појављују цифре у децималном запису броја x и нека је $d = 2^a b$ где је b непаран природан број, а $a \in N_0$. Из мале Фермаове теореме добијамо да постоји природан број c такав да важи $a^c \equiv 1(mod\ b)$. За $k \in N$ и $k \geq 2^a$ важи $2^{k+c} \equiv 2^k(mod\ d)$ па су после a-те цифре у броју ы цифре периодичне са периодом c која је из мале Фермаове теореме коначна.

Задатак 309. Нека је n природан број. Доказати да је могуће изабрати бар $2^{n-1}+n$ бројева из скупа $1, 2...2^n$ тако да за свака два различита изабрана броја x и y, $x+y$ није делилац броја xy

Решење: Изаберимо све непарне бројеве којих је 2^{n-1} и све степене двојке којих је n. Доказаћемо да овај избор испуњава услове задатка. Добијамо 3 случаја: 1) Ако су изабрана 2 непарна броја онда је $x+y$ паран, а xy непаран па $x+y$ не дели xy.

2) Ако су изабрани степен двојке и непаран број онда $(x+y,y)=(x,y)=(x,x+y)=1$ па $(x+y,xy)=1$ односно $x+y$ не дели xy.
3) Ако су изабрана 2 степена двојке, то њихов збир сигурно није степен двојке па има непаран делилац, док је xy степен двојке и не може имати непаран делилац односно $x+y$ не дели xy.

Задатак 310. Ако су xy, yz, zx рационални:

1) Доказати да је $x^2+y^2+z^2$ рационалан.
2) Ако је и $x^3+y^3+z^3$ рационалан доказати да су и x, y, z рационални.

Решење: 1) $x^2 = \frac{xy \cdot zx}{yz}$ па су и квадрати ових бројева рационални из чега следи и да им је и збир квадрата рационалан.

2) Приметимо следеће: $x^3+y^3+z^3 = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$ и $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = k \in Q$, $(x+y+z)^2 = a \in Q$, $(xyz)^2 = b \in Q$ и нека нису и a и b квадрати рационалних бројева па је: $k\sqrt{a}+3\sqrt{b} \in Q$ одакле након сређивања добијамо да је $k_1\sqrt{c}_1+k_2\sqrt{c}_2 \in Q$ (повадимо све могуће квадрате из корена) па мора бити $k_1+k_2=0$ и $c_1=c_2$ што значи да је $x^3+y^3+z^3=0$, а то из Велике Фермаове теореме има само тривијално решење $x=y=z=0$. Остаје нам слуцај када је $\sqrt{b} \in Q$ односно $xyz \in Q$ што након дељења са рационалним бројем xy, yz или zx даје да су z, x и y респективно рационални.

Задатак 311. Доказати или оповргнути: Из интервала $[1, ..., 30000]$ може се изабрати скуп од 1000 бројева који не садржи аритметички низ дузхине 3.

Решење: Посматрајмо бројеве који у тернарној репрезентацији имају само цифре 0 и 1. Доказаћемо да ови бројеви сигурно не образују аритметички низ дужине 3. Претпоставимо супротно и нека је $2y=x+z$. Како y садржи само цифре 0 и 1, то онда $2y$ садржи само цифре 0 и 2. Одавде добијамо да мора бити $x=z=y$ што је контрадикција. Највећи 10-тоцирени број у тернарном систему који не садржи цифру 2 је $(3^{10}-1)/2 = 29524 < 30000$ па ми можемо од бројева из траженог интервала да образујемо скуп са бар $2^{10}=1024$ броја што је чак и више од тражених 1000.

29.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 312. Наћи све тројке природних бројева (x,y,z) такве да важи: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$.

Задатак 313. Доказати да међу 12 узастопних природних бројева постоји један који је мањи од збира својих делилаца већих од 1.

Задатак 314. Нека су a, b реални бројеви тако да се низ $a-b, a^2-b^2, a^3-b^3, ...$ састоји искључиво од природних бројева. Доказати да су a и b цели.

Задатак 315. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n тако да децимална репрезентација броја 5^n садржи блок од 2010 узастопних нула.

Задатак 316. Дат је скуп M од 1985 природних броејва, од којих ниједан нема прост делилац већи од 26. Доказати да овај скуп садржи 4 различита броја чија је геометријска средина природан број.

Литература

[1] T. Andreescu, D. Andrica, Z. Feng, *104 Number Theory Problems*, Birkhauser 2006.

[2] *Mathematical Olympiads 1997-1998: Olympiad Problems from Around the World*

[3] H. Lee, *Problems in Elementary Number Theory*

[4] T. Andreescu, D. Andrica, *An Introduction To Diophantine Equations*, GIL Publishing House 2002.

[5] *www.mathlinks.ro*

Предавање 30

Рачунске методе у геометрији

Раде Шпегар

30.1 Теоријски увод

Теорема 67. [Стјуарт] Ако је D тачка на страници BC троугла ABC. Ако је $AB = c, BC = a, AC = b, AD = d, BD = m, DC = n$ важи једнакост: $b^2m + c^2n = man + d^2a$.

Теорема 68. [Потенција тачке у односу на круг] За сваку тачку X ван кружнице $k(O, r)$ и праву кроз X која сече k у тачкама A и B важи: $XA \cdot XB = |XO^2 - r^2|$

Теорема 69. [Карнот] Нормале у тачкама $A_1, B_1 i C_1$ на странице BC, CA, AB троугла ABC се секу у једној тачки ако и само ако је: $A_1B^2 + C_1A^2 + B_1C^2 = B_1A^2 + A_1C^2 + C_1B^2$.

30.2 Задаци за рад

Задатак 317. Тачке A_1 и B_1 деле странице BC и AC троугла ABC у односу $BA_1 : A_1C = 1 : p$ и $AB_1 : B_1C = 1 : q$ респективно. У ком односу BB_1 дели AA_1?

Решење: Нека је O пресек AA_1 и BB_1. У троуглу B_1BC повуцимо дуж A_1A_2 такву да је $A_1A_2|BB_1$. Онда $\frac{B_1C}{B_1A_2} = 1 + p$ и зато је $AO : OA_1 = AB_1 : B_1A_2 = B_1C : qB_1A_2 = (1 + p) : q$

Задатак 318. Срачунати s_a (дужина бисектрисе из темена A) преко $x = p - a, y = p - b, z = p - c$ (дужине тангенти из темена на уписани круг).

Решење: Из Стјуартове теореме имамо да је $b^2m + c^2n = man + {s_a}^2a$ где је $m = \frac{c}{b+c}a$ и $n = \frac{b}{b+c}a$ одавде је $s_a = \sqrt{\frac{b^2m+c^2n}{a} - mn} = \frac{2\sqrt{x(x+y)(x+z)(x+y+z)}}{2x+y+z}$

Задатак 319. Срачунати r_a (полупречник приписаног круга темена A) преко x, y, z.

Решење: Нека је O_a центар приписаног круга темена A, нека је додирна тачка приписаног круга са дужи BC тачка D, подножје бисектрисе из тачке B на AC тачка E, а подножје нормале из E на BC тачка F. $BD = z$, $DO_a = r_a$, $BE = s_b$, $EF = h_a\frac{a}{a+c}$, а рачунањем углова добијамо да је $\triangle BDO_a \sim \triangle BEF$ одакле је: $\frac{z}{\sqrt{{r_a}^2+z^2}} = \frac{h_a\frac{a}{a+c}}{s_b}$. $h_a a = 2S_{\triangle ABC} = \sqrt{xyz(x+y+z)}$. $s_b(a+c) = 2\sqrt{x(x+y)(x+z)(x+y+z)}$ па је $\frac{h_a\frac{a}{a+c}}{s_b} = \sqrt{\frac{xz}{(y+x)(y+z)}}$. Даље рачунањем лако добијамо: $r_a = \sqrt{\frac{yz(x+y+z}{x}}$

Задатак 320. Дата је права l. Квадрат $ABCD$ се ротира око центра. Наћи геометријско место тачака средишта дужи PQ где је P подножје нормале из тачке D на праву l и q средиште странице AB.

Решење: Посматрајмо координантни систем са координантним поцхетком у центру квадрата $ABCD$. Нека су координате темена квадрата $A(x,y)$, $B(y,-x)$, $C(-x,-y)$, $D(-y,x)$. Нека је линија l задата са $y = a$(узимамо онај координантни систем чија је ш-оса паралелна са l). Подножје нормале из D на l има координате $P(-y,a)$, а средиште AB има координате $Q(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2})$. Нека је $t = \frac{x-y}{4}$ и сада добијамо да је тражено геометријско место тачака $(t, -t+\frac{a}{2})$, при чему је јос довољно приметити да $x-y$ варира од $-AB$ до AB.

Задатак 321. Доказати да ако у троуглу важи: $\sqrt{r}_a + \sqrt{r}_b + \sqrt{r}_c = \frac{\sqrt{r_ar_br_c}}{r}$ онда је он једнакостраничан.

Решење: За наш троугао важи:$\frac{1}{\sqrt{r_ar_b}} + \frac{1}{\sqrt{r_br_c}} + \frac{1}{\sqrt{r_cr_a}} = \frac{1}{r}$. Важи $r_a = \sqrt{yz(x+y+z)}x$, $r_b = \sqrt{xz(x+y+z)}y$ и $r_c = \sqrt{xy(x+y+z)}z$ па је $r_ar_b = z(x+y+z)$, $r_br_c = x(x+y+z)$ и $r_cr_a = y(x+y+z)$. Важи: $r = \sqrt{xyz}x+y+z$, па након сређивања добијамо да је: $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = x+y+z \leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + (\sqrt{y}-\sqrt{z})^2 + (\sqrt{z}-\sqrt{x})^2 = 0$ одакле добијамо да мора бити $x = y = z$ па је и $a = b = c$

Задатак 322. Израчунати OI преко r и R где су O и R центар и полупречник описаног круга око $\triangle ABC$, а I и r центар и полупречник уписаног круга око $\triangle ABC$

Решење: Симетрала из A пролази кроз I и сече описани круг у A_1. Важи: $AI \cdot IA_1 = R^2 - OI^2$. Повуцимо нормалу IM дужине r на AB. Познато је да оан дели страницу AB на делове дужине x и y. Из Питагорине теореме добијамо да је $AI = \sqrt{x^2 + \frac{xyz}{x+y+z}}$. Важи: $\angle BIA = \angle IBA = 90^o - \frac{\gamma}{2}$ одакле добијамо да је $IA = BA' = CA'$. Повуцимо нормалу $A'N$ на BC(она полови BC).$\triangle AIM$ $\triangle A'BN$ па је $AM/AI = BN/BA' = BN/IA'$ па је $AI \cdot IA' = BN \cdot AI^2/AM = \frac{y+z}{2}(x^2 + \frac{xyz}{x+y+z})/x = 2\frac{abc}{4s} = 2rR$. Што значи да је: $2rR = R^2 - OI^2$ односно: $OI = \sqrt{R(R-2r)}$ чиме је доказ завршен.

Задатак 323. Нека је R полупречник описаног курга троугла ABC; и нека су G и H тежиште и ортоцентар, респективно. Ако је F средиште GH доказати да је: $AF^2 + BF^2 + CF^2 = 3R^2$.

Решење: Нека је x вектор са почетком у O(центар описаног круга) и крајем у X, за свако X. Важи: $h = a + b + c$, $g = \frac{a+b+c}{3}$ па је $f = \frac{2}{3}(a+b+c)$. Добијамо: $AF^2+BF^2+CF^2 = (a-f)^2+(b-f)^2+(c-f)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2(a+b+c)f + 3f^2 = 3R^2 - f(2(a+b+c) - 3f) = 3R^2$

Задатак 324. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао са нормалним дијагоналама. Нормале на средишта страница AB и CD се секу у јединственој тачки P у унутрашњости $ABCD$. Доказати да је $ABCD$ је тетиван ако и само ако су троуглови ABP и CDP једнаке површине.

Решење: Нека је пресек дијагонала AC и BD тачка E, а подноз-хја нормала из P на AC и BD тачке M и N. Имамо да је $S_{ABP} = S_{ABE} - S_{AEP} - S_{BEP} = \frac{1}{2}(AE \cdot BE - AE \cdot EN - BE \cdot EM) = \frac{AM \cdot BN - EM \cdot EN}{2}$. Аналогно добијамо и $S_{CDP} = \frac{CM \cdot DN - EM \cdot EN}{2}$ па је $S_{ABP} - S_{CDP} = \frac{AM \cdot BN - CM \cdot DN}{2}$. Претпоставимо да је $ABCD$ тетиван, сада добијамо да је P центар описаног круга $ABCD$ па су M и N средишта AC и BD одакле је $AM = CM$ и $BN = DN$ и $S_{ABP} - S_{CDP} = 0$. Претпоставимо сада да $ABCD$ није тетиван и без губљења општости претпоставимо да је $PA = PB > PC = PD$. Одавде је: $AM > CM$ и $BN > DN$, па је и $S_{ABP} > S_{CDP}$ чиме је доказана и друга импликација.

Задатак 325. Ако се нормале на странице троугла у подножјима бисектриса секу у једној тачки, онда је троугао једнакокрак.

Решење: Из Карнотове теореме и теореме о односе у ком бисектриса дели наспрамну страницу добијамо да је: $\frac{a}{b+c}^2(b^2 - c^2) + \frac{b}{c+a}^2(c^2 - a^2) + \frac{b}{c+a}^2(c^2 - a^2) = 0 \leftrightarrow (b-c)\frac{a^2}{b+c} + (c-a)\frac{b^2}{a+c} + (c - a + a - b)\frac{c^2}{a+b} = 0 \leftrightarrow (b-c)(\frac{a^2}{b+c} - \frac{c^2}{a+b}) + (c-a)(\frac{b^2}{a+c} - \frac{c^2}{a+b} = 0 \leftrightarrow (a-b)(c-b)(c-a)(a+b+c)^2/(a+b)(b+c)(c+a) = 0$ одакле следи да је троугао једнакокрак.

Задатак 326. Нека је $ABCD$ тетраедар, G његово тежиште, и A', B', C', D' тачке пресека правих GA, GB, GC, GD и описане сфере $ABCD$. Доказати: $GA \cdot GB \cdot GC \cdot GD \leq GA' \cdot GB' \cdot GB' \cdot GD'$ и $\frac{1}{GA'} + \frac{1}{GB'} + \frac{1}{GC'} + \frac{1}{GD'} \leq \frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC} + \frac{1}{GD}$.

Решење: Из теореме о потенцији тачке у односу на круг за свако $X \in A, B, C, D$ имамо да важи:$GX \cdot GX' = R^2 - OG^2$ па се тражене неједнакости своде на: $(R^2 - OG^2)^2 \geq GA \cdot GB \cdot GC \cdot GD$ и $(R^2 - OG^2)(\frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC} + \frac{1}{GD}) \geq GA + GB + GC + GD$. Прва неједнакост следи из АГ неједнакости и једнакости $4(R^2 - OG^2) = GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$, а друга из исте ове једнакости и неједнакости Коши-Шварца. Још нам остаје да доказхемо да важи $4(R^2 - OG^2) = GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$. За сваку тачку P са p означимо вектор са почетком у центру описане сфере и крајем у тачки P. Важи: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a - g + g)^2 + (b - g + g)^2 + (c - g + g)^2 + (d - g + g)^2 = 4g^2 + (g - a)^2 + (g - b)^2 + (g - c)^2 + (g - d)^2 + 2g(g - a + g - b + g - c + g - d) = 4g^2 + (g - a)^2 + (g - b)^2 + (g - c)^2 + (g - d)^2$ што је еквивалентно траженој једнакости.

30.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 327. Нека је k круг који додирује ивице $\angle XOY$, и k_1 круг који додирује исте ивице и пролази кроз центар круга k. Нека је A друга крајња тачка пречника k_1 који пролази кроз средиште k, и тачка B тачка пресека овог пречника са k. Доказати да круг са центром у A који пролази кроз B додирује ивице $\angle XOY$.

Задатак 328. Наћи однос страница троугла код кога је једна тежишна дуж подељења уписаном кружницом на три једнака дела.

Задатак 329. Ако су координате темена троуглова рационални бројеви доказати да су онда и координате центра описаног круга такође рационални бројеви.

Задатак 330. Наћи геометријско место тачака P у равни квадрата $ABCD$ тако да важи $max(PA, PC) = \frac{1}{\sqrt{2}}(PB + PD)$

Задатак 331. Нека је O центар описаног круга и H ортоцентар оштроуглог троугла ABC. Показати да постоје тачке D, E, F на страницама BC, CA, AB, респективно тако да важи: $OD + DH = OE + EH = OF + FH$ и праве AD, BE и CF су конкурентне.

Литература

[1] Виктор Прасолов, *Problems in Plane and Solid Geometry*

[2] Титу Андреесцу, Дорин Андрица, *360 Problems for Mathematical Contests*, ГИЛ Публишинг Хоусе, 2003

[3] *Mathematical Olympiads 1997-1998: Olympiad Problems from Around the World*

[4] Д. Ђукић, В. Јанковић, И. Матић, Н.Петровић, *The Imo Compendium*, Спрингер 2006.

Део IV

Предавања за 8. разред

Предавање 31

Целобројна Решетка

Душан Милијанчевић, Математичка гимназија

31.1 Теоријски увод

Дефиниција 40. Целобројна мрежа (решетка) у координатном систему је скуп тачака (x, y) где су x и y било који цели бројеви.

Дефиниција 41. Многоугао је уписан у целобројну мрежи ако су темена елементи целобројне мреже.

Теорема 70. (Пикова теорема) Површина полигона уписаног у целобројну мрежи је $\frac{i}{2}+u-1$, где i и u означавају број тачака на граници и у унутрашњости многоугла.

Теорема 71. (Теорема Минковског) Дата је конвексна фигура која је централно симетрична око тачке $(0,0)$. Ако је њена површина већа од 4 онда садржи бар 3 целобројне тачке.

Теорема 72. За сваки скуп од n тачака ($n \geq 3$) у равни, од којих нису све колинеарне, постоји конвексан многоугао са теменима у неким од датих тачака који садржи свих n тачака.

Дефиниција 42. Конвексан многоугао за датих n тачака из претходне теореме се назива конвексан омотач датог скупа од n тачака.

Теорема 73. Конвексан омотач датог скупа тачака је најмањи (по површини) конвексан многоугао који садржи дате тачке.

Теорема 74. Нека се конвексна фигура A налази унутар конвексне фигуре B. Онда је обим фигуре A мањи од обима фигуре B.

Теорема 75. (Штајнерова симетризација) За сваку фигуру P и праву d у равни постоји фигура P' која се симтрична у односу на праву d и за коју важи да су за сваку праву e нормалну на d дужине дужи $e \cap P$ и $e \cap P'$ једнаке.

Теорема 76. За површине фигура P и P' из претходне теореме важи да су једнаки, а обим фигуре P' је мањи или једнак од обима фигуре P.

Теорема 77. Ако је фигура P конвексна онда је и фигура P' конвексна.

Теорема 78. Ако је фигура P многоугао онда је и фигура P' многоугао.

31.2 Задаци за рад

Задатак 332. Доказати да се ниједан правилан троугао не може уписати у целобројну мрежу.

Решење: Претпоставимо супротно тј. да се неки правилан троугао ABC може уписати у целобројну мрежу. Опишимо око њега најмањи могући правоугаоник тако да темена A, B и C припадају страницама правоугоника. Онда ће без умањења општости A бити теме правоугаоника који ћемо означити са $AMNP$ ($B \in MN$ и $C \in PN$). Тачке M, N и P су целобројне па је AB^2 цео број из Питагорине теореме. Онда је површине троугла ABC једнака $AB^2\frac{\sqrt{3}}{4}$ што је ирационалан број. Површине троуглова AMB, BNC и ACP су рационални бројеви, а како је и површина правоугаоника $AMNP$ рационалан број то је и површина троугла ABC рационалан број што је контрадикција.

Задатак 333. Доказати да се ниједан правилан петоугао не може уписати у целобројну мрежу.

Решење: Претпоставимо супртоно тј. да се неки правилан петоугао може уписати у целобројну мрежи и нека је $A_1A_2A_3A_4A_5$ најмањи (по површини) од њих. Нека је B_1 пресек дијагонала A_3A_5 и A_2A_4. Слично означимо и тачке B_2, B_3, B_4 и B_5. Како је $A_2B_1||A_1A_5$ и $A_5B_1||A_1A_2$ то је $A_1A_2B_1A_5$ паралелограм. Како су три темена тог паралелограма (A_1, A_2 и A_5) целобројне тачке то је и B_1 целобројна тачка. Слично су и B_2, B_3, B_4 и B_5 тачке са целобројним координатама. Петоугао $B_1B_2B_3B_4B_5$ је правилан петогуао површине мање од површине петогула $A_1A_2A_3A_4A_5$ који је уписан у целобројну мрежу, чиме смо добили контрадикцију.

Задатак 334. (Пикова теорема) Површина полигона уписаног у целобројну мрежи је $\frac{i}{2} + u - 1$, где i и u означавају број тачака на граници и у унутрашњости многоугла.

Решење: За многоугао P означимо са $S(P), u(P), i(P)$ и $f(P)$ редом површину, број целобројних тачака у унутрашњости, број целобројних тачака на рубу и израз $\frac{i}{2}+u-1$. Доказаћемо да је $S(P) = f(P)$ за сваки многоугао уписан у целобројну мрежу. Користимо следеће леме:

Лема 10. Нека је P правоугаоник са теменима на целобројној мрежи чије су странице паралелне осама мреже. Онда је $f(P) = S(P)$.

Доказ: Нека је праовугаоник P димензија $m \times n$. Онда на његовим ивицама имамо $m+1$, односно $n+1$ тачку. У његовој унутрашњости се налази правоугаоник који у својим ивицама садржи $m-1$, односно $n-1$ тачака, па у његовој унутрашњости имамо $(m-1)(n-1)$ тачака $(u(P) = (m-1)(n-1))$. На његовом рубу се налази $2(m+n)$ тачака $(i(P) = 2(m+n))$. Површина правоугаоника је mn $(S(P) = mn)$ и сада је

$$f(P) = u(P) + \frac{i(P)}{2} - 1 = (m-1)(n-1) + \frac{2(m+n)}{2} - 1$$
$$= mn - m - n + 1 + m + n - 1 = mn = S(P).$$

Лема 11. Нека је T правоугли троугао са теменима на целобројној мрежи чије су катете паралелне осама те мреже. Онда је $f(T) = S(T)$.

Доказ: Нека катете тог троугла без темена имају m, односно n тачака, а нека хипотенуза има d тачака. Допунимо га подударним троуглом до правоугаоника P. Имамо да је $S(P) = 2S(T)$, $i(P) = 2m + 2n + 4$, $u(P) = mn$, $u(T) = \frac{u(P)-d+2}{2} = \frac{mn-d+2}{2}$ и $i(T) = 1 + m + n + d$, $S(T) = \frac{(m+1)(n+1)}{2}$. Онда је

$$f(T) = u(T) + \frac{i(T)}{2} - 1 = \frac{mn-d+2}{2} + \frac{1+m+n+d}{2} - 1$$
$$= \frac{mn+m+n+1}{2} = \frac{(m+1)(n+1)}{2} = S(T).$$

Лема 12. Дата су два полигона P_1 и P_2 чије су унутрашњости дисјунктне, а који се секу по рубу, тако да имају заједничку бар једну дуж. Онда је $P_1 \cup P_2$ полигон и важи $f(P_1 \cup P_2) = f(P_1) + f(P_2)$.

Доказ: Нека P_1 и P_2 имају заједничих m тачака. Имамо $u(P_1 \cup P_2) = u(P_1) + u(P_2) + m - 2$ и $i(P_1 \cup P_2) = i(P_1) + i(P_2) - 2(m-2) - 2$, па

$$f(P_1 \cup P_2) = u(P_1 \cup \mathcal{P}_2) + \frac{i(P_1 \cup P_2)}{2} - 1 = u(P_1) + u(P_2) + m - 2 + \frac{i(P_1) + i(P_2) - 2m + 2}{2}$$
$$= u(P_1) + \frac{i(P_1)}{2} - 1 + u(P_2) + \frac{i(P_2)}{2} - 1 = f(P_1) + f(P_2).$$

Лема 13. Нека је T троугао са теменима на целобројној мрежи. Онда је $f(T) = S(T)$.

Доказ: Допунимо троугао до правоугаоника P са три правоугла троугла T_1, T_2 и T_3 који имају по обе катете паралелне мреже, а хипотенузе су им странице датог троугла T. Сада важи $S(P) = S(T) + S(T_1) + S(T_2) + S(T_3)$ и $f(P) = f(T) + f(T_1) + f(T_2) + f(T_3)$ и уз $S(P) = f(P), S(T_1) = f(T_1), S(T_2) = f(T_2), S(T_3) = f(T_3)$ следи $S(T) = f(T)$.

Да би доказали комплетну теорему извршимо произвољну триангулацију полигона на троуглове (може се доказати да постоји) и на основу претходних лема добијамо $f(P) = S(P)$.

Задатак 335. Доказати да квадрат странице n садржи не више од $(n+1)^2$ целобројних тачака.

Решење: Нека се у датом квадрату са страницом n налази N целобројних тачака. Означимо са O и P површину конвексног омотача тих N тачака. Ако тај конвексан омотач има k темена онда је $4n \geq O \geq k$ и $P \leq n^2$. Како је по Пиковој теореми $P = \frac{k}{2} + N - k - 1$, то је $N \leq n^2 + 1 + \frac{k}{2} \leq (n+1)^2$ што је и требало доказати.

Задатак 336. Троугао ABC уписан у целобројну раван има само једну целобројну тачку у својој унутрашњости. Доказати да је та тачка његово тежиште.

Решење: Означимо дату целобројну тачку у унутрашњости ABC са O. Како су троуглови ABO, BCO и ACO уписани у целобројну мрежу и немају целобројних тачака у својим унутрашњостима то су њихове површине једнаке међусобно (и једнаке $\frac{1}{2}$). Из овога следи да су праве AO, BO и CO тежишне дужи, а тачка O тежиште троугла ABC.

Задатак 337. За свако $n \in N$ доказати да постоји кружницу која у својој унутрашњости има тачно n целобројних тачака.

Решење: Докажимо да две различите целобројне тачке (m_1, n_1) и (m_2, n_2) имају различита растојања од тачке $(\sqrt{2}, \frac{1}{3})$. Претпоставимо супротно тј. да је

$$(m_1 - \sqrt{2})^2 + (n_1 - \frac{1}{3})^2 = (m^2 - \sqrt{2})^2 + (n_2 - \frac{1}{3})^2.$$

Онда је

$$m_1^2 - m_2^2 + (n_1 - \frac{1}{3})^2 - (n_2 - \frac{1}{3})^2 = 2\sqrt{2}(m_1 - m_2).$$

Како је $\sqrt{2}$ ирационалан број то је $m_1 = m_2$ и $(n_1 - \frac{1}{3})^2 = (n_2 - \frac{1}{3})^2$. Из ове једнакости следи да је $(n_1 - n_2)(n_1 + n_2 - \frac{2}{3}) = 0$, односно да је $n_1 = n_2$. Следи да не постоје две целобројне тачке са истом удаљеношћу од $(\sqrt{2}, 3)$. Опишимо кружницу са полупречником R око тачке $(\sqrt{2}, 3)$. За $R \to 0$ та кружница садржи само једну целобројну тачку, а за $R \to \infty$ произвољан број. Како се ни у једном кораку број целобројних тачака које та кружница садржи не може увећати за више од 1, то постоји кружница која садржи тачно n целобројних тачака.

Задатак 338. У целобројну мрежу је уписан петоугао са целобројним дужинама страница. Доказати да је његов обим паран број.

Решење: Над сваком страницом тог петоугла конструишимо правоугле троуглове тако да су њихове катете паралелне линијама мреже. Означимо са a_i и b_i (за $1 \leq i \leq 5$) дужине вертикалних и хоризонталних страница тих правоуглих троуглова. Како су $\sqrt{a_i^2 + b_i^2}$ цели бројеви то је $\sqrt{a_i^2 + b_i^2} \equiv_2 a_i^2 + b_i^2 \equiv_2 a_i + b_i$. Онда за обим петоугла O важи

$$O = \sum_{i=1}^{5} \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \equiv_2 \sum_{i=1}^{5} a_i + \sum_{i=1}^{5} b_i.$$

Како је збир неких a_i једнак збиру преосталих то је $\sum_{i=1}^{5} a_i$ паран број. Слично је и $\sum_{i=1}^{5} b_i$ паран број па је и O паран број.

Задатак 339. (Теорема Минковског) Дата је конвексна фигура која је централно симетрична око тачке $(0,0)$. Ако је њена површина већа од 4 доказати да садржи бар 3 целобројне тачке.

*Решење:*Постоји реалан број R такав да кружница са центром у $(0,0)$ и полупречником R садржи целу дату фигуру. За дати природан број n транслирајмо фигуру за векторе $(2x, 2y)$ где је $x, y \in \{0, 1, 2, ..., n\}$. Означимо површину дате фигуре са S. Ако се никоје две од датих $(n+1)^2$ транслација фигуре не секу онда је $S(n+1)^2 < 4(n+R)^2$ јер се све те транслације налазе у квадрату странице $2n + 2R$. Онда је $\frac{\sqrt{S}}{4} < \frac{n+R}{n+1}$. За $n \to \infty$ израз са десне стране тежи у 1, док је израз са леве стране строго већи од 1 и не зависи од n, што је немогуће. Следи да се неке две транслације те фигуре секу.

Означимо те две транслације које се секу са F_1 и F_2 и изаберимо тачку A из њиховог пресека. Нека су центри симетрија тих фигура редом O_1 и O_2. Постоји тачка B таква да је O_1AO_2B паралелограм. Онда је $\vec{BA'} = \vec{O_1O_2}$ где је A' таква тачка да је O_2 средиште дужи AA'. Како се фигура F_1 слика транслацијом за $\vec{(}O_1O_2)$ у F_2 то $B \in F_1$. Слично и $B \in F_2$, па $B \in F_1 \cap F_2$. Како су F_1 и F_2 конвексне фигуре то је и $F_1 \cap F_2$ конвексна фигура, па важи $AB \subset F_1 \cap F_2$. Средиште дужи O_1O_2 је целобројна тачка зато што су тачке O_1 и O_2 облика $(2x_1, 2y_1)$ и $(2x_2, 2y_2)$ за неке целе бројеве x_1, y_1, x_2 и y_2. Како је средиште дужи O_1O_2 уједно и средиште дужи AB то постоји целобројна тачка у пресеку F_1 и F_2 (различита од O_1 и O_2). Следи да и у почетној фигури постоји још једна целобројна тачка различита од $(0,0)$. Како је фигура централно симетрична то дата фигура садржи бар три целобројне тачке.

Задатак 340. Наћи највеће n за које постоји конвексан многоугао који се може уписати у део целобројне мреже $P = \{(x,y) | x, y \in N, 1 \leq x, y \leq 2004\}$.

Решење: Посматрајмо векторе страница многоугла у негативном смеру. Као меру вектора (i,j) означимо број $|i|+|j|$. Збир мера вектора страница неког конвексног многоугла уписаног у P је $\leq 4 \cdot 2003 = 8012$

(по четири смера којима се максимално може прећи дужина 2003). Вектора мере m за позитивне компоненте вектора има тачно $\varphi(m)$ за $m \geq 2$ и 2 за $m = 1$. Онда свих вектора мере m за $m \geq 2$ има $4\varphi(m)$, а за $m = 1$ има их 4. Приметимо да је

$$4 + 4\sum_{m=1}^{21} m\varphi(m) = 7988$$

и

$$4 + 4\sum_{i=1}^{21} \varphi(m) = 560.$$

Ако би имали конвексан многоугао уписан у P са бар 562 темена онда би збир мера вектора његових страница био бар $7988 + 2 \cdot 22 > 8012$, што је немогуће. Докажимо да се 561-тоугао може уписати у P. Из скуп свих 560 вектора чије су мере не веће од 21 избацимо $(5, 16)$ и $(10, -11)$, а додајмо им $(-1, 21), (-5, -17)$ и $(21, 1)$. Збир нових вектора биће $\vec{0}$, па их надовезујући по растућем нагибном углу можемо затворити у конвексан многоугао. Ако је x збир мера вертикалних компоненти вектора страница овог многоугла (мера вектора је једнака збиру мера компоненти вектора на линије мреже), онда је $x + 12$ збир мера хоризонталних компоненти. Како је $2x + 12 = 8000$ то је $x = 3994$, из чега следи да је ширина многогула 2003, а висина 1997, што може да стане у P. Овим је задатак завршен.

Задатак 341. Нека је n природан број већи од 2. Конвексни многогуао површине веће од n се налази у делу $(0, n) \times (0, n)$ целобројне мреже. Доказати да тај многоугао садржи бар једну целобројну тачку.

Решење: Претпоставимо супртоно тј. да се у датм многогулу P не налази ни једна целобројна тачка. Извршимо Штајнерову параметризацију многоугла P по правој $x = \frac{1}{2}$. Тиме смо добили многоугао P'. Ако P' садржи целобројну тачку (x, y) онда је и $(1 - x, y)$ целобројна тачка која се налази у P' због симетричности многоугла P' око праве $x = \frac{1}{2}$. Како је растојање између (x, y) и $(1 - x, y)$ бар један то се у многоуглу P могу може наћи дуж дужине бар 1 паралелна са x осом и на целобројној растојању y удаљеном од ње, што значи да у многоуглу P постоји целобројна тачка. Ово је немогуће по почетној претпоставци, па ни многоугао P' не садржи ни једну целобројну тачку. Извршимо сада параметризацију многоугла P' по правој $y = \frac{1}{2}$ и тиме добијамо многоугао P''. Слично претходном ни многогуао P'' не садржи целобројну тачку. Многоугао P'' је симетричан у односу на обе праве $x = \frac{1}{2}$ и $y = \frac{1}{2}$. Нека је су a и bнајвећи реални бројеви такви да $(a, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, b) \in P''$. Разликујемо следећа два случаја

1° Ако је $a \leq \frac{3}{2}$ и $b \leq \frac{3}{2}$. Претпоставимо да постоји тачка $M(x, y)$ у P'' са $x \geq \frac{3}{2}, y \geq \frac{1}{2}$ (на исти начин се доказује и случај $y \geq \frac{3}{2}, x \geq \frac{1}{2}$).

Онда се због симетричности у односу на праву $x = \frac{1}{2}$ и тачка $M'(x, 1-y)$ налази у P'', па се због конвексности многогла P'' и дуж MM' налази у P''. Самим тим се и тачка $M''(x, 1)$ налази у P'' што је немогуће јер је $x > a$. Из овога следи да да се четвртина многоугла P'' која се налази у квадратну $(\frac{1}{2}, +\infty) \times (\frac{1}{2}, \infty)$ налази у унији правоугаоника $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \times (\frac{1}{2}, 1) \cup (\frac{1}{2}, 1) \times (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Односно површина многогла P је мања од $4 \times \frac{3}{4} = 3$, што је немогуће јер је његова површина већа од $n \geq 3$. Следи да овај случај води у контрадикцију.

2° Нека је $a \geq \frac{3}{2}$ (не може бити и $a \geq \frac{3}{2}$ и $b \geq \frac{3}{2}$, па можемо претпоставити да само овај случај важи). Како је многогуао P'' конвексан и не садржи тачку $(1, 1)$ то постоји права кроз $(1, 1)$ тако да се цео многоугао P'' налази са једне стране ове праве. Нека је једачина те праве $y-1 = k(x-1)$. Због $a \geq \frac{3}{2} \geq b$ следи да је $k < 0$. Нека је $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), B(a, \frac{1}{2})$, а C и D пресечне тачке праве $y - 1 = k(x - 1)$ са правама $x = a$ и $x = \frac{1}{2}$. Онда је $C(a, 1 + k(a - 1))$ и $D(\frac{1}{2}, 1 - \frac{k}{2})$. Четвртина површина многоугла P'' мања је од површине правоуглог трапреза $ABCD$. Онда је површина многоугла P'' мања од

$$4 \cdot \frac{1}{2}(a - \frac{1}{2})(\frac{1}{2} + k(a - 1) + \frac{1}{2} - \frac{k}{2}) = (2a - 1)(1 + k(a - \frac{3}{2})) \leq 2a - 1.$$

Половина многоугла P'' који се налази у полуравни $x \geq \frac{1}{2}$ има ширину $a - \frac{1}{2}$, како је многогуао P'' симетричан у односу на праву $x = \frac{1}{2}$ је ширина целог многогула P'' једнака $2a - 1$. Ширина многогула P'' једнака је ширини многогула P који се налази у квадрату странице n. Из овога следи да је та ширина $\leq n$, односно да је $2a - 1 \leq n$, тј. да је површина многоугла P'' мања од n. Како је површина многогула P'' једнака површини многогула P то је и површина многогула P мања од n, што је контрадикција са условом задатка.

Доказали смо да оба случаја воде у контрадикцију, тј. да је поцхетна претпоставка нетачна. Следи да многоугао P мора да садржи целобројну тачку.

31.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 342. Квадрат 3×3 је подељен на јединичне квадрате са 16 тачака. Одредити колико има правоуглих троуглова са теменима у тих 16 тачака.

Задатак 343. Одредити све природне бројеве n за које постоји правилан многоугао са n страницама који се може уписати у целобројну решетку.

Задатак 344. Доказати да сваки конвексан петоугао уписан у целобројну решетку садржи бар једну целобројну тачку у својој унутрашњости.

Задатак 345. У сваком чвору сем $(0,0)$ целобројне мреже се налази дрво полупречника r $(r > 0)$. Доказати да ловац који седи у $(0,0)$ не може да види зеца на растојању $\frac{1}{r}$ због дрвећа.

Задатак 346. Нека су P и O површина и обим конвексног многоугла који нема целобројних тачака у својој унутрашњости. Доказати да је $\frac{P}{O} < \frac{1}{2}$.

Литература

[1] А. Енгел, *Problem Solving Strategies*, Спрингер 1997.

[2] В.В. Прасолов, *Problems in plane and solid geometry*, електронско издање.

[3] Додатна настава у Математичкој гимназији

[4] Сајт *www.mathlinks.ro*

[5] *www.math.utah.edu/ treiberg/Steiner/SteinerSlides.pdf*

Предавање 32

Основне функције теорије бројева

Душан Милијанчевић, Математичка гимназија

32.1 Теоријски увод

Дефиниција 43. Функције $d : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ означава број делилаца природног броја.

Теорема 79. Ако је $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}$ растављање природног броја n на просте факторе онда је $d(n) = (1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n)$.

Дефиниција 44. Функције $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ означава број природних бројева који нису већу од датог природног броја и узајамно прости са њим.

Теорема 80. Ако је $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}$ растављање природног броја n на просте факторе онда је $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})...(1 - \frac{1}{p_k})$.

Дефиниција 45. Функције $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ означава збир делилаца датог природног броја.

Теорема 81. Ако је $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}$ растављање природног броја n на просте факторе онда је $\sigma(n) = \frac{p_1^{a_1+1}-1}{p_1-1} \frac{p_2^{a_2+1}-1}{p_2-1} ... \frac{p_k^{a_k+1}-1}{p_k-1}$.

Теорема 82. Функције d, φ и σ су мултипликативне.

32.2 Задаци за рад

Задатак 347. Ако је број делилаца броја n непаран доказати да је n потпун квадрат природног броја.

Решење: Ако је $d(n)$ непаран број, а $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}$ онда су бројеве $1+a_1, 1+a_2, ..., 1+a_k$ непарни, односно бројеви $a_1, a_2, ..., a_k$ су парни, па је самим тим n потпун квадрат.

Задатак 348. Доказати да важи: $d(n) \leq 2\sqrt{n}$.

Решење: За сваки делилац k од n за које је $k \leq \sqrt{n}$ број $\frac{n}{k}$ је такође делилац од n али већи од $\sqrt{n}$. Одавде следи да n не може имати више од $2\sqrt{n}$ делилаца.

Задатак 349. Ако важи $d(n) = 2$ и $d(n+1) = 3$, наћи $d(n+2)$.

Решење: Из $d(n) = 2$ следи да је n прост број, а из $d(n+1) = 3$ следи да је $n + 1 = x^2$, за неки природан број n. Онда је $n = (x + 1)(x - 1)$ из чега следи да је $x = 2$. Самим тим $n = 3$, па је $d(n + 2) = 2$.

Задатак 350. Ако је n сложен број доказати да је $\varphi(n) \leq n - \sqrt{n}$.

Решење: Како је n сложен број то постоји прост број $p \leq \sqrt{n}$ такав да $p|n$. Онда постоји $\frac{n}{p} \geq \sqrt{n}$ број дељивих са p, што значи да постоји бар $\sqrt{n}$ бројева који нису узјамно прости са n, па је $\varphi(n) \leq n - \sqrt{n}$. Знак једнакости важи ако и само ако је p једини такав прост број и важи $p = \sqrt{n}$, односно ако је n квадрат простог броја.

Задатак 351. Наћи све природне бројеве n такве да је $n = d(n)^2$.

Решење: Очигледно је $n = 1$ решење, па можемо претпоставити да је $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}$ растављање од n на просте чиниоце. Онда је n потпун квадрат, па су a_i $(1 \leq i \leq k)$ парни бројеви. Нека је $a_i = 2b_i$ за $1 \leq i \leq k$. Добијамо да важи $p_1^{b_1} p_2^{b_2} ... p_k^{b_k} = (2b_1+1)(2b_2+1)...(2b_k+1)$. Из овога следи да је n непаран број, па је $p_i \geq 3$. Како је $p_i^{b_i} \geq 3^{b_i} \geq 2b_i + 1$ то је једино решенеј $k = 1, p_1 = 3$ и $b_1 = 1$. Из овога следи да су решења $n = 1$ и $n = 9$.

Задатак 352. Ако је m број различитих простих фактора од n доказати да је $2^{2m} \leq 4n$.

Решење: Нека је $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_m^{a_m}$. Онда је $d(n) = (1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_m) \geq 2^m$, а како важи и $d(n) \leq 2\sqrt{n}$ то је $2^m \leq 2\sqrt{n}$, односно $2^{2m} \leq 4n$.

Задатак 353. Доказати да је $\sigma(n) - d(m)$ паран број где је m највећи непаран делилац од n.

Решење: Нека је $n = 2^k m$. Онда је $\sigma(2^k m) = \sigma(2^k)\sigma(m) \equiv_2 \sigma(m)$. Означимо са $p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_s^{a_s}$ растављање на просте чиниоце броја m. Како је m непаран то су сви p_i непарани за $1 \leq i \leq s$. Онда важи

$$\sigma(m) = \prod_{i=1}^{s} \frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i - 1} = \prod_{i=1}^{s} (1 + p_i + ... + p_i^{a_i}) \equiv_2 \prod_{i=1}^{s} (1 + a_i) = d(m).$$

Овим је задатак завршен.

Задатак 354. Доказати да за све природне бројеве a и n важи $n|\varphi(a^n - 1)$.

Имамо да важи $a^n-1|a^n-1$ и $a^n-1|a^{\varphi(a^n-1)}-1$, па $a^n-1|a^{(n,\varphi(a^n-1))}-1$. Како је $n \leq (n, \varphi(a^n-1)) \leq n$, то је $n = (n, \varphi(a^n-1))$ па важи $n|\varphi(a^n-1)$.

Задатак 355. Доказати да за сваки природан број n важи

$$\frac{\sigma(n!)}{n!} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Решење: Сви бројеви $\frac{n!}{i}$ за $1 \leq i \leq n$ су делиоци од $n!$ па је $\sigma(n!) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i}$. Ако обе стране поделимо са $n!$ добијамо тражену неједнакост.

Задатак 356. Доказати да за сваки природан број n важи $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

Доказујемо тврђење индукцијом по n. За $n = 1$ тврђење очигледно важи. Претпоставимо да тврђење важи за све $s < n$ за неки природан број n. Ако је n прост број онда тврђење задатка очигледно важи. Иначе, нека је $n = p^t m$ где је p прост број такав да је $(m, p) = 1$. Због мултипликативности функције $\varphi(n)$ имамо да важи

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = \sum_{d|m} \varphi(m) + \sum_{i=1}^{t} \sum_{d|m} \varphi(dp^i) =$$

$$\sum_{d|m} \varphi(m) + \sum_{d|m} \varphi(m)(\sum_{i=1}^{t} \varphi(p^t)) = \sum_{d|m} \varphi(m)(1 + (p-1)\sum_{i=1}^{t-1} p^i) =$$

$$\sum_{d|m} \varphi(m)p^t = p^t m = n,$$

што је и требало доказати. Овим је задатак завршен.

32.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 357. Ако важи $d(n) = 4$ и $d(n+1) = 5$, наћи $d(n+2)$.

Задатак 358. Наћи све n за које је $\varphi(n)$ непаран број.

Задатак 359. Доказати да је n прост број ако и само ако је $\varphi(n)+\sigma(n) = nd(n)$.

Задатак 360. Наћи све природне бројеве n такве да је $4n = d(n)^3$.

Задатак 361. Наћи све природне бројеве m за које постоји природан број n такав да је $\frac{d(n^2)}{d(n)} = m$.

Литература

[1] С. Гајовић, *Аритметичке функције*, Летњи математички камп - Шабац 2009.

[2] *www.mathlinks.ro*

Предавање 33

Дељивост

Срђан Стефановић, Шабачка гимназија

33.1 Теоријски увод

Дефиниција 46. Цео број a дељив је целим број b, различитим од нуле, ако постоји цео број q такав да је $a = bq$. Ако је број a дељив бројем b, писаћемо $b \mid a$ (b дели a).

Теорема 83. Сваки цео број a може се на јединствен начин помоћу датог природног броја b приказати у облику $a = bq + r$, $0 \leq r < b$, где су q и r цели бројеви. При том се q назива количником, а r остатком при дељењу броја a бројем b.

Дефиниција 47. Цео број d је заједнички делилац бројева a и b ако $d \mid a$ и $d \mid b$. Највећи међу заједничким делиоцима бројева a и b је највећи заједнички делилац бројева a и b. Обележавамо га са (a, b). За целе бројеве a и b кажемо да су узајамно прости ако је $(a, b) = 1$.

Теорема 84. Ако је d највећи заједнички делилац целих бројева a и b, онда постоје цели бројеви α и β такви да је $a\alpha + b\beta = d$.

Дефиниција 48. Заједничким садржаоцем целих бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$, различитих од нуле, називамо сваки број који је дељив сваким од бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Најмањи међу позитивним заједничким садржаоцима бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$ зове се најмањи заједнички садржалац тих бројева (он постоји) и обележава се са $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Теорема 85. Бројеви (a, b) и $[a, b]$ задовољавају једнакост $(a, b) \cdot [a, b] = |ab|$. Специјално, најмањи заједнички садржалац узајамно простих бројева једнак је апсолутној вредности њиховог производа.

Дефиниција 49. Цео број $p > 1$ је прост ако p нема ниједан делилац d, $1 < d < p$. Цео број $m > 1$ који није прост је сложен број.

Теорема 86. Сваки природан број N већи од 1 може се једнозначно изразити у облику производа простих чинилаца(са тачно71у до њиховог поретка).

33.2 Задаци за рад

Задатак 362. Постоји ли број који је потпун квадрат, а у декадном запису се записује помоћу 2010 јединица и неколико нула?

Решење: Збир цифара датог броја је 2010. Онда је он дељив са 3, али није са 9, па није потпун квадрат. Дакле, не постоји такав број.

Задатак 363. Нека су $a_1, a_2, \dots, a_n$ бројеви из скупа $-1, 1$, такви да је $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_na_1 = 0$. Доказати да је онда број н дељив са 4.

Решење: Како је сваки од н производа на левој страни једнакости $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_na_1 = 0$ једнак 1 или -1, број позитивних производа n_1 једнак је броју негативних производа n_2, тј. $2n_1 = 2n_2 = n$. С друге стране је $(a_1 \cdot a_2) \cdot (a_2 \cdot a_3) \cdot \dots \cdot (a_n \cdot a_1) = (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^2 = 1$, што значи да је број негативних производа n_2 паран. Дакле, број $n = 2n_2$ је дељив са 4.

Задатак 364. Нека су a и b узастопни цели бројеви и n природан број. Доказати да је $(an + b, bn + a)$ непаран број.

Решење: Од бројева a и b један је паран, а други непаран, одакле следи да је бар један од бројева $an + b, bn + a$ непаран. А како непаран број има само непарне делиоце онда је и $(an+b, bn+a)$ непаран број.

Задатак 365. Доказати да постоји број дељив са 2010 чијих су првих 10 цифара(у декадном запису) 1234567890.

Решење: Посматрајмо 2010 бројева:

$$1234567890, 12345678901234567890, \ldots, 12345678901234567890\ldots1234567890$$

(2010 пута поновљена група 1234567890). Ако је неки од њих дељив са 2010, тврђење је доказано. Ако није, онда се међу њима морају наћи два који дају исти остатак при дељењу са 2010. Разлика та два броја је дељива са 2010, а у декадном запису почиње са 1234567890. Тиме је тврђење доказано.

Задатак 366. Нека су a, b, c природни бројеви такви да је $\frac{ab}{a-b}$ и $(a, b, c) = 1$. Доказати да је $a - b$ потпун квадрат.

Решење: Претпоставимо да $a-b$ није потпун квадрат. Тада постоје прост број p и природан број k, такви да $p^{2k-1} \mid a-b$ и $p^{2k} \nmid a-b$. Због $a-b \mid ab$ следи $p^{2k-1} \mid ab$, па је бар један од бројева a, b дељив са p^k. Но, онда из $p^{2k-1} \mid a-b$ следи да исто важи и за други од тих бројева, па је $p^{2k} \mid ab$. Али тада $p \mid c$, па бројеви a, b, c нису узајамно прости. Контрадикција.

Задатак 367. Нека су x и y природни бројеви такви да је $xy = 2009^{2010}$. Доказати да тада број $x+y$ није дељив бројем 2008.

Решење: x и y су очигледно непарни бројеви. Стога је $(x+1)(y+1)$ очигледно дељив са 4. Онда је са 4 дељив и $(xy+1)+(x+y)$ дељив са 4. А како $(xy+1)$ даје остатак 2 при дељењу са 4, онда и $(x+y)$ даје остатак 2 при дељењу са 4, па $x+y$ није дељив са 4, а тиме није дељив ни бројем 2008.

Задатак 368. Нека је природан број $n+1$ дељив са 24. Доказати да је сума свих делилаца броја n такође дељива са 24.

Решење: Дати број n даје остатак 2 при дељењу са 3, па није потпун квадрат јер потпун квадрати дају остатке 0 и 1 при дељењу са 3. Онда је број његових делилаца паран, јер само потпун квадрати имају непаран број делилаца. Поделимо све делиоце од n на парове $(d, \frac{n}{d}$. Број n није дељив ни са 2 ни са 3, па важи да ни са 2 ни са 3 није дељив ниједан од његових делилаца d, тј. $(d, 24) = 1$. $d + \frac{n}{d} = \frac{d^2+n}{d} = \frac{(n+1)+(d^2-1}{d}$. Како је $(d, 24) = 1$, остаје нам да докажемо да $24 \mid (n+1)+(d^2-1)$. Како је услов задатка да $24 \mid n+1$, треба доказати да $24 \mid d^2-1$. $2 \nmid d$, па је $(d-1)(d+1)$ производ два узастопна парна броја и дељив је са 8. $3 \nmid d$, па d^2 даје остатак 1 при дељењу са 3. Онда имамо и да $3 \mid d^2-1$, тј. $24 \mid d^2-1$. Тиме је доказ завршен.

Задатак 369. Нека је d природан број различит од $2, 5, 13$. Доказати да се у скупу $2, 5, 13, d$ могу одабрати два различита броја a и b тако да $ab-1$ није квадрат целог броја.

Решење: Како је $2 \cdot 5 - 1 = 9 = 3^2$, $2 \cdot 13 - 1 = 25 = 5^2$ и $5 \cdot 13 - 1 = 64 = 8^2$. Претпоставимо супротно, нека је за свака два броја $a, b \in 2, 5, 13, d, a \neq b$, број $ab-1$ потпун квадрат. Специјално, нека је $2d-1 = x^2$, $5d-1 = y^2$, $13d-1 = z^2$ за неке целе бројеве x, y, z. Тада x мора бити непаран и $2d = x^2+1$, па је и d непаран. Значи, y и z су парни: $y = 2y_1$, $z = 2z_1$, y_1, $z_1 \in Z$. Сада из $z^2 - y^2 = 8d \equiv_8 2$ следи $(z_1 - y_1)(z_1 + y_1) = 2d$, па су бројеви y_1 и z_1 исте парности, што је контрадикција, јер је d непаран.

Задатак 370. Наћи бар један пар природних бројева a и b за које важи: (1) производ $ab(a+b)$ није дељив са 7; (2) број $(a+b)^7 - a^7 - b^7$ дељив је са 7^7.

Решење: Важи $(a+b)^7-(a^7+b^7=7ab[(a^5+b^5)+3ab(a^3+b^3)+5a^2b^2(a+b)]=7ab(a+b)(a^4+2a^3b+3a^2b^2+2ab^3+b^4)=7ab(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$. Како производ $ab(a+b)$ не треба да буде дељив са 7, остаје да бројеве a и b тако да одредимо да буде $7^3 \mid a^2+ab+b^2$. Мора да буде $(a+b)^2>a^2+ab+b^2 \geq 7^3=343$, тј. $a+b \geq 19$. Ставимо $b=1$. Стандардним поступком за решавање конгруенција добијамо да је $a=18$ једно решење конгруенције $a^2+a+1 \equiv_7^3 0$. Провера показује да бројеви $a=18$, $b=1$ задовољавају услове задатка.

Задатак 371. Нека су $d_1, d_2, \ldots, d_k$ сви делиоци природног броја n, такви да је $1=d_1<d_2<\ldots<d_k=n$. Наћи све бројеве n за које је $k \geq 4$ и $d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2=n$.

Решење: Прво докажимо да је n паран број. Претпоставимо супротно: нека је n непаран број. Тада су сви делиоци броја n непарни, па су зато d_1, d_2, d_3 и d_4 непарни. Следи да је $n=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2$ паран, што је противно полазној претпоставци. Како је n паран број, то је d_2. Из једнакости $1^2+2^2+d_3^2+d_4^2=n$ следи да је један од бројева d_3 и d_4 паран а други непаран. Разматраћемо два случаја:
Први случај: $d_3=2a$, $a>1$. Како је a делилац броја n мањи од d_3, то је $a=2$. Дакле $d_3=4$. Како је $n=1^2+2^2+4^2+d_4^2=21+d_4^2$, то n није дељиво са $4=d_3$. Контрадикција! Други случај: $d_4=2a$, $a>1$. Како је $a<d_4$ и $a \mid n$, то је $a=d_2=2$ или $a=d_3$. У првом случају било би $d_4=4$, $d_3=3$ и $n=1^2+2^2+3^2+4^2=30$. Како $4 \nmid 30$, овај случај отпада. Преостаје да је $a=d_3$. У том случају имамо да је $n=1^2+2^2+d_3^2+4d_3^2=5(1+d_3^2)$. Како $d_3 \mid n$ и како су бројеви d_3 и $1+d_3^2$ узајамно прости, то је $d_3=5$. Следи да је $d_4=10$ и $n=1^2+2^2+5^2+10^2=13-$. Лако је проверити да су $1, 2, 5i10$ четири најмања делиоца броја 130. Једини број који задовољава дати услов је 130.

33.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 372. Доказати да бројеви 2^n-1 и 2^n+1, $n>2$ и n је природан број, не могу истовремено бити прости.

Задатак 373. Дато је n бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Доказати да се од њих може одабрати неколико чији је збир квадрата дељив са n.

Задатак 374. (а) Ако је 2^n-1 прост број, доказати да је и n прост број. (б) Ако је 2^n+1 прост број, доказати да је $n=2^k$.

Задатак 375. Доказати да број од хиљаду цифара које су све петице осим можда једне не може бити потпун квадрат.

Задатак 376. Наћи све троцифрене бројеве који при дељењу са 11 дају број једнак збиру квадрата цифара полазног броја.

Литература

[1] В. Мићић, З. Каделбург, Д.Ђукић, *Uvod u teoriju brojeva*, Друштво математичара Србије 2004.

[2] В. Јанковић, З. Каделбург, Павле Младеновић, *Medjunarodne i balkanske matematichke olimpijade*, Друштво математичара Србије 1996.

[3] Н. Икодиновић, *Tangenta-chasopis za matematiku i rachunarstvo*, Друштво математичара Србије.

Предавање 34

Елементарна геометрија 1

Ђорђе Ракић, Математичка гимназија

34.1 Теоријски увод

Дефиниција 50. Два троугла ABC и $A_1B_1C_1$ су слични (у ознаци $ABC \sim A_1B_1C_1$) акко су следећи еквивалентни услови задовољени:
1)$AB : BC : AC = A_1B_1 : B_1C_1 : A_1C_1$
2)$AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1$ и $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$
3)$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ и $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$

Дефиниција 51. Нека је $k = AB : A_1B_1$. Овај број к називамо коефицијентом сличности.

Теорема 87. Однос површина два слична троугла је једнак квадрату коефицијента сличности.

Доказ. Како је површина троугла $P = \frac{1}{2}a \cdot h_a$, а и из $ABC \sim A_1B_1C_1$ важи да је $a : h_a = a_1 : h_{a1} = k$. Онда је $a_1 = a \cdot k$ и $h_{a1} = h_a \cdot k$, па је однос површина $P : P_1 = k^2$.

Дефиниција 52. Два троугла ABC и $A_1B_1C_1$ су подударни (у ознаци $AVC \cong A_1V_1S_1$) акко је њохов коефицијент сличности $k = 1$.

Постоје 4 става подударности троуглова: SSS, SUS, USU и SSU.

34.2 Задаци за рад

Задатак 377. Доказати да су оштроугли троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ ако су подударне висине CD и C_1D_1, ивице AB и A_1B_1 и углови ACD и $A_1C_1D_1$.

Решење: Приметимо да су троуглови ADC и $A_1D_1C_1$ подударни. Зашто? Онда су и троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ подударни.

Задатак 378. Нека је $ABCD$ произвољан четвороугао и нека су P, Q, K, L, M, N средишта дужи AB, CD, BC, AD, AC, BD редом. Доказати да се дужи PQ, KL и MN секу у једној тачки, која их полови.

Решење: $PL \parallel BD \parallel QK$ и $2PL = 2QK = BD$, Дакле четвороугао $PLKQ$ је паралелограм, тј. дијагонале му се секу и полове. Аналогно се доказује и за четвороугао $NQML$. То доводи до закључка да се све дужи $PK, MNiQL$ секу у једној тачки која их полови.

Задатак 379. Ако је CD висина над хипотенузом AB правоуглог троугла ABC и M и N средишта дужи CD и BD, доказати да је $AM \perp CN$.

Решење: Продужимо дуж MN до пресека са краком CA. Тачка пресека је R. $MN \parallel CB$ из чега следи да је $NR \perp CA$. Како је тачка M тацка пресека висина троугла CAN, онда је она његов ортоцентар, тј. $AM \perp CN$.

Задатак 380. Нека је M средиште ивице CD квадрата $ABCD$ и P тачка дијагонале AC таква да је $3PA = PC$. Доказати да је угао BPM прав.

Решење: Нека права паралелна БЦ сече странице АБ и ЦД у тачкама Ф и Е, редом. Онда су троуглови ФБП и ЕМП подударни (зашто?), па је $\angle BPM = 90°$.

Задатак 381. Нека је D средиште хипотенузе AB правоуглог троугла ABC ($AC > BC$). Ако су E и F пресеци полуправих CA и CB са правом која је у тачки D нормална на правој CD, а M средиште дужи EF, доказати да је $CM \perp AB$.

Решење: Нека је S пресечна тачка дужи AB и CM. Троугао BSC је сличан троуглу ACB, па је угао BSC прав.

Задатак 382. Ако је $ABCD$ конвексан четвороугао, одредити тачку P тако да збир $AP + BP + CP + DP$ буде минималан.

Решење: Тачка P се добија у пресеку дијагонала. Предпоставимо да је то нека друга тачка различита од пресека дијагонала. Онда је по неједнакости троугла : $(AP + CP) + (BP + DP) > AC + BD$. Толики је збир када је тачка P у пресеку дијагонала што значи да је тада овај збит минималан.

Задатак 383. Дата је раван у потпуности попрскана црвеном и плавом бојом. Доказати да у тој равни постоји правилан троугао чија су сва темена исте боје.

Решење: Изаберимо произвољан правилан шестоугао и његов центар. Нека је, не умањујући општост, центар шестоугла обојен црвено. Међу свим осталим уоченим тачкама постоји бар једна обојена црвено. (Шта би било да је нема?) Њој суседне тачке су сигурно плаве. (Зашто?) Ако ту црвену тачку нумеришемо са 1, и онда наставимо нумерисање супротно од смера казаљке на сату, тачка 4 такође мора бити црвене боје. (Зашто?) Међутим, тачка 3 морајa због ње бити обојене плаво. У том случају како год обојили тацку у пресеку правих 1-2 и 3-4, добијамо једнакостраничан троугао коме су сва темена исте боје.

Задатак 384. Нека је O произвољна тацка у унутрашњости области троугла ABC, таква да је $\angle OBA = \angle OCA$. Ако су P и Q подножја управних из те тачке на ивицама AB и AC, а A_1 средиште ивице BC, доказати да је $A_1P = A_1Q$.

Решење: Уочимо тачке M и N која су средишта ивица OB и OC, редом. Онда је четвороугао OMA_1N . Онда је $QN = MA_1$ и $NA_1 = MP$ и $\angle A_1MP = \angle A_1MO + \angle OMP = \angle A_1MO + \angle MOP = \angle QNA_1$. Онда су троуглови QNA_1 и PMA_1 подударни, па је $A_1P = A_1Q$.

Задатак 385. Нека је K средиште ивице CD правоугаоника $ABCD$ и L подножје управне из темена B на дијагонали AC. Ако је S средиште дужи AL, доказати да је угао KSB прав.

Решење: Уочимо праву паралелну са AB и CD, која пролази кроз S. Нека је пресек те праве и странице BC тачка P. Пресек дужи ST и BL (тачка H) је ортоцентар троугла SBC, па је права CH нормална на SB. Четвороугао $SHCK$ је паралелограм ($SH = \frac{1}{2}AB = KC$ и $SH \parallel KC$) па је и $KS \perp SB$.

Задатак 386. Ако је (n, m) мрежа правилних n-тоуглова којих се по m сустиче у сваком темену прекривајући целу еуклидску раван, одредити све могуће вредности за m и n.(Питагора са Самоса)

Решење: Унутрашњи угао правилног многоугла је $\alpha = 180°(1 - \frac{2}{n})$. Како се у сваком темену ове "мреже"сустиче тачно m оваквих правилних многоуглова, онда се поставља једнакост $m \cdot \alpha = 360°$. Сређивањем добијамо једначину $(m-2)(n-2) = 4$. Како су и m и n природни бројеви већи од два, ова једначина има решења само за $(m, n) \in \{(3, 6), (6, 3), (4, 4)\}$.

34.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 387. У $\triangle ABC$ је $\angle BCA > 90°$ и $\angle CAB < \angle ABC$. Тангента на описану кружницу k у тачки A сече праву BC у тачки P. Нека је M тачка на k, таква да је $PM = PC$ (различита од тачке C), N пресек правих CM и AB, а D пресек описане кружнице $\triangle AMN$ и праве AP (различит од A). Доказати да је $CD \parallel AB$.

Задатак 388. Круг уписан у троугао ABC додирује странице BC, CA и AB у тачкама D, E и F редом. Нека су K, K_1, K_2, K_3 кругови описани око троуглова ABC, AEF, BDF и CDE редом. Кругови K и K_1 се секу у тачкама A и P, K и K_2 у тачкама B и Q, и K и K_3 у тачкама C и R. Доказати да су праве PD, QE и RF конкурентне.

Задатак 389. Дат је неједнакокраки трапез $ABCD$. Тачка A_1 је тачка пресека кружнице описане око троугла BCD и праве AC ($A_1 \neq C$). Аналогно одређујемо тачке B_1, C_1, D_1. Докажите да је $A_1B_1C_1D_1$ такође трапез.

Задатак 390. Уочимо висине AA_1, BB_1, CC_1 оштроуглог троугла ABC. Доказати важи $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$. Колики је коефицијент сличности?

Задатак 391. Уочимо висине AA_1, BB_1, CC_1 оштроуглог троугла ABC. Доказати да тачка симетрична тачки A_1 у односу на AC лежи на правој B_1C_1.

Литература

[1] В.В. Прасолов, *Problems in plane and solid geometry*, електронско издање.

[2] Ђ. Ракић - Ојлерова права и кружница, Летњи ма Шабац 2009

[3] Група аутора, Геометрија, Круг.

[4] Група аутора, Свеска 17, ДМС.

[5] Група аутора, Свеска 49, ДМС.

Предавање 35

Елементарна геометрија 2

Ђорђе Ракић, Математичка гимназија

35.1 Теоријски увод

Дефиниција 53. Два троугла ABC и $\mathrm{A_1B_1C_1}$ су слични (у ознаци $ABC \sim A_1B_1C_1$) акко су следећи еквивалентни услови задовољени:
1)$AB : BC : AC = A_1B_1 : B_1C_1 : A_1C_1$
2)$AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1$ и $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$
3)$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ и $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$

Дефиниција 54. Нека је $k = AB : A_1B_1$. Овај број к називамо коефицијентом сличности.

Теорема 88. Однос површина два слична троугла је једнак квадрату коефицијента сличности.

Доказ. Како је површина троугла $P = \frac{1}{2}a \cdot h_a$, а и из $ABC \sim A_1B_1C_1$ важи да је $a : h_a = a_1 : h_{a1} = k$. Онда је $a_1 = a \cdot k$ и $h_{a1} = h_a \cdot k$, па је однос површина $P : P_1 = k^2$.

Дефиниција 55. Два троугла ABC и $\mathrm{A_1B_1C_1}$ су подударни (у ознаци $AVC \cong A_1V_1S_1$) акко је њохов коефицијент сличности $k = 1$.

Постоје 4 става подударности троуглова: SSS, SUS, USU и SSU.

35.2 Задаци за рад

Задатак 392. Нека су P, Q, R произвољне тачке ивица BC, AC, AB троугла ABC. Доказати да се кругови описани око троуглова AQR, PBR, PQC секу у једној тачки. (Микелова тачка)

Решење: Означимо кругове описане око троуглова AQR, PBR и PQC са k_a, k_b, k_c и унутрашње углове троугла ABC редом са α, β, γ. Нека је S друга тачка пресека кругова k_b и k_c. Тада су четвороуглови $BPSR$ и $PCQS$ тетивни, па је $\angle RSP = 180° - \beta$ и $\angle QSP = 180° - \gamma$. Следи да је $\angle RSQ = \beta + \gamma$, а затим и $\angle RAQ + \angle RSQ = \alpha + \beta + \gamma = 180°$. Дакле, и четвороугао $ARSQ$ је тетиван, па се око њега може описати круг. Међутим, како је то круг k_a, онда се дати кругови секу у тачки S.

Задатак 393. Нека је P произвољна тачка на крацем луку AB круга k описаног око правоугаоника $ABCD$, а L и M подножја управних из тачке P на дијагоналама AC и BD. Доказати да дужина дужи LM не зависи од положаја тачке P.

Решење: Нека је тачка O центар круга k. Четвороугао $PMOL$ је тетиван . Зашто? Њему одговарајући описани круг је k_1. Његов пречник је полупречник великог круга k. Такође, тетива LM у кругу k_1 је тетива над периферијским углом AOB. Како су сви кругови k_1 међусобно подударни (димензије им не зависе од избора тачке P) то значи да це и све тетиве LM бити међусобно подудатне (неце зависити од избора тачке P).

Задатак 394. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао. Доказати да се кругови k_1 и k_2 уписани у троуглове ABC и ACD додирују акко је четвороугао $ABCD$ тангентан.

Решење: Нека кругови k_1 и k_2 додирују странице AB, BC, CA, CD, DA и AC редом у тачкама P, Q, X, R, S, Y. Онда важи: $AX = AP = \frac{1}{2}(AX + AP) = \frac{1}{2}(AC - CX + AB - BP) = \frac{1}{2}(AC - CQ + AB - BQ) = \frac{1}{2}(AC + AB - BC)$. Исто тако важи и $AY = \frac{1}{2}(AC + AD - DC)$. Тачке се поклапају акко $X = Y$, тј. акко је $AX = AY$, тј. акко је $AB + DC = AD + BC$. Ова једнакост важи акко је четвороугао $ABCD$ тангентан.

Задатак 395. На страници DC квадрата $ABCD$ дата је тачка M. Симетрала угла BAM сече страницу BC у тачки N. Доказати да је $AM = DM + BN$.

Решење: Нека је тача M_1 тачка на правој BC, таква да је $BM_1 = DM$ и да важи $\beta(C, B, M_1)$. Означимо са $\alpha = \angle NAB = \angle NAM$. Троуглови ABM_1 и ADM су подударни, одакле следи $AM_1 = AM$, $\angle BAM_1 = \angle DAM = 90° - 2\alpha$, $\angle ANM_1 = 90° - \alpha$, $\angle NAM_1 = \alpha + \angle BAM_1 = 90° - \alpha$. Значи $\angle ANM_1 = \angle NAM_1$, одакле је $AM_1 = NM_1$, па је $AM = NM_1 = NB + BM_1 = NB + DM$.

Задатак 396. У једнакокраком троуглу ABC спуштена је нормала HE из средишта базе BC на крак AC. Ако је O средиште дужи HE, доказати да су дужи AO и BE узајамно нормалне.

Решење: Уочимо тачку D , средиште дужи BH. $\triangle BHA \sim \triangle HAE$. Дакле, $\angle DAH = \angle OAE$, па је $\angle DAO = \angle HAE$.

Задатак 397. Ако су A_1, B_1 и C_1 средишта страница троугла ABC, тада се Ојлерове праве троуглова ABC и $A_1B_1C_1$ поклапају. Доказати.

Решење: Како су четвороуглови $AB_1C_1A_1$, $A_1B_1C_1B$ и $A_1B_1C_1C$ паралелограми, онда су тежишта троуглова ABC и $A_1B_1C_1$ иста. Како су и симетрале страница троугла ABC уједно и висине троугла $A_1B_1C_1$ онда имамо да је ортоцентар троугла $A_1B_1C_1$ центар описаног круга троугла ABC.

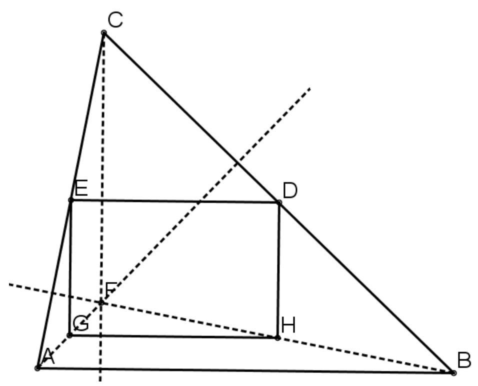
Задатак 398. Нека је дат правоугли троугао ABC са правим углом у темену C. Тачке D и E деле страницу BC на три једнака дела. Ако важи да је $BC = 3AC$, колики је збир $\angle AEC + \angle ADC + \angle ABC$?

Решење: $\angle AEC = 45°$. Нека је AC јединична дужина. Онда је $AC = EC = ED = DB = 1$, $AE = \sqrt{2}$, $AD = \sqrt{5}$, $AB = \sqrt{10}$. Одавде видимо да је $\triangle AED \sim \triangle AEB$. Онда је $\angle AEC + \angle ADC + \angle ABC = 90°$.

Задатак 399. Средишта ивица, подножја висина и средишта дужи одређениих ортоцентром и теменима произвољног троугла припадају једном кругу.

Решење: За почетак, доказаћемо лему коју ћемо користити у даљем решавању задатка.

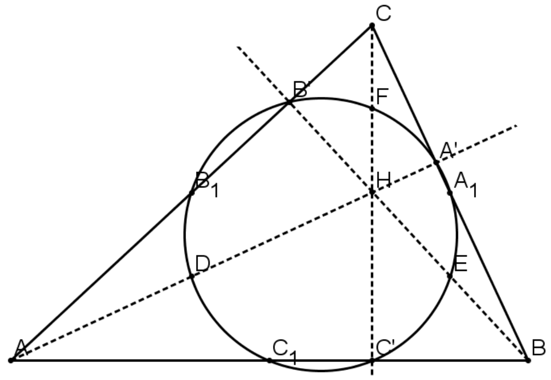
Лема 14. Нека је дат троугао ABC, као на слици. Ако су E и D средишта страница AC и BC, а G и H средишта дужи AF и BF, онда је четвороугао $GHDE$ правоугаоник.



Доказ леме 1. Дужи ED, GH и GE су средње линије троуглова ABC, ABF и AFC. То значи да су дужи ED и GH паралелне и једнаке, што доказује да је четвороугао $GHDE$ паралелограм. Довољно је још доказати да је један од углова прав, да би тврђење било тачно. Како је EG паралелно висини CF, која је нормална на AB, па самим тим и на GH, добија се да је и EG нормално на GH, односно, четвороугао $GHDE$ је правоугаоник.

Сада можемо наставити са доказивањем задатка.

Посматрајмо четвороуглове DEA_1B_1 и C_1A_1FD. По претхоној леми, они су правоугаоници, са заједничком дијагоналом DA_1. То значи да се свих шест тачака налази на заједничкој кружници. Како је и FC_1 такође пречник кружнице, а угао $FC'C_1$ прав, то и тачка Ц' припада споменутој кружници. На исти начин се показује и за остала подножја висина.

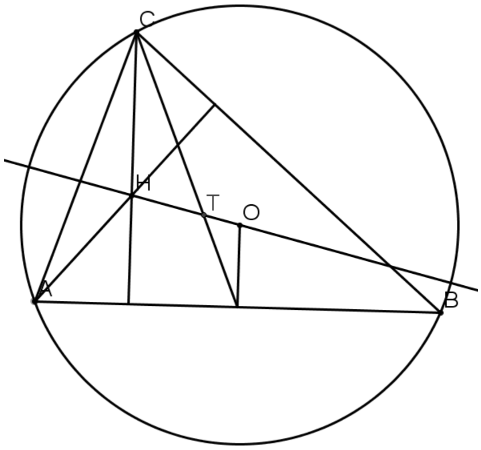


Задатак 400. Ако је H ортоцентар троугла ABC, тада троуглови ABC, ABH, BCH и CAH имају један заједнички Ојлеров круг.

Решење: Довољно је показати за троуглове AHC и ABC. Тачке D и F су средишта страница AH и CH, па припадају Ојлеровом кругу троугла ABC и AHC. Тачка B' такође припада и једном и другом кругу, јер је за оба ктуга она подножје висине из B односно H. Ојлерови кругови троуглова AHC и ABC се секу у три различите тачке што значи да се поклапају. На исти начин се доказује и за троуглове AHB и BHC.

Задатак 401. Ортоцентар, тежиште и центар описаног круга припадају истој правој. Доказати.

Решење: Посматрајмо тацку D, дијаметрално супротну тачки B. Центар описаног круга и подножја тежишних линија из темена A и C, деле дужи BD, BC и BA у односу $1:1$. То значи да су дужи OC' и OA' паралелне дужима CH и AD, односно AH и DC. Одатле се добија да је четвороугао $AHCD$ паралелограм. Како је $AD = CH$ и $OC' = 2 \cdot AD$ и $\triangle OTC' \sim \triangle HTC$, то тачка пресека дужи HO и CC' дели дуж CC' у односу $2:1$, односно је индентички једнака са тежистем троугла, што доказује да тежисте T троугла ABC припада Ојлеровој правој и дели дуж HO у односу $2:1$.



35.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 402. Дата је права и две тачке A и B које су са исте стране те праве и на једнаком растојању од ње. Како помоћу шестара и лењира наћи на правој тачку C такву да производ $AC \cdot CB$ буде најмањи?

Задатак 403. Странице троугла ABC виде се из тачке T под угловима $120°$. Докажите да се праве симетричне правама AT, BT и CT у односу на праве BC, CA и AB секу у једној тачки.

Задатак 404. У једнакокраком троуглу ABC $(AB = BC)$ је $\angle B = 80°$. Нека је P унутрашња тачка троугла таква да је $\angle PAC = 40°$, $\angle ACP = 30°$. Одредити $\angle BPC$.

Задатак 405. Кружница додирује две странице троугла и две његове тежишне линије. Доказати да је тај троугао једнакокрак.

Задатак 406. На страници AB квадрата $ABCD$ дата је тачка E, а на страници CD тачка F, тако да је $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{2}$, $CF = FD$. Дијагонала AC сече дуж ED у тачки M, а дуж BF у тачки N. Доказати да су троуглови AME и CFN слични.

Литература

[1] В.В. Прасолов, *Problems in plane and solid geometry*, електронско издање.

[2] Ђ. Ракић - Ојлерова права и кружница, ЛМШ Шабац 2009

[3] Група аутора, Геометрија, Круг.

[4] Група аутора, Свеска 17, ДМС.

Предавање 36

Логичко-комбинаторни задаци (Дирихлеов и екстремални принцип)

Тамара Шумарац, Математичка гимназија

36.1 Теоријски увод

Дирихлеов принцип: Уколико је $n \cdot k + 1$ објеката распоређено у k скупова, тада се у једном од тих скупова мора налазити барем $n + 1$ објеката.

Екстремални принцип: Екстремани принцип је принцип максимизовања или минимизовања неких величина.

36.2 Задаци за рад

Задатак 407. Посматрајмо низ четвороцифрених бројева 0006, 0036, 0216, 1296, 7776, 6656,..., који представљају последње четири цифре бројева: 6^1, 6^2, 6^3,... Доказати да поцев од неког цлана тај низ постаје периодичан.

Решење: Пошто постоји само 10^4 могућности за четвороцифрени завршетак ових бројева то сигурно постоје два броја која имају последње четири цифре једнаке. Нека су то бројеви 6^k и 6^{k+m}, где су k и m природни бројеви. Њихова разлика је дељива са 10^4 тј. $6^k - 6^{k+m} = n \cdot 10^4$. Тада ће и бројеви 6^{k+p} и 6^{k+m+p} имати једнаке последње четири цифре, јер је $6^{k+p+m} - 6^{k+p} = 6^p(6^k - 6^{k+m}) = 6^p \cdot n \cdot 10^4$. Овиме је доказано да је посматрани низ последњих четири цифара периодичан почев од неког члана.

Задатак 408. Дате су две кружнице од којих свака има дужину $1997cm$. На једној од њих обележено је 1997 тачака, а на другој неколико лукова чија дужина јемања од $1cm$. Доказати да се ове кружнице могу ставити једна на другу тако да ниједна од обележених тачака не падне ни на један обележени лук.

Решење: Узмимо на првој кружници још једну тачку M. Ставимо прву кружницу на другу и окрећимо прву кружницу по другој, остављајући другу непокретном. При томе обележимо све положаје тачке M при којима прва од обележених тачака пада на један(неки) од датих лукова. Ови положаји тачке M попуниче неколико лукова чији је збир дужина мањи од $1cm$. Слично урадимо и са преосталих 1996 тачака на првом кругу. Овако ће први круг попунити луковима од свих 1997 тачака, и збир дужина тих лукова биће мањи од $1997 \cdot 1cm$јер је за сваку тачку збир дужина "њених"лукова мањи од $1cm$. Тако да ће по Дирихлеовом принципу сигурно постојати тачка на првом кругу која не припада ни једном доцртаном луку. Та тачка одговара положају тачке M при коме ниједна од осталих тачака на кругу не упада ни у један обележени лук.

Задатак 409. Свака од 9 правих дели квадрат на два четвороугла чије се површине односе као $2 : 3$. Доказати да бар 3 од тих 9 правих садрже заједничку тачку.

Решење: Уочимо две средње линије које деле квадрат на четири мања међусобно подударна квадрата. Свака од датих правих дели кквадрат на два правоугла трапеза чије су висине једнаке страници квадрата. Средње линије та два трапеза су дужи чија је унија једнака једној од средњих линија квадрата. Како је површина трапеза једнака производу средње линије и висине, а површине два трапеза на које је квадрат подељен било којом од датих правих односе се као $2 : 3$, то свака од датих правих дели једну средњу линију квадрата у истом односу $2 : 3$. Постоје укупно четири тачке које деле неку од средњих линија у поменутом односу, а како је број датих правих 9, то по Дирихлеовом принципу неке три од њих садрже једну од поменутих деоних тачака.

Задатак 410. На свакој планети једног система седи астроном и посматра најближу планету. Растојања међу планетама су међусобно различита. Ако је број планета непаран, доказати да постоји планета коју нико не посматра.

Решење: Ако једну исту планету посматрају два астронома онда постоји планета коју нико не посматра. Користећи се овим тврђењем решићемо задатак. Нека у систему има $2k + 1$ планета. Означимо са A и B оне две планете између којих је растојање најкраће. Тада астроном са планете A посматра планету B, и астроном са планете B посматра планету A. Ако јос неки астроном који није са планете A или B посматра планету A или B по горњем тврђењу сигурно постоји планета коју нико не посматра. Ако ниједан астроном који није са планете A или B не посматра ове две планете,онда можемо да "уклонимо"планете A и B и посматрамо преосталих $2k-1$ планета. И овде поступамо исто као и са $2k+1$ планетом. Тражимо најкраће растојање и "уклањамо"парове планета. Како има непаран број планета то ће после k "уклањања"остати једна планета коју нико не посматра.

Задатак 411. У равни је дато 25 тачака, тако да за произвољне три од њих постоје 2 чије је растојање мање од 1. Доказати да постоји круг полуречника 1 унутар кога се налази бар 13 од датих тачака.

Решење: Нека је A произвољна од датих тачака и k_1 круг са центром A и полупречником 1. Ако се све дате тачке налазе унутар круга k_1, тврђење је доказано. У противном постоји тачка B која није унутар круга k_1, тј. таква да растојање између тачака A и B није мање од 1. Нека је k_2 круг са центром Б и лоупречником 1. Свака од датих 25 тачака налази се унутар круга k_1 или унутар круга k_2. Заиста ако би постојала тачка C која није унутар ниједног од тих кругова, онда међу тачкама A, B, C не би постојале 2 тачке чије је растојање мање од 1, што је противно услову задатка. Сада на основу Дирихлеовог принципа добијамо да се унутар бар једног од кругова k_1 и k_2 налази бар 13 тачака.

Задатак 412. На игранци је 20 девојака и 20 младића формирало 20 парова за игру. Разлика у висини између младића и девојке у сваком пару је мања од $10cm$. Ако се парови формирају тако да највиши младић плеше са највишом девојком, други по висини младић са другом по висини девојком итд, докажите да ће опет у сваком пару разлика у висини бити мања од $10cm$.

Решење: Нека су $a_1, a_2, ..., a_{20}$ висине младића и $b_1, b_2, ..., b_{20}$ висине девојака при чему важи $a_1 > a_2 > \cdots > a_{20}$ и $b_1 > b_2 > \cdots > b_{20}$. Претпоставимо да је $a_k - b_k \geq 10$ и да је k најмањи индекс за који важи та неједнакост. Онда су при још првом формирању парова са младићима чије су висине $a_1, a_2, ..., a_k$ могле играти само девојке чије су висине $b_1, b_2, ..., b_{k-1}$, а то је контрадикција.

Задатак 413. У некој држави између свака два града постоји једносмерна авионска линија. Доказати да постоји град из којег се у сваки други град може стићи авионом са највише једним преседањем.

Решење: Нека је A град из ког полази највише једносмерних авионских линија, k. Нека те линије повезују град A са градовима $C_1, C_2, ..., C_k$. Докажимо да је A баш тај град који се тражи у задатку. Претпоставимо супротно, претпоставимо да постоји град B у који се не може доци из града A са највише једним преседањем. Како између града A и B постоји једносмерна авионска линија она мора бити усмерена ка A, јер у супротном би се могло стићи из A у B директно. Слично једносмерна авионска линија полази из B и мора да се завршава у $C_1, C_2, ...iC_k$ јер би у супротном из града A могло да се дође у град B са једним преседањем. Дакле из града B полази $k+1$ једносмерних авионских линија сто је контрадикција, јер по претпоставци задатка највећи број једносмерних линија који полазе из једног града је k. Дакле из A се може доћи у B са највише једним преседањем чиме је тврђење доказано.

Задатак 414. У свакој од три школе има по n ученика. Сваки ученик познаје бар $n+1$ ученика из остале две школе. Доказати да постоје три ученика, по један из сваке школе, који се међусобно познају.

Решење: Претпоставимо супротно да не постоје три ученика, по један из сваке школе, који се међусобно познају. Обележимо те три шоле са A, BiC. Одаберимо оног ученика који познаје највише ученика из неке друге шоке. Без умањења општости нека је тај ученик M из школе A и нека он познаје k ученика (максимални број) из школе B. Тада он познаје бар $n+1-k$ учника из школе C. Одаберимо једног од ученика из школе C, нека је он N, који M познаје. Тада он из школе B може да познаје највише $n-k$ ученика јер у супротном би постојала три човека из сваке школе који се међусобно познају. Тада N из школе B мора да познаје бар $(n+1)-(n-k)=k+1$ ученика из школе A што је контрадикција јер је највећи број људи који ученик из једне школе познаје из друге школе k. Дакле претпоставка не важи чиме је доказано тврђење из задатка.

Задатак 415. Доказати да једначина $x^4+y^4=z^2$ нема решења у скупу природних бројева.

Решење: Претпоставимо да постоји решење задатка и да је (x, y, z) такво решење задатка при коме је z минимално. Можемо претпоставити да су (x, y, z) узајамно прости у паровима. Један од бројева x, y је паран и нека је то без умањења општости y. Како је (x^2, y^2, z) примитивна Питагорина тројка, постоје узајамно прости природни бројеви m, n такви да је:

$x^2=m^2-n^2$, $y^2=2mn$ и $z=m^2+n^2$.

Тројка (x, n, m) је такође примитивна Питагорина тројка, па постоје узајамно прости $u, v \in \mathbb{N}$ такви да је

$m=u^2+v^2$, $x=u^2-v^2$, $n=2uv$.

Једначина $y^2=2mn$ своди се на $(\frac{y}{2})^2=uv(u^2+v^2)$. Међутим због $(u, v)=1$ су бројеви uv и u^2+v^2 узајамно прости, а њихов производ је квадрат, па зато постоје $c, d \in \mathbb{N}$ за које је

$uv=d^2$ и $u^2+v^2=c^2$.

Најзад, због $(u, v)=1$ и $uv=d^2$ постоје $a, b \in \mathbb{N}$ такви да важи $u=a^2$ и $v=b^2$, па друга једначина изнад постаје:

$u^2 + v^2 = a^4 + b^4 = c^2$

Дакле (a, b, c) је решење полазне једначине и при томе је очигледно $c < z$, што је контрадикција са избором решења (x, y, z). Дакле нема решења у скупу природних бројева.

Задатак 416. Решити једначину у скупу природних бројева: $x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)$.

Решење: Претпоставимо да задатак има решења. Одаберимо оно решење које има најмање $x^2 + y^2$. Нека је то решење (a, b, c, d). Дакле важи: $a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$ тј. $3|a^2 + b^2$ тј. $3|a$ и $3|b$. Нека је $a = 3a_1$ и $b = 3b_1$. Дакле $a^2 + b^2 = 9(a_1^2 + b_1^2) = 3(c^2 + d^2)$ тј. $c^2 + d^2 = 3(a_1^2 + b_1^2)$ Постоји ново решење (c, d, a_1, b_1) при чему је $c^2 + d^2 < a^2 + b^2$ што је контрадикција.

36.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 417. Дата су 52 произвољна природна броја. Доказати да међу њима постоје два чији су или збир или разлика дељиви са 100.

Задатак 418. Комисија је одржала 40 састанака. Сваком састанку је присуствовало 10 чланова, при чему никоја два члана комисије нису били заједно на састанку више од једног пута. Доказати да комисија има више од 60 чланова.

Задатак 419. На такмичењу из математике сваки од 80 такмичара ресхава пет задатака. Сваки задатак оцењује се са $0, 1, 2, 3, 4$ или 5 поена. Доказати да постоје четири такмичара који су освојили једнак број поена (у збиру за свих пет задатака).

Задатак 420. Решити једначину: $x^2 + y^2 = 7(z^2 + u^2)$.

Задатак 421. Дато је n тачака у равни. Било које три тачке формирају троугао ција је површина ≤ 1. Доказати да свих н тачака могу да се сместе у троугао чија је површина ≤ 4.

Литература

[1] А. Енгел, *Problem Solving Strategies*, Спрингер 1997.

[2] В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић, *Увод у теорију бројева*, Београд 2004.

[3] Д. Стевановић, М. Милошевић, В. Балтић, *Дискретна математика*, Материјали за младе математичаре - свеска 43, Београд 2004.

[4] П. Младеновић, *Комбинаторика*, Београд 2001.

[5] Додатна настава у Математичкој гимназији

Предавање 37

Математичка индукција

Тамара Шумарац, Математичка гимназија

37.1 Теоријски увод

Нека је $P(n)$ исказ који се односи на природни број n. Тада је он тачан за све природне бројеве ако су испуњени услови:

1. $P(1)$ је тачан исказ
2. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ је тачан исказ за све $n \in N$.

Постоје тврђења код којих $P(n)$ није тачно за неколико најмањих природних бројева али вази за све остале природне бројеве. Нека је k најмањи број за који важи да је $P(k)$ тачан исказ. $P(n)$ је тачан исказ ако су испуњени услови:

1. $P(k)$ је тачан исказ;
2. $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ је тачан исказ за све $n \geq k$.

Исказ $P(n+1)$ је тачан ако важи следеће:

1. $P(1), ..., P(k)$ је тачно за неко k;
2. $P(n-k+1) \wedge ... \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

$P(n)$ је тачан исказ ако важи:

1. $P(1)$ је тачан исказ;
2. $P(1) \wedge ... \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

тештбф**Регресивна индукција:** $P(n)$ је тачан исказ ако важи:

1. $P(n)$ је тачно за бесконачно много природних бројева н.
2. За све природне бројеве $n > 1$, $P(n) \Rightarrow P(n-1)$.

37.2 Задаци за рад

Задатак 422. Доказати да је $2^n > n$ за све $n \in \mathbb{N}$.

Решење:

1. Очигледно је $2^1 > 1$.

2. Претпоставимо да је за неки природан број n, $2^n > n$.

3. Из претпоставке да је $2^n > n$ следи да је $2 \cdot 2^n > 2n$ тј. $2^{n+1}) > 2n = n + n \geq n + 1$. Одавде тврђење важи за свако $n \in N$.

Задатак 423. Доказати следеће идентитете за све природне бројеве n:

а)$1^2 + 4^2 + \cdots + (3n-2)^2 = \frac{1}{2}n(6n^2 - 3n - 1)$;
б)$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$;
в)$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + n \cdot n = (n+1) - 1$;
г)$1 \cdot 2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3 \cdot 2^{n-1} + \cdots + n \cdot (n+1) \cdot 2 + (n+1) \cdot (n+2) \cdot 1 = 2^{n+4} - (n^2 + 7n + 14)$.

Решење: Сви задаци решавају се на исти начин. Зато је урађен само један пример. в)

1. Очигледно је $1 \cdot 1! = (1+1)! - 1 = 1$.

2. Претпоставимо да за неки природан број н-1 важи $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + (n-1) \cdot (n-1)! = (n)! - 1$

3. Из претпоставке покушајмо да докажемо тврђење за н: $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + n \cdot n = (n+1) - 1$ По претпоставци $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \cdots + (n-1) \cdot (n-1) + n \cdot n = n - 1 + n \cdot n = (n+1) - 1$ што је и требало да се докаже.

Задатак 424. Доказати да за све $n \in N$ важе неједнакости:

а)$2\sqrt{n} > 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2$;
б)$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$;
в)$(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) \cdots (1 - \frac{1}{\sqrt{n}}) < \frac{2}{n^2}$ за $n > 1$.

Решење: Сви задаци се решавају на исти начин. Зато је урађен само један пример. в)

1. Очигледно је $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}$ јер је $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Претпоставимо да за неки природан број $n-1$ важи
$(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) \cdots (1 - \frac{1}{\sqrt{n-1}}) < \frac{2}{(n-1)^2}$

3. Из претпоставке покушајмо да докажемо да тврђење важи и за n: $(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) \cdots (1 - \frac{1}{\sqrt{n-1}})(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}) < \frac{2}{n^2}$
По претпоставци $(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) \cdots (1 - \frac{1}{\sqrt{n-1}})(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}) < \frac{2}{(n-1)^2}(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$

тј. преостаје да се докаже да важи $\frac{2}{(n-1)^2}(1-\frac{1}{\sqrt{n}}) < \frac{2}{n^2}$

тј. $n^2(1-\frac{1}{\sqrt{n}}) < (n-1)^2$ односно када се све измножи добије се следеће: $n\sqrt{n}+1 > 2n$ За бројеве изнад 4 је тривијално јер је онда $\sqrt{n} \geq 2$ а за бројеве 2 и 3 се провери да важи неједнакост.

Задатак 425. Доказати да за сваки природан број n важи:

$$\frac{1}{n^2}+(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1})^2+\cdots(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+1)^2 = 2n-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$$

Решење: Решава се исто као и претходна два:

1. Очигледно је $\frac{1}{1^2} = 2\cdot 1 - 1 = 1$
2. Претпоставимо да за неки природан број $n-1$ важи $frac1(n-1)^2+(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2})^2+\cdots(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\cdots+1)^2 = 2(n-1)-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1})$
3. Из претпоставке докажимо тврђење: $frac1n^2+(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1})^2+\cdots(\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+1)^2 = \frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n(n-1)}+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n(n-1)}+\frac{2}{n(n-2)}+(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2})^2+\cdots = n\frac{1}{n^2}+(n-1)\frac{2}{n(n-1)}+...+2(n-1)-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1})$

   тј. израз са десне стране је једнак $\frac{1}{n}+\frac{2}{n}(n-1)+2(n-1)-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}) = \frac{2n-1}{n}+2(n-1)-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}) = 2-\frac{1}{n}+2(n-1)-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}) = 2n-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$ што је и требало доказати.

Задатак 426. Доказати да за све природне бројеве $m, n \in N$ важи

$$1+(-1)^1\cdot\frac{(n+1+1)!}{n!(n+1)}+(-1)^2\cdot\frac{(n+2+1)!}{n!(n+2)}+\cdots+(-1)^m\cdot\frac{(n+m+1)!}{n!(n+m)} = (-1)^m\cdot\frac{(n+m)!}{n!}.$$

Решење: Задатак се решава индукцијом по m.

1. За $m=1$ проверава се тврђење: $1+(-1)^1\frac{(n+1+1)!}{n!(n+1)} = 1+(-1)(n+2) = -(n+1) = (-1)^1\frac{(n+1)!}{n!}$
2. Претпоставимо да за неки природан број $m-1$ важи:
$$1+(-1)^1\cdot\frac{(n+1+1)!}{n!(n+1)}+(-1)^2\cdot\frac{(n+2+1)!}{n!(n+2)}+\cdots+(-1)^{m-1}\cdot\frac{(n+m-1+1)!}{n!(n+m-1)} = (-1)^{m-1}\cdot\frac{(n+m-1)!}{n!}.$$
3. Докажимо да тврђење важи и за m: $1+(-1)^1\frac{(n+2)!}{n!(n+1)}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{(n+m-1+1)!}{n!(n+m-1)}+(-1)^m\frac{(n+m+1)!}{n!(n+m)} = (-1)^{m-1}\frac{(n+m-1)!}{n!}+(-1)^m\frac{(n+m+1)!}{n!(n+m)} = (-1)^m(\frac{(n+m+1)!}{n!(n+m)}-\frac{(n+m-1)!}{n!} = (-1)^m(\frac{(n+m+1)!-(n+m)(n+m-1)!}{n!(n+m)} = (-1)^m\frac{(n+m)!}{n!}$ што је и требало доказати.

Задатак 427. Нека је $n \in N$, $n > 2$ и $a_1, a_2, ..., a_n$ природни бројеви такви да је $0 < a_k \leq k$ за све $k = 1, 2, ..., n$. Ако је $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ паран број, доказати да је могуће поставити знаке $+$ и $-$ тако да:

$$a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n = 0.$$

Решење: Задатак се решава применом математичке индукције.

1. За $n = 2$ имамо $0 < a_1 \leq 1$ и $0 < a_2 \leq 2$. Одавде је $a1 = 1$ и због услова да је $a_1 + a_2$ парни мора бити и $a_2 = 1$. Јасно, тада је $a_1 - a_2 = 0$.

2. Претпоставимо да тврђење важи за све природне бројеве мање од неког природног броја $n \geq 2$.

3. Докажимо да тврђење важи и за природан број n. Ако је $a_{n-1} = a_n$, тада је израз $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2}$ паран, па се према индуктивној хипотези (тврђење важи за све природне бројеве мање од н) могу одабрати $+$ и $-$ такви да је $a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_{n-2} = 0$. Очигледно додајући на овај избор знакова a_{n-1} и одузимајући a_n добијамо:

   $$a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_{n-2} + a_{n-1} - a_n = 0.$$

   Ако је $a_{n-1} \neq a_n$ тада због $0 < a_{n-1} \leq n - 1$ и $0 < a_n \leq n$ и $0 < |a_{n-1} - a_n| \leq n - 1$. Израз $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ је исте парности као и израз $a_1 + a_2 + \cdots + |a_{n-1} - a_n|$ па се према индуктивној претпоставци могу одабрати знаци $+$ и $-$ такви да је $a_1 + a_2 + \cdots + |a_{n-1} - a_n| = 0$ од којих директно следи (пошто је $|a_{n-1} - a_n| = a_{n-1} - a_n$ или $|a_{n-1} - a_n| = -a_{n-1} + a_n$) да постоји избор такав да је:

   $$a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n = 0.$$

   Тиме је доказ завршен.

Задатак 428. Нека су $a_1, a_2, ..., a_n$ позитивни реални бројеви. Доказати неједнакост

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}.$$

Решење: Доказаћемо овај задатак регресивном индукцијом.

1. За $n = 2$ неједнакост која се доказује следи из $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$.

2. Докажимо да ако је неједнакост тачна за n бројева онда је она тачна и за $2n$ бројева. Заиста:

   $$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{2n}}{2n} = \frac{1}{2}(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{2n}}{n})$$

$$\geq \frac{1}{2}(\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} + \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot ... \cdot a_{2n}})$$
$$\geq \sqrt{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \cdot \sqrt[n]{a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot ... \cdot a_{2n}}}$$
$$= \sqrt[2n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{2n}}$$

Овиме смо доказали да дата неједнакост важи за бесконачно много бројева (све степене двојке).

Докажимо да ако је неједнакост тачна за n бројева онда је она тачна и за $n-1$ бројева. Неједнакост је тачна за било којих n бројева па онда и за бројеве $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, \frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1}$. Одатле је:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + \frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1} \cdot \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}{n-1}}$$

Сређивањем се добија:

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1} \cdot \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}{n-1}}$$

После степеновања леве и десне стране са n и скраћивањем обе стране са $\frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1}$, и после $n-1$ кореновања добија се:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1}}$$

чиме је задатак доказан.

Задатак 429. Доказати да за сваки природан број важи:

а)$7|3^{2n+1} + 2^{n+2}$;
б)$27|10^n + 18n - 1$;
в)$133|11^{n+2} + 12^{2n+1}$;
г)$59|5^{n+2} + 26 \cdot 5^n + 8^{2n+1}$.

Решење: Сви задаци решавају се слично. Зато је урађен само један пример. б)

1. Очигледно је $27|10^1 + 18 \cdot 1 - 1 = 27$
2. Претпоставимо да за неко н-1 важи $27|10^{n-1} + 18(n-1) - 1$
3. Из претпоставке ћемо доказати тврђење задатка. $10^n + 18n - 1 = 10 \cdot 10^{n-1} + 18(n-1) - 1 + 18 = 9(10^{n-1} + 2) + 10^{n-1} + 18(n-1) - 1$ $27|9(10^{n-1} + 2)$ јер $3|10^{n-1} + 2$ а из претпоставке имамо $27|10^{n-1} + 18(n-1) - 1$ па одатле следи $27|10^n + 18n - 1$ што је и требало доказати.

Задатак 430. Нека је p прост број. Доказати да за сваки природан број n важи да је $n^p - n$ дељив са p.

Решење: Тврђење је тривијално за све бројеве n који су дељиви бројем p. Зато покажимо тврђење за бројеве који нису дељиви са p.

1. Очигледно је $p|1^p - 1 = 0$.
2. Претпоставимо да тврђење важи за неки број n тј. $p|n^p - n$
3. Докажимо сада из претпоставке да ће тврђење да важи и за $n+1$: Користећи се биномном формулм добијамо: $(n+1)^p - (n+1) = 1^p + \frac{p!}{1!(p-1)!}n^1 1^{p-1} + ... + \frac{p!}{(p-1)!1!}n^{p-1}1^1 + n^p - (n-1)$ тј. добија се:

   $$(n+1)^p-(n+1) = n^p-n+p(\frac{(p-1)!}{1!(p-1)!}n^1 1^{p-1}+...+\frac{(p-1)!}{(p-1)!1!}n^{p-1}1^1)+1^p-1$$

   па користећи се претпоставком добијамо да важи $p|(n+1)^p-(n+1)$ чиме је доказано тврђење.

Задатак 431. Доказати да за сваки природан број n постоји природан број k такав да је $k \cdot 2^n + 17$ потпун квадрат.

Решење: Решаваћемо задатак индукцијом по n.

1. За $n = 1$ узмимо да је $k = 4$ и добијамо $4 \cdot 2^1 + 17 = 25 = 5^2$
2. Претпоставимо да за неки природан број н постоји к такво да је $k \cdot 2^n + 17 = m^2$ за неко $m \in N$.
3. Докажимо сада тврђење за $n + 1$ користећи претпоставку. Нека је k такво да је $k \cdot 2^n + 17$ (индуктивна претпоставка). Ако је k парно нека је онда $k = 2t$ за неко $t \in N$. Тада је

   $m^2 = k \cdot 2^n + 17 = 2t \cdot 2^n + 17 = t \cdot 2^{n+1} + 17$, па је $t = \frac{k}{2}$ тражени број за $n + 1$.

   Ако је k непарно тада посматрамо израз $2^n(k + m + 2^{n-2}) + 17$. Користећи индуктивну претпоставку $k \cdot 2^n + 17 = m^2$ добијамо:

   $$2^n(k+m+2^{n-2})+17 = 2^n k+17+2^n \cdot m+2^{2n-2} = m^2+2 \cdot m \cdot 2^{n-1}+2^{2n-2} = (m+2^{n-1})^2$$

   Пошто је k непарно, m непарно, 2^{2n-2} парно па је број $k+m+2^{2n-2}$ паран, па је $t = \frac{k+m+2^{2n-2}}{2}$ број који задовољава услове задатка.

   Овиме је доказ завршен.

Задатак 432. Доказати да је у сваком друштву број људи који се познају са непарним бројем људи из друштва паран.

Решење: Доказаћемо задатак користећи математичку индукцију. Означимо укупан број познанстава у том друштву са n.

1. За $n = 1$ познају се само 2 човека па је тврђење тачно.
2. Претпоставимо да је тврђење тачно за неко n.
3. Користећи индуктивну претпоставку докажимо да задатак важи и за $n+1$. Ово би значило да су се упознали двоје из друштва који се до тада нису познавали. Могуће је да је пре тога једна од тих особа познавала паран, а друга непаран, да су обе познавале непаран број људи или да су обе познавале паран број људи из друштва. Ни у једном од ових случајева новим упознавањем парност се не нарушава.

37.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 433. Доказати да је $2^n > n^2$ за све $n \in N$, $n \geq 5$.

Задатак 434. Нека су $0 \leq a_i \leq 1$ за $i = 1, 2, ..., n$. Доказати да важи неједнакост

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n} \leq \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}}$$

Задатак 435. Доказати да за сваки природан број n важи $2304 | 7^{2n} - 48n - 1$.

Задатак 436. Доказати да за реалне бројеве $a, b \in [0, 1]$ и све $n \in N$ важи неједнакост:

$$(a + b - ab)^n + (1 - a^n)(1 - b^n) \geq 1.$$

Задатак 437. Доказати да за све природне бројеве $n \geq 2$ важи:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{13}{24}.$$

Литература

[1] А. Енгел, *Problem Solving Strategies*, Спрингер 1997.

[2] З.Каделбург, В. Мићић, С. Огњановић, *Анализа са алгебром 2*, Београд 2008.

[3] Додатна настава у Математичкој гимназији

Предавање 38

Пребројавања

Игор Мартиновић, Математичка гимназија и Срђан Стефановић,

Шабачка гимназија

38.1 Теоријски увод

Дефиниција 56. k - варијација елемената n-скупа A је k-торка елемената скупа A, тј. елемент скупа A^k.

Теорема 89. Број k-варијација елемената n-скупа A једнак је n^k.

Дефиниција 57. Претпоставимо да $k \leq n$. Број k-варијација без понављања елемената n-скупа A је k-торка различитих елемената скупа A.

Теорема 90. Нека је $k \leq n$. Број k- варијација без понављања елемената n- скупа A једнак је $n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

Дефиниција 58. Пермутација n-скупа A је n-варијација без понављања елемената скупа A.

Теорема 91. Број пермутација n-скупа A једнак је $n!$.

Дефиниција 59. Нека је $k \leq n$. k-комбинација елемената n-скупа A је k-подскуп скупа A.

Теорема 92. Број k- комбинација елемената n-скупа A једнак је $\binom{n}{k}$.

38.2 Задаци за рад

Задатак 438. У купеу има 6 седишта. На колико начина се на та седишта може разместити: а) 6 путника б) 4 путника в) 8 путника (два увек стоје)?

Решење: а) Први путник може сести на 6 начина, други на 5, … , шести путник може сести на само један начин. Укупан број начина је 6!; б) У овом случају путници бирају седишта јер су у мањини. Први може сести на 6 начина, други може сести на 5 начина, трећи на 4 и четврти на 3 начина, што даје укупно 360 начина; в) Овде седишта "бирају"путнике, јер су у мањини. На прво седиште може сести 8 путника, на друго 7, итд. на шесто може сести 3 путника сто укупно даје $\frac{8!}{2}$.

Задатак 439. На полици се налази 12 књига. На колико начина се може изабрати 5 књига, тако да никоје две изабране књиге нису суседне?

Решење: Број избора k књига из низа који садржи n књига, тако да никоје две изабране књиге нису суседне, једнак је броју n- варијација елемената 0 и 1, таквих да свака од тих варијација садржи k јединица и $n-k$ нула, при чему никоје две јединице нису суседне. Јединице могу стајати испред прве нуле, између прве и друге нуле, …,иза $n-k$-те нуле, па је број начина једнак $\binom{n-k+1}{k}$. У нашем случају он је једнак $\binom{12-5+1}{5} = 56$.

Задатак 440. На колико се начина на шаховску таблу mXn може поставити k једнаких топова ($k \leq m \leq n$) тако да се никоја два топа не туку међусобно?

Решење: Првог топа можемо поставити на mn начина. Број поља које он сада напада је $m+n-1$. Другог топа можемо поставити на $mn-m-n+1 = (m-1)(n-1)$. Сада он напада $m+n-1-2 = m+n-3$ нових поља јер ће 2 поља која он напада да се поклапају са 2 поља које је нападао први. Трећег топа можемо поставити на $mn-2m-2n+4 = (m-2)(n-2)$ начина. Итд. к-ти топ се може поставити на $(m-k+1)(n-k+1)$ начина. Али ако нпр. први топ ког смо поставили стоји на пољу а1, а други на пољу б2, онда би исти распоред био као да смо првог ставили на б2, а другог на а1. То нам даје укупно $\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)n(n+1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ начина да поставимо k топова на mXn таблу, тако да се никоја два међусобно не туку.

Задатак 441. На колико начина се 25 особа које раде задатке може расподелити на 6 група тако да у једној буде 6, у две по 5, у три по 3 особе, ако: а) све групе имају различите задатке б) групе, у којима су по три особе имају исте задатке ц) групе, у којима је исти број особа, имају сте задатке?

Решење: а) Првих 6 особа бирамо на $\binom{25}{6}$ начина, следећих пет на $\binom{19}{5}$ начина, следећих 5 на $\binom{14}{5}$ начина, следеће 3 на $\binom{9}{3}$ начина, следеће 3 на $\binom{6}{3}$ начина, следеће 3 на $\binom{3}{3}$ начина што даје укупно $\frac{25!}{6!\cdot(5!)^2\cdot(3!)^3}$. б)

Исто као под а) само коначно решење делимо са 3!, јер постоје 3 групе које имају исте задатке што даје укупно $\frac{25!}{6!\cdot(5!)^2\cdot(3!)^4}$ начина. ц) Исто као под а) само коначно решење делимо са $2!\cdot 3!$, јер постоје две групе од по 5 особа које раде исте задатке, и три групе од по три особе које раде исте задатке. То нам даје укупно $\frac{25!}{6!\cdot(5!)^2\cdot(3!)^4\cdot 2}$ начина.

Задатак 442. На колико начина се могу поређати у низ бројеви $1, 2, \ldots, 3n$ тако да сваки број стоји на месту чији редни број при дељењу са 3 даје исти остатак као и сам тај број?

Решење: Имамо n бројева дељивих са 3, n бројева који при дељењу са 3 дају остатак 1 и n бројева који при дељењу са 3 дају остатак 2. n бројева се на n места може распоредити на $n!$ начина. Онда је укупан број начина једнак $(n!)^3$.

Задатак 443. На колико начина кошаркашки тренер може саставити екипу од 5 кошаркаша, у којој ће двојица играти на месту центра, двојица на месту бека и један на месту крила, ако има на располагању 10 кошаркаша од којих тројица могу бити само центри, тројица само бекови, један само крило, двојица могу бити крило или бек, а један крило или центар?

Решење: Одређивањем броја различитих састава екипе, у зависности од тога који играч игра на месту крила и коришћењем правила збира и производа, добијамо да је тражени број једнак $\binom{5}{2}\binom{4}{2}+2\binom{4}{2}\binom{4}{2}+\binom{5}{2}\binom{3}{2}=162$.

Задатак 444. Свако од јединичних поља таблице $3X3$ обојено је једном од три боје. Колико има различитих бојења код којих су свака два суседна јединична поља (тј. поља са заједничком страницом) различите боје?

Решење: Нека су боје означене са a, b, c. Ако је централно поље обојено бојом a, могући су следећи случајеви: (1) Сва четири поља суседна централном су обојена истом бојом. Та боја се може изабрати на 2 начина и тада за свако угаоно поље постоје 2 могућности за избор боје (ако је, на пример, боја поља суседних централном b, угаона поља могу бити a или c), па је у овом случају број могућих бојења $2\cdot 2^4 = 32$. (2) Три поља суседна централном су исте, а четврто различите боје. Таквих бојења има $\binom{4}{1} = 4$ и за свако такво бојење преостала (угаона) поља се могу обојити на 2^2 начина (2 угаона поља имају суседна поља различите боје, па је њихова боја једнозначно одређена; преостала 2 поља имају суседна исте боје, па за њихово бојење постоје 2 могућности), па је број бојења у овом случају $2\cdot 4\cdot 2^2 = 32$. (3) По два суседна поља су обојена истом бојом. У овој ситуацији постоји два случаја: (а) Поља која су дијаметрално супротна у односу на централно су различите боје (оваквих бојења има 4). Тада 2 угаона поља имају суседна поља различите боје (па је њихова боја јединствено одређена), а 2 угаона поља имају суседна поља исте боје (па се њихова боја може изабрати на 2 начина). Следи да је број бојења у овој ситуацији $4 \cdot 2^2 = 16$. (б) Поља која су дијаметрално супротна у односу на централно су исте боје (оваквих бојења има 2). Тада свако угаоно поље има суседна поља различите боје, па је њихова боја јединствено одређена, тј. број бојења у овој ситуацији је 2. Дакле, ако је централно поље обојено бојом a, тражених бојења има $32+32+16+2 = 82$, па је укупан број тражених бојења $3 \cdot 82 = 246$.

Задатак 445. Записује се ток промене резултата у једном сету одбојкашке утакмице, нпр. $0:1$, $0:2$, $1:2, \ldots$. Колико има различитих могућих записа, ако је коначан резултат $15:n$, где је $0 \leq n \leq 13$?

Решење: Ако је n фиксиран број, онда је број различитих записа резултата једнак $\binom{14+n}{n}$. Број различитих записа резултата, код којих гостујућа екипа није постигла више од 13 поена, једнак је $\binom{14}{14} + \binom{15}{14} + \ldots + \binom{27}{14} = \binom{28}{15}$.

Задатак 446. Одредити број свих начина на које се могу распоредити 4 куглице у 7 кутија ако се: а) и куглице и кутије разликују; б) куглице се не разликују, а кутије се разликују в) куглице се разликују, а кутије се не разликују г) не разликују се ни куглице ни кутије

Решење: а) Прву куглицу можемо распоредити на 7 начина, исто је и за другу, трећу и четврту. То даје укупно $7^4 = 2401$ начина. б) Како се куглице не разликују, онда се различити начини огледају различитим бројем куглица у кутијама, тј. број начина је број решења једначине $x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = 4$. Тако да начина има $\binom{4+7-1}{4} = 210$ в) Погледајмо пример под (д). У првом случају имамо само 1 начин, јер се кутије не разликују, а у свакој има по 1 куглица. И у петом случају имамо 1 начин. У другом случају имамо $\binom{4}{2} = 6$ начина. У трећем имамо 3 начина, јер нам је свеједно да ли су куглице a и b у првој, а c и d у другој кутији или је обрнуто. И у четвртом случају имамо $\binom{4}{3} = 4$ начина. То даје укупно $1+6+3+4+1 = 15$ начина. г) Има пет различитих распореда $(1,1,1,1; 2,1,1,0; 2,2,0,0; 3,1,0,0; 4,0,0,0)$.

Задатак 447. У сенату има 30 сенатора. Сваки од сенатора је у свађи са тачно шест других сенатора. На колико начина може бити формирана трочлана комисија сенатора тако да су свака два члана комисије међусобно у свађи или да никоја два члана комисије нису у свађи?

Решење: Нека је x број трочланих комисија које задовољавају услове задатка(добре комисије), а y број комисија које не задовољавају услове задатка (лоше комисије). Тада је $x + y = \binom{30}{3} = 4060$. Сада нека сваки сенатор направи списак свих трочланих комисија којих је он члан, али тако да друга два сенатора су или оба у свађи с њим, или ниједан није у свађи с њим. Сваки такав списак садржи $\binom{23}{2} + \binom{6}{2} = 268$. На том списку ће се свака добра комисија јавити три пута(записаће је сваки посланик), а свака лоша само једном. Зато је $3x + y = 30 \cdot 268 = 8040$. На тај начин добили смо систем једначина: $x + y = 4060$, $3x + y = 8040$, одакле добијамо $x = 1990$.

38.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 448. На колико начина се могу 8 белих шаховских фигура (2 топа, 2 ловца, 2 скакача, краљ и дама) поставити на првом реду шаховске табле?

Задатак 449. На колико начина се 8 истих свезака, 9 истих оловака и 10 истих књига могу поделити тројици ученика, тако да сваки ученик добије бар један предмет сваке врсте?

Задатак 450. Израчунати збир цифара које су употребљене за запис свих природних бројева од 1 до 1000000.

Задатак 451. На колико се начина природан број n може представити као збир једног или више природних бројева? Два представљања са истим сабирцима су различита ако редослед сабирака није исти. Нпр. број 3 се може представити на 4 начина: $3 = 1+1+1$, $3 = 1+2$, $3 = 2+1$, $3 = 3$.

Задатак 452. Неки расејани човек има 6 написаних писама које треба да стави у 6 коверата са написаним адресама шесторице људи. На колико начина он може ставити писма у коверте тако да ниједно писмо не стигне ономе коме је намењено?

Литература

[1] Павле Младеновић, *Комбинаторика*, Друштво математичара Србије, 2001.

[2] Н. Икодиновић, *Тангента-часопис за математику и рачунарство*, Друштво математичара Србије.

Предавање 39

Стереометрија

Ерна Оклапи, Електротехнички факултет, Београд

39.1 Теоријски увод

Стереометрија је део елементарне геометрије која проучава својства фигура смештених у простору. По начину образовања геометријских тела, стереометрија се дели на стереометрију полиедара и стереометрију обртних тела.

Дефиниција 60. Унија свих права које пролазе кроз неку тачку дате равне изломљене линије $A_1A_2...A_n$, а паралелне су датој прави l која сече раван изломљене линије, назива се **призматична површ**.

Дефиниција 61. Призма је геометријско тело ограничено призматичном површи и двема паралелним пресечним равнима те површи.

Дефиниција 62. Нека је B тачка која не припада равни многоугла $A_1A_2...A_n$. Унија свих полуправа са заједничким почетком B које секу затворену изломљену линију $A_1A_2...A_n$, назива се **n-тострана рогљаста површ**.

Дефиниција 63. Пирамида је геометријско тело ограничено рогљастом површи и једном равни која не садржи њен врх, а сече све њене изводнице.

Дефиниција 64. Полиедар је правилан ако су све његове стране правилни многоуглови са истим бројем страница и ако се у сваком темену састаје исти број ивица.

Правилни полиедри (Платонова тела):

- **Тетраедар** - састоји се од 4 једнакостранична троугла.

- **Хексаедар или коцка** - састоји се од 6 квадрата.
- **Октаедар** - састоји се од 8 једнакостраничних троуглова.
- **Додекаедар** - састоји се од 12 петоуглова
- **Икосаедар** - састоји се од 10 једнакостраничних троуглова.

Површина и запремина одговарајућег тела се одређује уз помоћ следећих формула:

Површина призме: $P = 2B + M$
Површина пирамиде: $P = B + M$
Површина зарубљене пирамиде: $P = M + B + B_1$

Запремина призме: $V = B \cdot H$
Запремина пирамиде: $V = \frac{1}{3}BH$
Запремина зарубљене пирамиде: $V = \frac{H}{3}(B + \sqrt{BB_1} + B_1)$

Дефиниција 65. Површ која се добија обртањем линије l око утврђене дужи AB за пун угао назива се **обртна површ**.

Дефиниција 66. Обртна површ добијена обртањем праве која је паралелна оси, назива се **права цилиндрична површ**.

Дефиниција 67. Обртна површ добијена обртањем праве која сече осу, а није нормална на њу, назива се **права конусна површ**

Дефиниција 68. Обртна површ добијена обртањем полукружнице око праве која садржи њен пречник, назива се **сфера**.

Аналогно полиедрима, површина и запремина обртних тела се одређује на следећи начин:

Површина ваљка: $P = 2B + M = 2r\pi(r + H)$
Површина праве купе: $P = B + M = r\pi(r + s)$
Површина зарубљене праве купе: $P = M + B + B_1 = \pi(R^2 + r^2 + (R + r)s)$

Запремина ваљка: $V = B \cdot H = r^2\pi H$
Запремина купе: $V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}r^2\pi H$
Запремина зарубљене купе: $V = \frac{H}{3}(B + \sqrt{BB_1} + B_1) = \frac{1}{3}H\pi(R^2 + Rr + r^2)$

Дефиниција 69. Тело ограничено сфером назива се лопта.

Површина сфере полупречника r: $P = 4r^2\pi$
Површина сферног свода: $P = 2r\pi H$
Површина сферног појаса: $P = 2r\pi h$

Запремина лопте полупречника r: $V = \frac{4}{3}r^3\pi$
Запремина лоптиног одсечка: $V = \frac{\pi H^2}{3}(3r - H)$

39.2 Задаци за рад

Задатак 453. Основа пирамиде је тангентни полигон са n страница описан око круга полупречника r. Обим полигона је $2p$, а бочне стране пирамиде нагнуте су прека равни основе под углом φ. Одредити запремину пирамиде.

Решење: Висина пирамиде је $H = rtg\varphi$. Ако су $a_1, a_2, ..., a_n$ странице полигона, онда је површина основе $B = \frac{1}{2}r(a_1+a_2+...+a_n) = \frac{1}{2}r\cdot 2p = rp$, па је запремина пирамиде $V = \frac{r^2 ptg\varphi}{3}$.

Задатак 454. Правилна четворострана призма основне ивице a и висине h пресечена је са равни која пролази кроз ивицу горње базе и са њом затвара угао од 30^o . Израчунати површину и запремину доњег дела призме.

Решење: Посматра се горњи део призме. Закључујемо да је горњи део призме тространа правилна призма висине a и троугаоне базе са страницама a, x, y (a, x су катете, y је хипотенуза). База представља половину једнакостраничног троугла, тако да закључујемо да је $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, а $y = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Даљим рачунањем добијамо: $P = a^2(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}) + 4ah$, $V = a^2h - \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Задатак 455. Око основе ваљка описан је једнакокраки трапез поврсхине $50cm^2$, са оштрим углом од 30^o. Израчунати површину и запремину ваљка ако је његова висина једнака краку трапеза.

Решење: По особинама тангентног четвороугла закључујемо да је крак $c = \frac{a+b}{2}$. Висина трапеза је $h = \frac{c}{2}$. Како је површина трапеза $P = \frac{a+b}{2}\cdot h = \frac{c^2}{2} = 50cm^2$ добијамо $c = 10cm, h = 5cm$. Даљим рачунањем добијамо да је $r = \frac{h}{2} = 2,5$, и на крају: $P = 62,5\pi cm^2$, $V = 62,5\pi cm^3$

Задатак 456. Трапез ротира једном око веће, а затим око мање основице. Запремине добијених обртних тела се односе као 3:4. Одредити размеру основица трапеза.

Решење: Ако трапез ротира око веће основице, онда је $V_1 = r^2\pi b + \frac{1}{3}r^2\pi x + \frac{1}{3}r^2\pi y = \frac{1}{3}r^2\pi(2b + a)$. Ако трапез ротира око мање основице $V_2 = r^2\pi b - \frac{1}{3}r^2\pi x - \frac{1}{3}r^2\pi y = \frac{1}{3}\pi(2a + b)$ где су a, b основице, r висина, x, y пројекције кракова на већој основици. На основу претпоставке произилази $\frac{2b+a}{2a+b} = \frac{3}{4} \Rightarrow a : b = 5 : 2$

Задатак 457. Обим правоуглог троугла је једнак $2p$, а хипотенуза c. Израчунати запремину ваљка чија је основа круг уписан у троуглу, а његова висина једнака је хипотенузи.

Решење: Применом сличности на правоугли троугао имамо да подножје висине хипотенузе дели хипотенузу на одсечке p, q и важи следеће

$h_c = \sqrt{pq}, a = \sqrt{cp}, b = \sqrt{cq}$. Следи да је полупречник уписане кружнице $r = \frac{a+b-c}{2}$, а по датим подацима $r = p - c$. Коначно следи да је $V = (p-c)^2 c\pi$

Задатак 458. Ромб чије су дијагонале $3dm$ и $4dm$ ротира око висине која садржи средиште ромба. Израчунати запремину добијеног тела.

Решење: Применом особина ромба можемо израчунати страницу и висину ромба. Следи да је $a = 25cm$ и $h = 12cm$. Ротирањем добијамо тело које се састоји од две зарубљене купе. Полупречних мање базе је $\frac{a}{2}$, а полупречник веће базе је $\frac{a+x}{2}$ где је $x^2 = a^2 - h^2$. Даљим рачунањем добијамо $V = 4898\pi cm^3$

Задатак 459. Висина купе чија је запремина V подељена је на три једнака дела. Кроз деоне тачке постављене су равни паралелне са равни основе. Одредити запремину средњег дела купе.

Решење: Применом сличности добијамо да је запремина горње мале купе $V_m = \frac{1}{27}V$. Даљим рачунањем добијамо да је запремина дела купе без доњег дела $V_s = \frac{8}{27}V$. Такође примећујемо да се запремина те купе може изразити и у следећем облику $V_s = V_m + V_1$ одакле добијамо тражену запремину $V_1 = \frac{7}{27}V$.

Задатак 460. Око дате лопте је описана права зарубљена купа. Доказати да је површина лопте мања од омотача купе.

Решење: Нека су R и r полупречници основа купе, s њена изводница и ρ полупречник лопте; тада су површина лопте и омотача купе: $P = 4\pi\rho^2 = \pi(2\rho)^2$, $M = \pi s(R + r)$. Како је трапез (осни пресек купе) тангентан, важи једнакост $s = r + R$, па је $M = s^2\pi$. Пошто је $s > 2\rho$, добија се $\pi s^2 \pi(2\rho)^2$, односно $M > P$, чиме је доказ завршен.

Задатак 461. Око лопте описана је правилна тространа призма, а око ње је описана лопта. Одредити однос површина лопти.

Решење: Полупречници описане и уписане сфере око тетраедра су $r_o = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ и $r_u = \frac{\sqrt{6}}{12}a$, респективно. Рачунањем запремине по a добијамо тражени однос: $4 : 1$

Задатак 462. Свака од четири кугле које леже на равном столу (и додирују сто) додирују остале три кугле. Три кугле имају полупречник R. Одредити полупречник четврте кугле.

Решење: Центри трију кугли полупречника R припадају паралелној равни стола и образују једнакостранични троугао $C_1C_2C_3$ странице $2R$. Висина тог троугла је $h = R\sqrt{3}$ $r = \frac{R}{3}$. Ако четврта кугла има полупречник r, њен центар C_4 налази се на растојању r од стола и са центрима осталих трију кугли одређује једну тространу пирамиду, чија је основа троугао $C_1C_2C_3$. Висина те пирамиде је $H = R - r$, а бочне ивице су $s = R + r$. Нека је T тежиште троугла $C_1C_2C_3$. Тада из правоуглог троугла C_1TC_4, имамо еквиваленције:

$$s^2 = H^2 + (\frac{2h}{3})^2 \Leftrightarrow (R+r)^2 = (R-r)^2 + \frac{4R^2}{3} \Leftrightarrow r = \frac{R}{3}$$

39.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 463. Дата је коцка $ABCDA'B'C'D'$. На бочним странама $ADD'A'$ и $BCC'B'$ одредити редом тачке M и N, такве да је дужина изломљене линије $AMNC'$ минимална.

Задатак 464. Колику површину види пилот са висине h изнад Земље?

Задатак 465. У простору су дате тачке A, B, C и D. Ако је $\angle DAB = \angle ABC = \angle BCD = \angle CDA = 90°$ доказати да су A, B, C и D компланарне.

Задатак 466. Странице троугла ABC су a, b, c. Наћи полупречнике сфера које додирују раван троугла ABC у тачкама A, B, C и које се додирују међусобно.

Задатак 467. Доказати да за сваке 4 некомпланарне тачке постоји јединствена тачка која је једнако удаљена од њих.

Литература

[1] В. Т. Богославов, *Збирка решених задатака из математике 3*, Просвета 2003.

[2] *http://alas.matf.bg.ac.rs/ vsrdjan/files/AgObnavljanje.pdf*

[3] Г. Војводић, Ђ. Пауновић, Р. Тошић *Математика за трећи разред средње школе*, Завод за уџбенике и наставна средства 1996.

Предавање 40

Теорија графова

Никола Мркшић, Математичка гимназија

40.1 Теоријски увод

Дефиниција 70. Прост граф(неусмерен, нетежински, без циклуса) може се дефинисати као уређена тројка $G = (V, E, I)$, где су V и E дисјунктни, коначни скупови а I релација односа таква да је сваки елемент E у односу са тачно два различита елемента V, а никоја два елемента E нису у односу са истим паром из V. Ова ограничења могу се варирати да би се добиле друге врсте графова(бесконачни, усмерени, оријентисани, итд). Скуп V називамо чворовима, а E ивицама графа.

Дефиниција 71. Степен чвора v је број ивица које полазе из датог чвора. Уколико је у питању усмерен граф, можемо разликовати улазни степен(број ивица које се завршавају у датом чвору), и излазни(број ивица које "извиру"из датог чвора). Два чвора су суседна ако садрже заједницку ивицу. Степен чвора једнак је броју суседа датог чвора.

Дефиниција 72. Степен чвора v је број ивица које полазе из датог чвора. Уколико је у питању усмерен граф, можемо разликовати улазни степен(број ивица које се завршавају у датом чвору), и излазни(број ивица које "извиру"из датог чвора). Два чвора су суседна ако садрже заједницку ивицу. Степен чвора једнак је броју суседа датог чвора. Комплетан граф је онај граф у коме између свака два чвора постоји ивица.

Дефиниција 73. Повезан граф је онај граф у коме постоји пут од сваког чвора до било ког другог чвора. Уколико граф није повезан, он се може поделити у коначно много повезаних компоненти, где је свака компонента подграф оригиналног графа, и сама за себе представља повезан граф.

Дефиниција 74. Пут у графу је секвенца наизменичних чворова и ивица, таква да се између свака два чвора налази ивица која их спаја. Пут који има исти почетни и крајњи чвор назива се циклус. Повезан граф који не садржи циклусе назива се дрво(стабло). Уколико није повезан, назива се шума. Ојлеров пут(или циклус), је онај пут(циклус) чијим би проласком обишли сваку ивицу графа тачно једном. Хамилтонов пут(циклус) је онај чијим би проласком обишли сваки чвор графа тачно један пут.

Теорема 93. Неусмерен граф има Ојлеров циклус ако и само ако су му сви степени чворова парни. У супротном, ако тачно два чвора имају непаран степен, граф садржи Ојлеров пут. Уколико је граф неусмерен, да би садржао Ојлеров циклус сви његови чворови морају имати једнак улазни и излазни степен. Додатно, ако је код тачно једног чвора излазни степен за један већи од улазног, и ако је код тачно једног улазни степен за један већи од излазног, дати граф садржи Ојлеров пут.

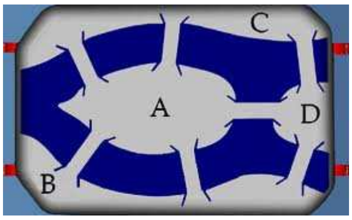
Дефиниција 75. Тежински граф је граф у коме је свакој ивици додељена одређена тежина, која, на пример, може означавати време потребно да се пређе растојање од чвора u до чвора v. Најкраћи пут од цвора u до чвора v је, дакле, низ ивица и чворова чијим се проласком најбрже прелази пут између та два чвора. У истом таквом тежинском графу, разапињуће стабло је подграф датог графа који садржи све његове чворове и повезан је, али нема циклусе - тј. у питању је стабло. Назовимо минималним разапињућим стаблом оно стабло које задовољава дате услове и чији је збир тежине ивица најмањи могући. Ексцентрицитет чвора v представља најдуже од свих минималних растојања од чвора v до свих осталих чворова у графу. Нека чвор v има највеци екцентрицитет, а чвор u најмањи - $e(v)$ представља *дијаметар* графа, а $e(u)$ *радијус* графа G.

Дефиниција 76. Планаран граф је онај граф који може бити представљен у равни тако да се његове ивице додирују само у чворовима графа.

Теорема 94. Довољан услов да граф буде планаран је да не садржи подграф који представља комплетан бипартитиван $K3,3$ граф, или комплетан $K5$ граф. За прост, повезан граф, постоји једноставан критеријум за одређивање планарности: Уколико је $v > 2$, онда је $e < 3v-5$. Додатно, ако је $v > 3$ и ако у графу нема циклуса дужине 3, онда је $e < 2v - 3$.

40.2 Задаци за рад

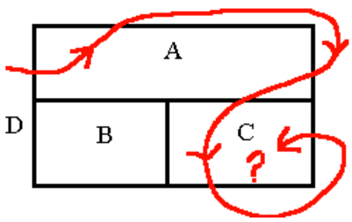
Задатак 468. Да ли је могуће прећи свих седам мостова тако да се ни један од њих не пређе више од једанпут?

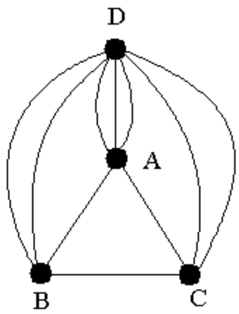


Решење: Евидентно, овде се од нас тражи да уочимо да ли у датом графу постоји Ојлеров пут. Уочимо да су, ако посматрамо дате делове копна као чворове, а мостове као ивице графа, степени датих чворова 5, 3, 3 и 3. Како је неопходан услов за постојање Ојлеровог пута да степени тачно ниједног или два чвора буду непарни, јасно је да он за овај граф не постоји, те да је ове мостове немогуће прећи на тражени начин.

Задатак 469. Да ли се може нацртати линија кроз свих десет дужи дате слике без подизања оловке и пролажења оловком кроз неке од ивица два пута?

Решење: Посматрајмо сваку од површина одређених датом фигуром као чвор графа. Десет датих дужи представљају гране које спајају те чворове. Сада, потребно је наћи Ојлеров пут кроз дати граф. Са слике се види да пут мора кренути из чворова A или D, како су то једина два чвора са непарним степеном. Како су степени B и C парни, Ојлеров пут постоји, те је тражени задатак изводљив.





Задатак 470. Да ли се четири ивице правоугаоника и његове две дијагонале могу нацртати у једном потезу?

Решење: Ако ивице правоугаоника посматрамо као чворове, видимо да су степени свих чворова једнаки 3. Дакле, Ојлеров пут овде не постоји.

Задатак 471. а) Да ли постоји граф са 6 чворова чији су степени 2,2,3,3,4,5? б) Да ли постоји граф са 5 чворова чији су степени 0,1,2,3,4? в) Да ли постоји граф са 6 чворова чији су степени 2,3,3,4,4,4? г) Да ли постоји граф са 7 чворова чији су степени 6,3,3,3,3,3,3? Да ли ти графови садрже Хамилтонов и Ојлеров пут, односно циклус?

Решење: а) Не, зато што збир свих степена треба да буде паран - свака грана диже степене два чвора за један. б) Не, јер уколико један чвор има степен $n-1$, онда је он повезан са свим осталим чворовима. Међутим, дат нам је и један чвор са степеном 0, што нас доводи до контрадикције. в) Да, прилично га је лако и конструисати. Чим постоји, јасно нам је(по његовим степенима), да садржи Ојлеров пут, али не и циклус. Такође, са слике се види да дати граф садржи и Хамилтонов пут. г) Да, и такође се лако да конструисати. Опет, тривијално следи да садржи Хамилтонов пут, али не и циклус. Због више од два чвора са непарним степеном, можемо бити сигурни да Ојлеровог пута нема.

Задатак 472. Граф је бипартитиван уколико се може поделити у два дисјунктна подграфа тако да унутар њих никоја два чвора нису повезана, а гране постоје искључиво између дате два подграфа. Доказати да је граф бипартитиван ако и само ако не садржи циклусе непарне дужине.

Решење: Испратимо следећи алгоритам: Изаберимо било који чвор и ставимо га у скуп A. Затим, испратимо сваку ивицу која креће из датог чвора и ставимо све чворове са другог краја тих ивица у скуп B. Избришимо све ивице које смо управо употребили. Сада, за све човорове из B до којих смо управо дошли, испратимо све гране који крећу из њих и чворове са друге стране ставимо у скуп A. Избрисхемо све управо употребљене ивице, те понављамо алгоритам док не класификујемо све чворове датог графа. Овај алгоритам никад неће покушати да премести чвор из једног скупа у други - ако је неком чвору v већ доделио скуп, ако би га сусрео при алоцирању чворова у онај други скуп, то би значило да га је сусрео после непарног броја корака, тј. да у датом графу постоји циклус непарне дужине, што је у супротности са иницијалним тврђењем.

Задатак 473. Доказати да у сваком простом графу постоје два чвора са истим степеном.

Решење: Нека дати граф има n чворова. Највећи степен који неки чвор може имати је $n-1$. Уколико постоји чвор са тим степеном, он је повезан са свим осталим чворовима, те не може постојати чвор са степеном 0. Слично, ако постоји чвор са степеном 0, не може постојати чвор са степеном $n-1$. Дакле, степени чворова могу имати највише

$n-1$ различитих вредности. Како граф има n чворова, следи(по Дирихлеовом принципу), да постоје бар два чвора са истим степеном.

Задатак 474. Ако је n људи присуствовало конференцији, и ако се део званица поздравио са одређеним бројем људи, показати да постоје бар две особе које су се поздравиле са истим бројем људи.

Решење: Посматраћемо званице као чворове графа. Ивица између два чвора постоји акко су се те две особе поздравиле. Уколико су се неке две особе поздравиле са истим бројем људи, степен та два чвора биће једнак. Дакле, проблем се своди на решење задатка 6.

Задатак 475. Сваки град у некој држави повезан је директним авионским линијама са тачно три друга града. Из сваког града се са највише једним преседањем може стићи у било који други град те државе. Колики је највећи могући број градова у тој држави?

Решење: Означимо градове бројевима $1, 2, 3....$ Из града 1 се, са једним преседањем може стићи у још највише шест градова, те максимални број градова није већи од 10. Релативно лако се може наћи распоред тих 10 градова тако да задовољавају услове задатка.

Задатак 476. У држави Океанији постоји $n, n > 1$ градова, које треба повезати телефонским линијама тако да важе следећи услови: а) Свака линија повезује два града. б) Постоји укупно $n-1$ линија. в) Из сваког од тих градова може се(макар индиректно) разговарати са свим осталим градовима. Доказати да постоји град који је директно повезан са тачно једним градом, те да је овај скуп телефонски линија у ствари стабло.

Решење: Градови представљају чворове графа, а телефонске везе између њих телефонске везе. Дати граф је повезан, а ми треба да докажемо да постоји чвор са степеном 1. Из услова задатка имамо да је $S1 + ...Sn = 2(n-1)$ Дакле, за бар један чвор вази $Si < 2$. Како је по условима задатка граф повезан, следи да је степен сваког чвора већи од нуле, те можемо закључити да овде имамо бар два чвора степена 1. Остали чворови могу имати степене и веће од 2, али укупан број чворова онемогућава постојање циклуса. Дакле, овај граф је у ствари стабло.

Задатак 477. У држави Океанији изграђена је мрежа путева,таква да из сваког града полазе тачно три пута. Путник намерник из свог града полази произвољним путем - у првом граду у ком стигне он скрене лево, у следећем десно, у наредном лево, и тако наизменично. Доказати да ће се путник после коначно много корака вратити кући.

Решење: Означимо са 0 тренутак поласка путника, а са $1, 2, 3..$ редом тренутке скретања. Назовимо директним путем део путне мреже којим се из једног града може стићи у други без проласка кроз неки од осталих градова. Ако путник путује довољно дуго, пропутоваће више од $4n+1$ директних путева, а бар једним директним путем AB(где су A и B градови), проћи ће бар 5 пута и при томе бар три пута скренути у истом смеру, рецимо десно. Нека се то десило у тренуцима i и j, где $i < j$. То значи да је у тренуцима $i-1, j-1$ скренуо лево, $i-2, j-2$ десно... То значи да је путник прешао исти пут у тренуцима 0 до i, као од $j-i$ до j. Према томе, у свом граду био је у тренутку $j-i$, што значи да се вратио кући после коначно много корака.

40.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 478. На шаховској табли димензија а) 5×4; б) 4×4 у доњем левом углу налази се скакач. Да ли скакач може да обиђе сва поља шаховске табле тачно једанпут?

Задатак 479. Краљ Шонгабонга је имао четири сина. Десет од његових мушких потомака су имали по три сина сваки, петнаест од његових мушких потомака су имали по два сина сваки, док су сви остали умрли без деце. Ако је познато да краљ Шонгабонга није имао женских потомака, колико је укупно мушких потомака имао овај краљ?

Задатак 480. У некој држави између свака два града постоји једносмерна авионска линија.Доказати да постоји град из којег се у сваки други град може стићи авионом са највише једним преседањем.

Задатак 481. Свако од 20 људи шаље некој десеторици од осталих по једно писмо. Доказати да постоје две особе које су једна другој послале писмо.

Задатак 482. Град има квадратну мрежу са м "хоризонталних"и н "вертикалних" улица. Колика је најмања дужина дела мреже који треба асфалтирати тако да се од сваке раскрснице до било које друге може доћи асфалтом?

Литература

[1] П. Младеновић, *Комбинаторика*, Друштво математичара Србије, Београд 2001.

[2] Р. Диестел, *Graph Theory*, Спрингер-Верлаг, Хеилделберг 2001.

Предавање 41

Логичко-комбинаторни задаци (бојења и инваријанте)

Невена Николић, Математичка гимназија

41.1 Задаци за рад

Задатак 483. Може ли се 27 блокова димензија $1 \times 2 \times 4$ сложити у коцку димензија $6 \times 6 \times 6$?

Решење: Поделимо коцку на мање коцке димензија $2 \times 2 \times 2$, тако да свака страна велике коцке буде подељена мрежом 3×3. Посматрајмо једну страну коцке, она је издељена на 9 квадрата димензија 2×2. Посматрајмо коцку, она је издељена на 27 мањих, димензија $2 \times 2 \times 2$. Нека је свака мања коцка којој три или ниједна ивица леже на ивици велике коцке „запремински” обојена црном бојом, а остале (које имају тачно једну ивицу да лежи на ивици велике коцке) белом бојом. Сваки од блокова мора садржати (како год био уграђен) једнак број (4) црних и белих коцкица димензија $1 \times 1 \times 1$. Како белих има 104, а црних 112 то није могуће.

Задатак 484. Квадрат величине 5×5 поделљен је на 25 поља. У свако поље постављен је по један жетон. Један потез се састоји у премештању било која два жетона, сваког од њих на суседно поље по вертикали или хоризонтали. Уочимо неко поље. Да ли се могу, након извесног броја потеза, наћи сви жетони у уоченом пољу?

Решење: Нека је квадрат обојен „шаховски” црном и белом бојом. На почетку имамо 12 белих и 13 црних поља. Како се жетон једним потезом помери на поље друге боје од претходног могу се десити три случаја: број жетона на белим пољима се смањи за два, а на црним увећа за 2, број жетона на црним пољима се смањи за 2, а на белим уветја за два или број жетона на црним и белим пољима остане непромењен. У сваком случају парност броја жетона на белим, као и на црним пољима се не мења. Дакле, ако је уочено поље беле боје одговор је негативан. Како је квадрат издељен на непаран број мањих, централни (црни) квадратић представља центар осе симетрије квадратне мреже 5×5 и имамо 12 парова централно симетричних квадратића. Парове жетона који се налазе на централно симетричним пољима на почетку, доводимо централно симетричним путањама на централно поље. Са централног поља жетоне можемо преместити на било које црно поље простим алгоритмом.

Задатак 485. Извршена је тријангулација n-тоугла и сваки троугао је обојен црном или белом бојом тако да су суседни троуглови обојени различитом бојом. Троуглови који садрже ивице n-тоугла обојени су истом бојом. Да ли је могуће ово извести ако је у питању десетоугао? А шестоугао?

Решење: Нека је b број белих а c број црних троуглова и нека су, без умањења општости, троуглови који садрже ивице n-тоугла обојени белом бојом. Свака дуж, осим ивица n-тоугла представља заједничку ивицу тачно два троугла различите боје. Дакле, $3b = 3c + n$. Па n мора бити дељиво са три. Одакле закључујемо да за десетоугао ово није могуће извести. За шестоугао наћи пример.

Задатак 486. На "шаховски" обојеној табли 12×12 постављени су жетони у првих шест колона на белим пољима. Сваким потезом померамо жетон за два поља по дијагонали, а "прескочени" жетон склањамо са табле. Да ли је могуће да на крају остане само један жетон?

Решење: цыр Обојимо црвеном, плавом и белом бојом редом сваку трећу колону. На почетку се на плавим, белим и црвеним колонама налази по 12 жетона. Сваким потезом се једној од три групе колона додаје жетон, а осталим двема групама одузима по жетон. Дакле, потезом се мења парност броја жетона и на црвеним и на плавим и на белим пољима. Како парност броја жетона била на почетку иста у све три групе колона, не може се десити да на крају у две групе буде по нула жетона (парно), а у трећој групи један жетон (непарно).

Задатак 487. Квадратно поље странице 10 подељено је на 100 јединичних поља. Ка почетку је 9 од тих поља зарасло у коров. После сваке године у коров зарасте још свако поље које има бар два суседна поља, која су већ зарасла у коров и ниједно друго поље. Да ли се 9 јединичних поља на почетку могу распоредити тако да после извесног времена цело поље зарасте у коров?

Решење: Лаком провером добијамо да се зарастањем једног новог поља у коров не повећава обим фигуре која је зарасла и коров (или збир обима неколико дисјунктних фигура). Обим је на почетку био не већи од 36, па касније никако не може бити 40, колико износи обим квадратног поља.

Задатак 488. На шаховској табли 8×8 постављен је 21 правоугаоник димензије $3{\times}1$, тако да је остало непокривено само једно поље шаховске табле. Одредити које то поље може бити.

Решење: Обојмо таблу дијагонално (по правама паралелним главној дијагонали) у три боје; црвену, плаву и белу, редом. Црвених и белих поља има по 21, док плавих има 22. Како сваки правоугаоник покрива по тачно једно црвено, плаво и бело поље, следи да једно плаво остаје непокривено. Сада обојмо таблу дијагонално (по правама паралелним споредној дијагонали) у друге три боје; жуту, зелену и црну, редом. Сада жутих и црних поља има по 21, док зелених има 22. Па закључујемо на исти начин да једно зелено остаје непокривено. Поља која су приликом првог бојења била плава, а приликом другог бојења зелена су (у стандардној шаховској нотацији) $c3, f3, c6, f6$. Довољно је наћи пример поплочавања док једно од ова четири поља остаје непокривено, остала три случаја се добијају ротацијом око центра симетрије табле за $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

Задатак 489. У таблици $n \times n$ уписани су редом бројеви од 1 до n^2. Једним потезом бирамо два суседна броја и одузимамо од оба навише вредност мањег. Да ли се може десити да на крају сва поља буду нула?

Решење: Решаваћемо два случаја:

1° Ако је n непаран број. Обојмо поља „шаховски" (она са непарним бројевима црно, а остала бело). Збир бројева са црних поља је $1 + 3 + .. + n^2 = (\frac{(n^2+1)}{2})^2$, док је збир оних бројева са белих поља $2+4+...+(n^2-1) = \frac{n^2(n^2+1)}{2} - (\frac{(n^2+1)}{2})^2$. Упоређивањем ове две вредности збирова добијамо да је збир бројева са црних поља већи од збира бројева са белих поља. Како сваким потезом одузимамо једнак број са белих и црних поља, да на крају сва поља буду нуле није могуће.

2° Ако је n паран број. Тада је одговор потврдан. Одредимо парове у свакој врсти; први и други; трећи и четврти;…$(n-1)$-и и n-ти члан врсте, затим одузимамо (по паровима) вредност мањег. Сада имамо сваку другу колону попуњену јединицама, а остале су празне. Одредимо парове у свакој клони; први и други; трећи и четврти;…$(n-1)$-и и n-ти члан колоне, затим одузимамо (по паровима) вредност мањег (тј. један). Овим смо добили таблицу попуњену само нулама.

Задатак 490. Дата је коцка са страницом дужине 4. Могу ли се њене три пљосни са заједничким теменом облепити еластичним правоугаоним тракама 1×3?

*Решење:*Обојмо (црном бојом) по једну колону и једну врсту сваке од три пљосни тако да квадратић који садржи њихово заједничко теме буде окружен трима квадратима црне боје. Сада видимо да сваки правоугаоник приликом поплочавања садржи једно или три поља црне боје. Нека је a број оних који садрже једно, а b оних правоугаоника који садрже три црна поља. Укупан број црних поља је 21, па је $a+3b = 21$. Знамо; $a + b = 16$. из ове две једначине добијамо $2b = 5$, како је б цео број ово није могу1е. Дакле, одговор је одричан.

Задатак 491. Може ли фигура коња обићи плочу а) 11×13, б)4×8, тако што ће поћи од једног угаоног поља, стати на свако поље тачно једанпут и вратити се на полазно поље?

Решење:

а) Обојмо таблицу Ћхаховски". Имамо 72 поља црне и 71 поље беле боје. Сваким потезом коња мења се боја поља на коме је исти. Угаона поља су црне боје, дакле, скакач полази из црног поља и завршава кретање у истом; што значи да коњ скочи на једнак број белих и црних поља. Како је белих поља мање, није могуће да коњ прође кроз сва црна поља.

б) Дакле, имамо 4 врсте и 8 колона. Обојмо поља прве,треће, пете и седме колоне у црвено, плаво, жуто, бело, редом. Остале колоне обојмо истим бојама али у супротном смеру бојења (бело, жуто, плаво, црвено). Сада видимо да коњ са белих поља скаче само на жута, а са црвених само на плава, самим тим коњ на бела поља мозје стићи само са жутих, а на црвена само са плавих поља. Коњ полази из црвеног или белог поља. Претпоставимо а је кренуо са белог (исто важи и а ко је кренуо са црвеног поља). Дакле, коњ се може кретати са белог на жуто и обратно, у једном тренутку коњ мора прећи на плаво поље са жутог (јер жели да обиђе сва поља). Када се то деси да би се коњ вратио у почетно бело поље мора протји кроз жуто. Међутим како имамо једнак број белих и жутих поља, апреласком на плаво ми "губимоЋжуто поље, нетјемо имати довољно жутих да бисмо вратили коња у почетно бело

Задатак 492. У равни је дато $n \geq 2$ правих, од којих никоје три не пролазе кроз исту тачку и никоје две нису паралелне. Доказати да је могуће у сваком делу на које те праве деле раван, уписати цео број, различит од нуле и по апсолутној вредности не већи од n, тако да са сваке стране сваке од тих правих збир бројева једнак нула.

Решење: Прво ћемо уписати знаке + и − у све области, тако да су знаци у суседним областима различити. Да је то могуће доказаћемо принципом математичке индукције.

1° база индукције: за $n = 1$ тривијално.

2° индуктивна претпоставка: Претпоставимо да је могуће уписати знаке тако да су знаци у суседним областима различити када је раван подељена на обсати са $n = k$ правих.

3° индукцијски корак: када имамо $n = k + 1$ правих тада уочимо једну праву, праву p. Њу привремено одстранимо и у остале области упишемо знаке према индукцијској претпоставци.Сада вратимо праву p и са једне њене стране свим бројевима променимо знак (а са друге стране оставимо како је било). (Испитати за изабране две области.)

Сада у сваку област ставимо број $a \cdot b$, такав да је a већ одређени знак, а b број углова у тој области. Овако уписани бројеви задовољавају услове задатка, јер је: $|ab| = b \leqslant n$ (укупно n правих, следи највише n углова) и у свакој тачки пресека ми бројимо околне углове или 2 (кад је тачка на правој у односу на коју се рачуна) или 4 пута са различитим знацима. У првом случају $+$ и $-$, у другом $+$, $-$, $+$ и $-$, па видимо да се "пократе". Овим је завршен задатак.

41.2 Задаци за домаћи рад

Задатак 493. Колико се највише скакача мозје поставити на шаховску таблу тако да се међусобно не нападају?

Задатак 494. Ако је равни дато 4000 тачака тако да никоје три нису колинеарне, може ли се кокструисати 1000 непресецајућих четвороуглова?

Задатак 495. Ако таблу димензија $n \times n$ можемо прекрити Л фигурама (сачињеним од три јединична квадратића) тако да једно угаоно поље остане непокривено, доказати да исто можемо урадити табли димензија $2n \times 2n$, оставивши исто угаоно поље непокривено.

Задатак 496. Фигура S може да се креће по шаховској табли за једно поље горе, десно или укосо (доле-лево). Да ли може S да крене из доњег левог угла, обиђе сва поља једанпут и врати се на полазно?

Задатак 497. У свим пољима таблице 4×4 налази се знак $+$. Неко је на пољу уз ивицу табле, али не угаоном, избрисао плус, и написао минус. Задатак је вратити таблу у почетну позицију са свим плусевима, лаи једним потезом можеш променити истовремено све знаке у једној колони, дијагонали (специјално само угаоно поље) или врсти. Да ли ћеш успети?

Литература

[1] В. драговић, Ђ. Дугошија, П. Младеновић *Републичка и савезна такмичења из математике*, Материјали за младе математичаре свеска 39, Београд 2002.

[2] Сајт *http://srb.imomath.com/*

[3] Додатна настава у Математичкој гимназији

[4] редовна настава у Математичкој гимназији

[5]

Предавање 42

Неједнакости

Раде Шпегар, Математичка гимназија

42.1 Теоријски увод

Дефиниција 77. Функција је Јенсен-конвексна на $[a,b]$ ако важи $f(x)+f(y) \geq 2f(\frac{x+y}{2})$ за свака два $x,y \in [a,b]$.

Дефиниција 78. Функција је конвексна на $[a,b]$ ако за свако $\lambda \in [0,1]$ и све $x,y \in [a,b]$ важи: $\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \geq f(\lambda x+(1-\lambda)y$.

Дефиниција 79. $[a_1,a_2,...,a_n]$ је симетрична сума и једнака је суми чланова облика $x_1^{a_p(1)}x_2^{a_p(2)}\dots x_n^{a_p(n)}$ где p пролази кроз све пермутације бројева од 1 до n. Јасно је да је укупан број ових чланова у симетричној суми реда n једнака $n!$

Дефиниција 80. За 2 нерастућа низа a и b каземо да a мајорира b у ознаци $a \succ b$ ако важи следеће: $a_1 \geq b_1$, $a_1+a_2 \geq b_1+b_2$, $a_1+a_2+a_3 \geq b_1+b_2+b_3$,…,$a_1+a_2...+a_{n-1} \geq b_1+b_2...+b_{n-1}$ и $a_1+a_2...+a_n = b_1+b_2...+b_n$

Теорема 95. [АГ] Нека су $a_1,a_2,...a_n$ позитивни реални бројеви. Важи: $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$

Доказ: Тврђење ћемо доказати регресивном индукцијом, техником за коју ће се касније испоставити да је веома корисна. Јасно је да тврђење важи за $n=1$. За $n=2$ добијамо $(\sqrt{a}_1-\sqrt{a}_2)^2 \geq 0$. Доказаћемо да тврђење важи за произвољно велики број, а затим и да важи и за сваки мањи од тог броја. Претпоставимо да тврђење важи за $n=2^k$ и докажимо да важи за $n=2^{k+1}$. Из индукцијске претпоставке добијамо да је: $\frac{a_1+a_2+...+a_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1a_2...a_{2^k}}$ и $\frac{a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+...+a_{2^{k+1}}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_{2^k+1}a_{2^k+2}...a_{2^{k+1}}}$. Сабирајући ове две релације добијамо:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_{2^k+1}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{a_1a_2...a_{2^k}}+\sqrt[2^k]{a_{2^k+1}a_{2^k+2}...a_{2^{k+1}}} \geq 2\sqrt[2^{k+1}]{a_1a_2...a_{2^{k+1}}}.$$

Из чега након дељења са 2 следи да почетно тврђење важи за свако n степен двојке што може бити произвољно велико. Још је довољно доказати да ако тврђење важи за n онда важи и за $n-1$ (такозвана регресивна индукција). Ово добијамо тако што ставимо $a_n = \frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1}$.

Теорема 96. [Јенсен] Нека је $f : [a, b] \to R$ Јенсен-конвексна функција. Важи: $f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \geq nf(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n})$

Доказ: Тврђење доказујемо регресивном индукцијом. За $n = 2$ тврђење важи из дефиниције конвексне функције. Претпоставимо да тврђење важи за $n = 2^k$ и докажимо га за $n = 2^{k+1}$. $f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{2^k}) \geq 2^k f(\frac{x_1+x_2+...+x_{2^k}}{2^k})$ и $f(x_{2^k+1}) + f(x_{2^k+2}) + ... + f(x_{2^{k+1}}) \geq 2^k f(\frac{x_{2^k+1}+x_{2^k+2}+...+x_{2^{k+1}}}{2^k})$ из индукцијске претпоставке. Такође важи $f(\frac{x_1+x_2+...+x_{2^k}}{2^k}) + f(\frac{x_{2^k+1}+x_{2^k+2}+...+x_{2^{k+1}}}{2^k}) \geq 2f(\frac{x_1+x_2+...+x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}})$ па тврђење важи за произвољно велики број. Доказаћемо да ако тврђење важи за n онда важи и за $n-1$. Довољно је убацити $x_n = \frac{x_1+x_2+...+x_{n-1}}{n-1}$ чиме је доказ завршен.

Теорема 97. [Мјурхед] Ако $a \succ b$ онда $[a_1, a_2, ..., a_n] \geq [b_1, b_2, ..., b_n]$

Теорема 98. [Дилворт] Ако се сваки члан низа b мозе представити као линеарна комбинација чланова низа a односно ако се сваки b_i мозе представити у облику $c_{i,1}a_1 + c_{i,2}a_2 + ... + c_{i,n}a_n$ где су $c_{i,j}$ ненегативни реални бројеви и за свако i важи $c_{i,1}+c_{i,2}...+c_{i,n} = 1$ онда $[a_1, a_2, ..., a_n] \geq [b_1, b_2, ..., b_n]$

42.2 Задаци за рад

Задатак 498. Да ли за свака два низа a и b важи да или $a \succ b$ или $b \succ a$? Када важи: $a \succ b$ и $b \succ a$?

Решење: Посматрајмо низове $5, 2, 1$ и $4, 4, 0$ важи да је $5 > 4$, али и $5 + 2 < 4 + 4$ па ни један низ не мајорира други. Ако је $a \succ b$ и $b \succ a$ онда из дефиниције мајоризације добијамо $a_1 \geq b_1$ и $b_1 \geq a_1$ па је $a_1 = b_1$. Даље имамо $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$ $b_1 + b_2 \geq a_1 + a_2$ па је $a_2 = b_2$. Даље индукцијом доказујемо да су сви чланови једнаки па је $a = b$

Задатак 499. Нека функција $f : [a, b] \to R^+$ испуњава услов $f(x)f(y) \geq f(\sqrt{xy})^2$ за свако $x, y \in [a, b]$, онда за све $x_1, x_2, ..., x_n \in [a, b]$, следећа неједнакост важи: $f(x_1)f(x_2)...f(x_n) \geq f(\sqrt[n]{x_1x_2...x_n})^n$

Решење: Тврђење се доказује аналогно као и Јенсенова неједнакост осим што се у задњем кораку при доказу да ако тврђење важи за n онда важи и за $n-1$ узима $x_n = \sqrt[n-1]{x_1x_2...x_{n-1}}$.

Задатак 500. Ако су $x_1, x_2...x_n$ позитивни реални бројеви доказати да важи: $(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) \geq (1+\sqrt[n]{x_1x_2...x_n})^n$

Решење: Користећи задатак 2 добијамо да је довољно доказати тврђење за 2 броја односно: Ако су x и y позитивни реални бројеви доказати: $(1+x)(1+y) \geq (1+\sqrt{xy})^2$ што се након квадрирања своди на $x+y \geq 2\sqrt{xy}$.

Задатак 501. Нека функција $f:[a,b] \to R^+$ испуњава услов $f(x)+f(y) \geq 2f(\sqrt{xy})$ за свако $x,y \in [a,b]$, онда за све $x_1, x_2, ..., x_n \in [a,b]$, важи следећа неједнакост: $f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n) \geq nf(\sqrt[n]{x_1x_2...x_n})$

Решење: Доказ иде аналогно доказу задатка 2.

Задатак 502. Ако су $x_1, x_2...x_n$ позитивни реални бројеви и $x_1, x_2...x_n \geq 1$ доказати да важи: $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+...+\frac{1}{1+x_n} \leq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}}$

Решење: Користећи задатак 4 добијамо да је довољно доказати тврђење за 2 броја. Односно: Ако су x и y и $x,y \geq 1$ позитивни реални бројеви доказати: $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y} \leq 2\frac{1}{1+\sqrt{xy}}$ што се своди на $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(1-\sqrt{xy}) \leq 0$.

Задатак 503. Нека су a,b,c,d позитивни реални бројеви такви да је $abcd = 1$. Доказати да важи: $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2} \geq 1$

Решење: Доказаћемо помоћно тврђење: За свака два ненегативна реална броја x,y важи: $\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{1}{1+xy}$. Након множења неједнакост се своди на: $(2+2x+2y+x^2+y^2)(1+xy) \geq (1+2x+x^2)(1+2y+y^2) \leftrightarrow xy(x^2+y^2)+1 \geq 2xy+x^2y^2 \leftrightarrow (xy-1)^2+xy(x-y)^2 \geq 0$. Сменимо $m = ab$ и $n = cd$. Важи $mn = 1$ и $\frac{1}{1+m}+\frac{1}{1+n} = \frac{m+n+2}{(m+1)(n+1)} = 1$. Користећи помоћно тврђење добијамо: $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2} \geq \frac{1}{1+m}+\frac{1}{1+n} = 1$.

Задатак 504. Ако су a,b,c позитивни реални бројеви доказати да важи:

(а) $a^9+b^9+c^9 \geq a^5b^3c+b^5c^3a+c^5a^3b$
(б) $a^8b^4+b^8c^4+c^8a^4 \geq a^6b^5c+b^6c^5a+c^6a^5b$

Решење:

(а)Из АГ неједнакости имамо да је $\frac{5}{9}a^9+\frac{3}{9}b^9+\frac{1}{9}c^9 \geq a^5b^3c$, $\frac{5}{9}b^9+\frac{3}{9}c^9+\frac{1}{9}a^9 \geq b^5c^3a$, $\frac{5}{9}c^9+\frac{3}{9}a^9+\frac{1}{9}b^9 \geq c^5a^3b$. Сабирајући ове неједнакости добијамо тражену неједнакост.
(б)Користићемо метод балансирања коефицијената да одредимо три АГ неједнакости које нам у збиру дају тражену. Првом АГ неједноко71у желимо да уклонимо $a^6b^5c^1$. Посматрајмо

$xa^8b^4 + yb^8c^4 + zc^8a^4$ где $x, y, z \in N_0$.
$xa^8b^4 + yb^8c^4 + zc^8a^4 \geq a^{\frac{8x+4z}{x+y+z}} b^{\frac{8y+4x}{x+y+z}} c^{\frac{8z+4y}{x+y+z}}$. Посматрајмо систем једначина $\frac{8x+4z}{x+y+z} = 6\frac{8y+4x}{x+y+z} = 5\frac{8z+4y}{x+y+z} = 1$. Његово решење је $x = 3$, $y = 1$, $z = 0$. Крајње решење добијамо сабирањем неједнакости: $\frac{3}{4}a^8b^4 + \frac{1}{4}b^8c^4 \geq a^5b^3c$, $\frac{3}{4}b^8c^4 + \frac{1}{4}c^8a^4 \geq b^5c^3a$, $\frac{3}{4}c^8a^4 + \frac{1}{4}a^8b^4 \geq c^5a^3b$.

Задатак 505. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви. Доказати: $\frac{a^2b(b-c)}{a+b} + \frac{b^2c(c-a)}{b+c} + \frac{c^2a(a-b)}{c+a} \geq 0$

Решење: Након множења са $(a+b)(b+c)(c+a)$ задатак се своди на: $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \geq a^3b^2c + b^3c^2a + c^3a^2b$. За ову неједнакост можемо се користити системом једначина, али то уопсте није потребно јер је веома лако интуитивно видети да је: $a^3b^3 + a^3b^3 + c^3a^3 \geq 3a^3b^2c$. Сабирајући циклично ове три неједнакости добијамо тражену неједнакост.

Задатак 506. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви за које важи $abc = 1$. Доказати: $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(b+a)} \geq \frac{3}{2}$

Решење: Након множења са $(abc)^3(a+b)(b+c)(c+a)$ неједнакост се своди на $[3,3,2] + 2[4,3,1] \geq 2[5,4,3] + [5,5,5]$. Поделимо десну страну са $(abc)^{\frac{7}{3}}$ па добијамо да треба доказати: $[3,3,2] + 2[4,3,1] \geq 2[\frac{11}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}] + [\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}]$. Из Мјурхедове неједнакости имамо да важи: $[4,3,1] \geq [\frac{11}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}]$ и $[3,3,2] \geq [\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}]$. Сабирајући ове две неједнакости добијамо тврђење задатка.

Задатак 507. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви за које важи $a + b + c = 3$. Доказати: $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$.

Решење:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} + b - \frac{bc^2}{1+c^2} + c - \frac{ca^2}{1+a^2}$$

$$\leq 3 - \frac{ab^2}{2b} - \frac{bc^2}{2c} - \frac{ca^2}{2a} = 3 - \frac{ab+bc+ac}{2} \leq 3 - \frac{(a+b+c)^2}{6} = \frac{3}{2}.$$

42.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 508. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви за које важи $abc = 1$. Доказати: $a + b + c \leq a^2 + b^2 + c^2$

Задатак 509. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви за које важи $a + b + c = 2$. Доказати: $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq 1$.

Задатак 510. Нека су a, b, c, d позитивни реални бројеви, доказати: $a^8b^2 + b^8c^2 + c^8d^2 + d^8a^2 \geq a^4b^3c^2d + b^4c^3d^2a + c^4d^3a^2b + d^4a^3b^2c$.

Задатак 511. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви, доказати: $\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+a)(b+c)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}$.

Задатак 512. Нека су $x_1, x_2, ..., x_n$ позитивни реални бројеви, доказати: $\frac{1}{\sqrt{1+x_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+x_2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1+x_n}} \geq \frac{n}{\sqrt{1+\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}}}$.

Литература

[1] Пхам Ким Хунг, *Secrets in Inequalities*, Гил, 2007.

Предавање 43

Диофантове једначине

Стефан Станојевић, Математичка гимназија

43.1 Теоријски увод

Теорема 1. Линеарна Диофантова једначина $ax + by = c$ има решења ако и само ако (a, b) дели c. У том случају има их бесконачно много.

Теорема 2. Ако је (x_0, y_0) једно решење једначине $ax + by = c$ у скупу целих бројева, тада су сва решења те једначине одређена релацијом

$x = x_0 + \frac{b}{d}t$

$y = y_0 - \frac{a}{d}t,$

где је d највећи заједнички делилац бројева a и b, а t произвољан цео број.

Теорема 3. Да би уређена тројка (x, y, z) представљала примитивно решење једначине $x^2 + y^2 = z^2$ у скупу природних бројева неопходно је и довољно да се x, y, z изражавају у облику

$x = 2mn, y = m^2 - n^2, z = m^2 + n^2$

$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2$, где су m и n природни узајамно прости бројеви.

Теорема 4. (Велика Фермаова Теорема) Ако је n ма који природан број већи од 2, онда једначину $x^n + y^n = z^n$ не могу задовољавати никаква три природна броја x, y, z.

43.2 Задаци за рад

Задатак 513. Решити једначину $2x + 7y = 17$ у скупу целих бројева.

Решење: Лако налазимо једно решење ове једначине $(x_0, y_0) = (-2, 3)$. Примењујући Теорему 2 добијамо опште решење $x = -2 + 7t$, $y = 3 - 2t$, $t \in Z$.

Задатак 514. Решити једначину $xy + 3y - 5x = 18$ у скупу Z.

Решење: Како је $xy + 3y - 5x = (x + 3)(y - 5) + 15$
, то се почетна једначина своди на $(x+3)(y-5) = 3$. Сада разликујемо следеће случајеве:
(1)$x + 3 = 3$,$y - 5 = 1$
(2)$x + 3 = 1$,$y - 5 = 3$
(3)$x + 3 = -3$,$y - 5 = -1$
(3)$x + 3 = -1$,$y - 5 = -3$.
Дакле, имамо следећа решења:
$(-2, 8), (-4, 2), (0, 6), (-6, 4)$.

Задатак 515. У скупу Z решити једначину $x^4 + y^2 + 2y = 1$.

Решење: Једначину трансформишемо у $x^4 + (y + 1)^2 = 2$. Збир два целобројна квадрата је једнак 2 само ако су оба једнака 1 па одавде лако добијамо решења једначине $x = 1$ или $x = -1$ и $y = 0$ или $y = -2$.

Задатак 516. Одредити све тројке (p, q, r) простих бројева за које важи $p^2 + qr = 1996^2$.

Решење: Дата једначину ћемо прво представити као $qr = 1996-p^2 = (1996 + p)(1996 - p)$. Сада ћемо размотрити три случаја:

1) $p = 3$: из $qr = 1993 \cdot 1999$ добијамо $q = 1993$ и $r = 1999$.

2) $p = 3k + 1$: тада је $1996 - p$ дељиво са 3, qr је дељиво са 3 па један од q, r мора бити једнак 3. Пошто је једначина симетрична у односу на q, r можемо написати $q = 3$. Сада је $3r = (1996 + p)(1996 - p)$, $r = (1996+p)\frac{1996-p}{3}$. Како је p прост мора бити $1996-p = 3$, тј. $p = 1993$. Заменом у претходну једначину добијамо $r = 3989$.

3) $p = 3k + 2$: овде добијамо да је $1996 + p$ дељиво са 3, па опет мора бити $q = 3$. Једначина сада има облик $r = (1996-p)\frac{1996+p}{3}$, одакле следи да је r сложен. Дакле, у овом случају нема решења.

Задатак 517. Наћи све парове целих бројева (m, n) за које важи једнакост $m^3 + 6m^2 + 5m = 8n^3 + 36n^2 + 40n + 8$.

Решење: Једначина се може трансформисати у облик $m(m + 1)(m + 5) = (2n + 1)(2n + 2)(2n + 6) - 4$. Како је $2n + 6 \equiv 2n + 3 \ (mod\ 3)$, а $m + 5 \equiv m + 2(mod\ 3)$, то је лева страна дељива са три а десна није. Контрадикција! Значи, једначина нема решења.

Задатак 518. Решити једначину $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

Решење: Одмах се види да је $(0, 0, 0)$ једно решење. Доказаћемо да нема других решења методом бесконачног спуста.

Нека је x, y, z једно решење једначине. Како је $x^2 + y^2 + z^2$ парно, не могу сва три броја x, y, z бити непарна. Како је бар један од њих паран, то је $2xyz$ дељиво са 4 па је и $x^2+y^2+z^2$ дељиво са 4. Како квадрати природних бројева при дељењу са 4 могу да дају само остатке 0 или 1, једина могућност је да сваки од x^2, y^2, z^2 даје остатак 0, тј. да је сваки од x, y, z паран. Дакле, можемо написати $x = 2x_1$, $y = 2y_1$,$z = 2z_1$, што заменом у почетну једначину даје $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$.

Како је $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ дељиво са 4, поново закључујемо да су x_1, y_1, z_1 парни, па су x, y, z дељиви са 4. Тако је $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$,$z_1 = 2z_2$, па почетну једначину можемо написати као $x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 8x_2y_2z_2$. Јасно је да понављајући овај поступак можемо доказати да су x, y, z дељиви са 8,16,32,..., уопште са сваким степеном двојке. Једини цео број који има ту особину је 0, па је 0,0,0 једино решење.

Задатак 519. Решити у скупу природних бројева једначину
$1! + 2! + \cdots + x! = y^2$.

Решење: Одмах се види да су $(1, 1)$ и $(3, 3)$ решења ове једначине. Доказаћемо да нема других решења.

За $x = 4$ израз $1! + 2! + \cdots + x!$ даје остатак 3 при дељењу са 5. Како је за свако $x \geq 5$ број $x!$ дељив са 5, то ће израз $1! + 2! + \cdots + x!$ давати остатак 3 при дељењу са 5 за свако $x \geq 4$. Квадрати природних бројева при дељењу са 5 дају само остатке 0,1 и 4 па једначина нема решења за $x \geq 4$. Пошто $x = 2$ такође није решење, закључујемо да су једина решења једначине $(1, 1)$ и $(3, 3)$.

Задатак 520. Решити Диофантову једначину $2^x = 3^y + 5$.

Решење: Провером се добија да су $(3, 1)$ и $(5, 3)$ решења. Доказаћемо да нема других решења. Јасно је да за $x \leq 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 4$ нема решења. Нека је $x \geq 6$. Тада је 2^x дељиво са 64, па је $3^y \equiv 59(mod\ 64)$. Лако се проверава да је $3^{11} \equiv 59(mod\ 64)$ и $3^{16} \equiv 1(mod\ 64)$, па зато мора бити $y \equiv 11(mod\ 16)$. Међутим, тада је $3^y \equiv 3^{11} \equiv 7(mod\ 17)$, што не може бити јер 2^x није конгруентно са 12 по модулу 17 ни за једно x.

Задатак 521. У скупу природних бројева решити једначину
$a + b + c = abc$

Решење: Када поделимо једначину са abc, добијамо $\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} = 1$. Сада бар један од бројева $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ac}, \frac{1}{ab}$ мора бити већи или једнак $\frac{1}{3}$. Нека је, на пример, $\frac{1}{ab} \geq \frac{1}{3}$, тј. $ab \leq 3$. Ово је могуће за $(a, b) \in (1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)$. Прва од могућности отпада, а остале четири дају решења $(1, 2, 3)$ и $(3, 1, 2)$. Разматрањем осталих случајева добијају се још два решења: $(2, 3, 1)$ и $(3, 2, 1)$.

Задатак 522. Решити једначину $x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^3$ у скупу N_0.

Решење: Како је за $x \geq 0$
$y^3 - (x+1)^3 = 5x^2 - 9x + 7 > 0$
$y^3 - (x+3)^3 = x^2 + 33x + 19 > 0$
добијамо да је $x + 1 < y < x + 3$. Пошто су x и y цели бројеви мора бити $y = x + 2$ па једначину можемо трансформисати у $2x(x - 9) = 0$. Решења су $(0, 2)$ и $(9, 11)$.

43.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 523. На колико начина се 380 динара може поделити двојици браће, тако да сарији добија само новчанице од 50 динара, а млађи само новчанице од 20 динара?

Задатак 524. Доказати да једначина $x^2 + y^2 + z^2 = 2007$ нема решења у скупу природних бројева.

Задатак 525. Решити једначину $ab + ac + bc = abc$ у скупу N.

Задатак 526. Решити Диофантову једначину $3^x - 2^y = 1$.

Задатак 527. Доказати да једначине: 1) $3x^2 + 5y^2 = 4444$;
2) $15x^2 - 7y^2 = 9$;
3) $5^x + 6^y = 234567$;
немају решења у скупу Z.

Литература

[1] Марија Станић, Небојша Икодиновић *Теорија бројева, збирка задатака*, Завод за уџбенике и наставна средства 2004.

[2] В. Мићић,З. Каделбург, *Увод у теорију бројева*, Друштво математичара Србије 2003.

Предавање 44

Нестандардни задаци из теорије бројева

Раде Шпегар, Математичка гимназија

44.1 Теоријски увод

Теорема 99. [Дирехлеова теорема] Свака бесконачна аритметичка прогресија са основом и кораком природним бројевима садржи бесконачно много простих бројева.

44.2 Задаци за рад

Задатак 528. Да ли је могуће да скуп са 2010 различитих бројева бројева има својство да како год изабрали 2 броја из овог скупа однос већег према мањем је прост број?

Решење: Нека су a, b, c три броја из овог скупа и $a > b > c$. Сада је $\frac{a}{b} = p_1, \frac{b}{c} = p_2, \frac{a}{c} = p_3$ где су p_1, p_2, p_3 прости бројеви. Сада је $p_1 p_2 = p_3$ што је контрадикција јер је p_3 прост број.

Задатак 529. За сваки скуп A природних бројева нека је n_A број тројки (x, y, z) елемената A таквих да је $x < y$ и $x + y = z$. Ако A садржи 7 различитих бројева одредити максималну вредност n_A.

Решење: Максимум 9 остварен је за $A = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Да би доказали да је 9 максимум, посматрајмо 7 бројева $a < b < c < d < e < f < g$ и одредимо за сваки од њих колико пута мозе послужити као средњи члан тражене тројке. Одговор је $0, 1, 2, 3, 2, 1, 0$ респективно, па је $n_A \leq 9$.

Задатак 530. Нека је скуп $S = 105, 106, ..., 210$. Одредити минималну вредност n такву да сваки n-точлани подскуп T од S садржи бар 2 елемента који нису узајамно прости.

Решење: Нека је p прост број из скупа $S.2p > 210$ следи $2p$ не припада S односно p је узајамно прост са било којим другим бројем из S. Одредићемо број простих бројева у S. Одредимо колико је бројева у S таквих да је сваки од њих дељив са бар једним од бројева $2, 3, 5, 7, 11$ и назовимо тај скуп А.Назовимо подскуп од A са A_i ако је A_i скуп свих бројева из A дељивих са i . Користећи принцип укључења и искључења добијамо: $A = A_2 \cup A_3 \cup A_5 \cup A_7 \cup A_11$. $|A| = |A_2| + |A_3| + |A_5| + |A_7| + |A_{11}| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_2 \cap A_7| - |A_2 \cap A_{11}| - |A_3 \cap A_5| - |A_3 \cap A_7| - |A_3 \cap A_{11}| - |A_5 \cap A_7| - |A_5 \cap A_{11}| - |A_7 \cap A_{11}| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_7| + |A_2 \cap A_3 \cap A_{11}| + |A_2 \cap A_5 \cap A_7| + |A_2 \cap A_5 \cap A_{11}| + |A_2 \cap A_7 \cap A_{11}| + |A_3 \cap A_5 \cap A_7| + |A_3 \cap A_5 \cap A_{11}| + |A_3 \cap A_7 \cap A_{11}| + |A_5 \cap A_7 \cap A_{11}| - |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| - |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_{11}| - |A_2 \cap A_3 \cap A_7 \cap A_{11}| - |A_2 \cap A_5 \cap A_7 \cap A_{11}| - |A_3 \cap A_5 \cap A_7 \cap A_{11}| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7 \cap A_{11}| = 137 - 66 + 16 - 1 + 0 = 86$. Видимо да је једини сложен број из S који није у A $13^2 = 169$ јер $13 \cdot 17 = 221 > 220$. Одавде добијамо да се С састоји од 87 сложених и 19 простих бројева. Доказаћемо да у сваком скупу од 26 бројева из S постоје нека два која нису узајамно проста. Бар 6 од њих припадају скупу A па из Дирихлеовог принципа добијамо да бар 2 припадају истом A_i па они нису узајамно прости јер су оба дељиви са i. На крају нам остаје да конструишемо решење са 25 елемената тако да је у њему сваки пар бројева узајамно прост.Нека је P скуп свих простих бројева из S. Посматрајмо скуп: $P \cup 11^2, 5^3, 2^7, 3^2 \cdot 17, 13^2, 7^2 9$ ово је 25-точлани скуп који испуњава услове задатка.

Задатак 531. Колико има уређених парова природних бројева (x, y) таквих да је $x \leq y$ за које важи $(x, y) = 5!$ и $[x, y] = 50!$

Решење: Прво приметимо да између 1 и 50 има 15 простих бројева. Нека је $f(a, b)$ највеци степен броја b који дели a. За сваки прост број p имамо да је $f(x, p) = f(5!, p)$ и $f(y, p) = f(50!, p)$ или $f(y, p) = f(5!, p)$ и $f(x, p) = f(50!, p)$. Такође важи $f(50!, b) > f(5!, b)$. Сада је јасно да како имамо 15 простих бројева то онда имамо 2^{15} парова бројева (x, y) (за сваки прост број бирамо који од x и y ћемо да ставимо већи степен) и x није једнако y. Можемо упарити све (x, y) и (y, x) где је $x < y$ и на крају из сваког пара узети одговарајући уређени пар и на тај начин добити 2^{14} уређених парова који испуњавају услове задатка.

Задатак 532. Наћи све скупове 100 природних бројева таквих да је сума свака четири четврта степена од тих бројева дељив са производом та четири броја.

Решење: Овакви скупови морају бити облика $n, n, ..., n$ или $3n, n, n, ..., n$ за неки природан број n. Јасно је да ако сваки број скупа A помнозхимо или поделимо истим природним бројем и даље добијамо скуп који испуњава услов задатка те је довољно испитати случај када сви ови бројеви немају заједнички фактор. Нека су x, y, z, w, q 5 од ових бројева, сада zwq дели $z^4 + w^4 + q^4 + x^4$ и $z^4 + w^4 + q^4 + y^4$ па дели и $x^4 - y^4$. Слично $w^4 \equiv q^4 \equiv x^4(mod\ z)$ па је $3w^4 \equiv 0(mod\ z)$. Ако z има прост делилац који није једнак 3 онда овај прост делилац дели све остале бројеве из скупа што је контрадикција. Ако је z дељив са 9 онда су сви остали бројеви из скупа дељиви са 3 сто је такође котрадикција. Одавде добијамо да су сви бројеви или једнаки 1 или 3. Ако је неки број једнак 3, онда су сви остали конгруенти по модулу 3, али не могу бити дељиви са 3 јер долазимо до контрадикције па су онда сви конгруентни са 1. Овим је доказ завршен.

Задатак 533. Наћи све полиноме P са целобројним коефицијентима такве да ако је p прост број онда је и $P(p)$ прост број.

Решење: Ако $P \not\equiv x$ онда постоји број p који је прост такав да је $P(p) = q \neq p$ прост. Због $kq|P(p+kq) - P(p)$ за свако природно k имамо да $q|P(p + kq)$ за свако природно k, али скуп $\{p + kq|k \in \mathbb{N}\}$ има бесконачно много простих елемената, одакле је $f(x) \equiv q$. Коначно, одговор је $P(x) \equiv x$ или $P(x) \equiv q$, где је q прост.

Задатак 534. За $x \in (0, 1)$ нека је $y \in (0, 1)$ број чија је n-та цифра у децималном запису 2^n-та цифра броја x у децималном запису. Показати да ако је x рационалан онда је и y.

Решење: Познато је тврђење да је број рационалан ако и само ако су у било ком бројевном систему после неке тачке његове цифре периодичне. Односно од неке цифре у децималном запису броја x добијамо периоду и хоцемо да докажемо да исто важи и за y, одакле би следило да је и y рационалан. Нека d дужина периоде којом се појављују цифре у децималном запису броја x и нека је $d = 2^a b$ где је b непаран природан број, а $a \in N_0$. Из мале Фермаове теореме добијамо да постоји природан број c такав да важи $a^c \equiv 1(mod\ b)$. За $k \in N$ и $k \geq 2^a$ важи $2^{k+c} \equiv 2^k(mod\ d)$ па су после a-те цифре у броју ы цифре периодичне са периодом c која је из мале Фермаове теореме коначна.

Задатак 535. Нека је n природан број. Доказати да је могуће изабрати бар $2^{n-1} + n$ бројева из скупа $1, 2...2^n$ тако да за свака два различита изабрана броја x и y, $x + y$ није делилац броја xy

Решење: Изаберимо све непарне бројеве којих је 2^{n-1} и све степене двојке којих је n. Доказаћемо да овај избор испуњава услове задатка. Добијамо 3 случаја: 1) Ако су изабрана 2 непарна броја онда је $x + y$ паран, а xy непаран па $x + y$ не дели xy.

2) Ако су изабрани степен двојке и непаран број онда $(x+y, y) = (x, y) = (x, x+y) = 1$ па $(x+y, xy) = 1$ односно $x+y$ не дели xy.
3) Ако су изабрана 2 степена двојке, то њихов збир сигурно није степен двојке па има непаран делилац, док је xy степен двојке и не може имати непаран делилац односно $x+y$ не дели xy.

Задатак 536. Ако су xy, yz, zx рационални:

1) Доказати да је $x^2 + y^2 + z^2$ рационалан.
2) Ако је и $x^3 + y^3 + z^3$ рационалан доказати да су и x, y, z рационални.

Решење: 1) $x^2 = \frac{xy \cdot zx}{yz}$ па су и квадрати ових бројева рационални из чега следи и да им је и збир квадрата рационалан.

2) Приметимо следеће: $x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz$ и $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = k \in Q$, $(x+y+z)^2 = a \in Q$, $(xyz)^2 = b \in Q$ и нека нису и a и b квадрати рационалних бројева па је: $k\sqrt{a} + 3\sqrt{b} \in Q$ одакле након сређивања добијамо да је $k_1\sqrt{c_1} + k_2\sqrt{c_2} \in Q$ (повадимо све могуће квадрате из корена) па мора бити $k_1 + k_2 = 0$ и $c_1 = c_2$ што значи да је $x^3 + y^3 + z^3 = 0$, а то из Велике Фермаове теореме има само тривијално решење $x = y = z = 0$. Остаје нам случај када је $\sqrt{b} \in Q$ односно $xyz \in Q$ што након дељења са рационалним бројем xy, yz или zx даје да су z, x и y респективно рационални.

Задатак 537. Доказати или оповргнути: Из интервала $[1, ..., 30000]$ може се изабрати скуп од 1000 бројева који не садржи аритметички низ дузхине 3.

Решење: Посматрајмо бројеве који у тернарној репрезентацији имају само цифре 0 и 1. Доказаћемо да ови бројеви сигурно не образују аритметички низ дужине 3. Претпоставимо супротно и нека је $2y = x + z$. Како y садржи само цифре 0 и 1, то онда $2y$ садржи само цифре 0 и 2. Одавде добијамо да мора бити $x = z = y$ што је контрадикција. Највећи 10-тоцифрени број у тернарном систему који не садржи цифру 2 је $(3^{10} - 1)/2 = 29524 < 30000$ па ми можемо од бројева из траженог интервала да образујемо скуп са бар $2^{10} = 1024$ броја што је чак и више од тражених 1000.

44.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 538. Наћи све тројке природних бројева (x, y, z) такве да важи: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$.

Задатак 539. Доказати да међу 12 узастопних природних бројева постоји један који је мањи од збира својих делилаца већих од 1.

Задатак 540. Нека су a, b реални бројеви тако да се низ $a-b, a^2-b^2, a^3-b^3, \ldots$ састоји искључиво од природних бројева. Доказати да су a и b цели.

Задатак 541. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n тако да децимална репрезентација броја 5^n садржи блок од 2010 узастопних нула.

Задатак 542. Дат је скуп M од 1985 природних броејва, од којих ниједан нема прост делилац већи од 26. Доказати да овај скуп садржи 4 различита броја чија је геометријска средина природан број.

Литература

[1] T. Andreescu, D. Andrica, Z. Feng, *104 Number Theory Problems*, Birkhauser 2006.

[2] *Mathematical Olympiads 1997-1998: Olympiad Problems from Around the World*

[3] H. Lee, *Problems in Elementary Number Theory*

[4] T. Andreescu, D. Andrica, *An Introduction To Diophantine Equations*, GIL Publishing House 2002.

[5] *www.mathlinks.ro*

Предавање 45

Полиноми

Раде Шпегар, Математичка гимназија

45.1 Теоријски увод

Дефиниција 81. Полином $P(x)$ је иредуцибилан у $\mathbf{Z}[x]$ (слично и у $\mathbf{R}[x]$ и $\mathbf{Q}[x]$) ако не постоје два полинома $Q(x)$ и $R(x)$ из $\mathbf{Z}[x]$ (односно $\mathbf{R}[x]$ или $\mathbf{Q}[x]$) таква да је $P(x) = Q(x)R(x)$ чији су степени бар 1.

Теорема 100. [Гаус] Полином је растављив на скупу целих бројева ако и само ако је растављив на скупу рационалних бројева.

Теорема 101. Ако је $P(x)$ реалан полином онда $x - a|P(x)$ $(a \in R)$ ако и само ако $P(a) = 0$. Слично важи и за $P(x) \in \mathbf{Q}[x]$ и $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$.

Теорема 102. За полином $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$ и различите целе бројеве a и b важи $a - b|P(a) - P(b)$.

Теорема 103. Нека је $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$ моничан полином. Ако је r његова рационална нула онда $r \in \mathbf{Z}$.

Теорема 104. Ако полином $P(x) \in \mathbf{R}[x]$ има бар $\deg(P) + 1$ нула онда је он индентички једнак 0.

45.2 Задаци за рад

Задатак 543. Доказати да не постоји полином са целобројним коефицијентима такав да је $P(20) = 1$ и $P(10) = 2$.

Решење: Претпоставимо да постоји. Важи: $x - y|P(x) - P(y)$(следи из Безуове теореме убацивањем ьпш) па мора бити $20 - 10|1 - 2$ што је контрадикција.

Задатак 544. Нека су P и Q полиноми за које важи да је $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Доказати да: $P(x) - Q(x)|P(P(x)) - Q(Q(x))$

Решење: $P(P(x)) - Q(Q(x)) = P(P(x)) - P(Q(x)) + Q(P(x)) - Q(Q(x))$. Одавде добијамо $P(x) - Q(x)|P(P(x)) - P(Q(x))$ и $P(x) - Q(x)|Q(P(x)) - Q(Q(x))$ одакле следи тражено тврђење.

Задатак 545. Наћи остатак при дељењу $x^{100} - 2x^{51} + 1$ са $x^2 - 1$.

Решење: Нека је $x^{100} - 2x^{51} + 1 = (x^2 - 1)q(x) + ax + b$. За $x = 1$ добијамо $a + b = 0$, а за $x = -1$ добијамо $b - a = 4$, а одакле је $b = 2$, а $a = -2$ па је остатак $-2x + 2$.

Задатак 546. Нека су a и b цели бројеви. Доказати да је полином $((x - a)(x - b))^2 + 1$ нерастављив над скупом целих бројева.

Решење: Нека је $((x - a)(x - b))^2 + 1 = p(x)q(x)$. Замењујући $x = a$ и $x = b$ добијамо да је $p(a) = q(a) = p(b) = q(b)$ па су $p(x) - 1$ и $q(x) - 1$ оба дељиви са $(x - a)(x - b)$. Односно $p(x) = k(x - a)(x - b) + 1$ и $q(x) = l(x - a)(x - b) + 1$ где су k и l цели па је $((x - a)(x - b))^2 + 1 = kl(x - a)(x - b)^2 + (k + l)(x - a)(x - b) + 1$. Одавде следи да је $kl = 1$ и $k + l = 0$ што је немогуће.

Задатак 547. Нека је $n \geq 2$ природан број и $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x_1 + 1$ полином са природним коефицијентима такав да важи $a_k = a_{n-k}$ за $k = 1, 2, ..., n-1$. Доказати да постоји бесконачно мнгоо парова (x, y) природних бројева тако да $x|P(y)$ и $y|P(x)$.

Решење: Постоји бар један овакав пар бројева $(1, P(1))$. Ако би било коначно много парова, онда би могли узети такав пар да је y максимално(напомена: тада је $y > x$ јер ако би било $x < y$ могли би их само заменити, а тражено својство би било очувано, а не мозе бити ни $x = y$ осим у случају $x = y = 1$, а он не садржи максимално y јер је $P(1) > 1$). Доказаћемо да ако пар бројева (x, y) поседује ово својство онда и пар $(y, P(y)/x)$ поседује ово својство или еквивалетно $y|P(P(y)/x)$. Услов задатка нам даје $P(P(y)/x) = (P(y)/x)^n P(x/P(y)))$. Како је $P(y) \equiv 1(mod\ y)$ одакле закључујемо да је $P(P(y)/x) \equiv P(x)/x^n(mod\ y)$. Јасно је да $(x, y) = 1$ па $P(x)/x^n \equiv P(x) \equiv 0(mod\, y)$ што је тражено.

Задатак 548. Наћи најмању вредност полинома $x^3(x^3+1)(x^3+2)(x^3+3)$

Решење: Уведимо смену $x^3 = t$, добијамо да треба минимизовати $t(t+1)(t+2)(t+3) = (t^2+3t)(t^2+3t+2)$. Сада уведимо смену $s = t^2+3t+1$ и добијамо да за овакво с треба минимизовати s^2-1 што је минимално за $s = 0$. Још је потребно испитати да ли $q(t) = t^2+3t+1 = 0$ има реална решења.Важи $q(0) = 1$ и $q(-1) = -1$, а како је q непрекидна функција то постоји реалан број r у интервалу $[-1, 0]$ за који важи $q(r) = 0$ чиме је тврђење задатка доказано. Или још лакше можемо решити ову квадратну једначину. $t^2 + 3t + 1 = (t + 3/2)^2 - 9/4 + 1 = 0$ што очигледно има реално решење.

Задатак 549. Нека је $p(x)$ кубни полином са целобројним коефицијентима и водећим коефицијентом 1 и са једном нулом једнакој производу друге две. Доказати да је $(p(1) + p(-1) - 2(1 + p(0))) \cdot z = 2p(-1)$ где је z цео број.

Решење: Нека су a, b и ab корени кубног полином $p(x) = (x - a)(x - b)(x - ab)$. Приметимо да је

$$2p(-1) = -2(1 + a)(1 + b)(1 + ab)$$

и

$$(p(1) + p(-1) - 2(1 + p(0))) = -2(1 + a)(1 + b).$$

Ако су оба израза 0 тврђење проблема одмах следи. У супротном $\frac{2p(-1)}{p(1)+p(-1)-2(1+p(0))} = 1 + ab$ је рационалан па је и ab рационалан. Како је $(ab)^2 = -p(0)$ то је онда ab цео чиме је тврђење задатка доказано.

Задатак 550. Доказати да је $(x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$ дељив са $5(x - y)(y - z)(z - x)$.

Решење: Након степеновања добијамо да су коефицијенти уз све чланове сигурно дељиви са 5(јер су $\binom{5}{1}, \binom{5}{2}, \binom{5}{3}, \binom{5}{4}$ дељиви са 5) осим коефицијената уз x^5, y^5, z^5 за које лако срачунамо да су нуле. Па је тразени израз дељив са 5. За $x = y$ израз је једнак нули па је дељив и са $(x - y)$. Аналогно је дељив и са $(y - z)$ и $(z - x)$.

Задатак 551. За које k је $x^3 + y^3 + z^3 + kxyz$ дељив са $x + y + z$.

Решење: Питамо се да ли постоји полином f такав да је $x^3 + y^3 + z^3 + kxyz = f(x, y, z)(x + y + z)$. Убацимо ли $z = -x - y$ добијамо да је $x^3 + y^3 - (x + y)^3 - kxy(x + y) = -3xy(x + y) - kxy(x + y)$, односно $xy(x + y)(3 + k) = 0$. Довољно је узети да су и x и y позитивни па мора бити $k = -3$, а у том случају је: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$.

Задатак 552. Нека је P кубни полином задат са $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, где су a, b, c, d цели и $a \neq 0$. Претпоставимо да је $xP(x) = yP(y)$ за бесконачно много парова x, y целих бројева за које не важи $x = y$. Доказати да P има целебројни корен.

Решење: Нека су x, y различити бројеви који испуњавају $xP(x) = yP(y)$; ово еј еквивалетно $a(x^4-y^4)+b(x^3-y^3)+c(x^2-y^2)+d(x-y) = 0$. Дељењем са $x-y$ добијамо $a(x^3+x^2y+xy^2+y^3)+b(x^2+xy+y^2)+c(x+y)+d = 0$. Сменимо $x+y = p$ и $x^2+y^2 = q$ и добијамо $apq + \frac{b}{2}(p^2+q) + cp + d = 0 \leftrightarrow (2ap+b)q = -(bp^2+2cp+2d)$. Како је из АГ $q \geq p^2/2$ следи да важи $p^2|2ap+b| \leq 2|bp^2+2p+2d|$ што је могуће за коначно много различитих вредности p. Па постоји вредност p таква да је $xP(x) = (p-x)P(p-x)$ за бесконачно много вредности x. Како је $xP(x)-(p-x)P(p-x)$ коначног степена са бесконачно много нула онда мора бити једнак нули полиному па је $xP(x) = (p-x)P(p-x)$за све x. Убацимо $x = 0$ и добијамо $pP(p) = 0$ па је за $p \not{0}$ p целобројна нула полинома P. Ако је $p = 0$ онда $P(x) = -P(-x)$. Одавде следи $b = d = 0$, па је $P(x) = x(ax^2+c)$. Одавде је 0 нула полином P.

45.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 553. Колики је остатак при дељењу $x^{2010} - x^{2009} + 1$ са $x^3 - x$?

Задатак 554. Нека су a, b, c различити бројеви. Одредити: $\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} - 1$ за свако x. (помоћ:прво проверити за $x = a$, $x = b$, $x = c$)

Задатак 555. Доказати да је полином $(1+x+...x^n)^2 - x^n$ производ два полинома са целовројним коефицијентима.

Задатак 556. Нека полином ax^3+bx^2+cx+d има целобројне коефицијнте и ad је непаран, а bc паран. Доказати да је бар једна нула полинома ирационална.

Задатак 557. Нека је n природан број и $a_1, a_2, ..., a_n$ међусобно разлицхити цели бројеви. Наћи све x за које важи $(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_{2n}) = (-1)^n(n!)^2$.

Литература

[1] *Mathematical Olympiads 1997-1998: Olympiad Problems from Around the World*

[2] Д. Ђукић, В. Јанковић, И. Матић, Н.Петровић, *The Imo Compendium*, Springer 2006.

[3] A. Engel, *Problem Solving Strategies*, Springer 1997.

[4] *www.mathlinks.ro*

Предавање 46

Рачунске методе у геометрији

Раде Шпегар

46.1 Теоријски увод

Теорема 105. [Стјуарт] Ако је D тачка на страници BC троугла ABC. Ако је $AB = c, BC = a, AC = b, AD = d, BD = m, DC = n$ важи једнакост: $b^2m + c^2n = man + d^2a$.

Теорема 106. [Потенција тачке у односу на круг] За сваку тачку X ван кружнице $k(O,r)$ и праву кроз X која сече k у тачкама A и B важи: $XA \cdot XB = |XO^2 - r^2|$

46.2 Задаци за рад

Задатак 558. Тачке A_1 и B_1 деле странице BC и AC троугла ABC у односу $BA_1 : A_1C = 1 : p$ и $AB_1 : B_1C = 1 : q$ респективно. У ком односу BB_1 дели AA_1?

Решење: Нека је O пресек AA_1 и BB_1. У троуглу B_1BC повуцимо дуж A_1A_2 такву да је $A_1A_2|BB_1$. Онда $\frac{B_1C}{B_1A_2} = 1 + p$ и зато је $AO : OA_1 = AB_1 : B_1A_2 = B_1C : qB_1A_2 = (1 + p) : q$

Задатак 559. Одредити дужине одсечака на које странице троуглова деле тачке додира уписаног круга, а затим и приписаног круга тачке A.

Решење: Нека су тачке додира уписаног круга са страницама BC,AC и AB респективно A_1, B_1 и C_1. Тангенте на круг из једне тачке су једнаке па је $AB_1 = AC_1 = x$, $BC_1 = BA_1 = y$ и $CA_1 = CB_1 = z$. Сада је потребно решити систем једначина $x + y = c$, $y + z = a$ и $z + x = b$

одакле се добија: $x = p-a$, $y = p-b$ и $z = p-c$ где је p полуобим. Нека приписани круг додирује праве BC,AC и AB респективно A_a, B_a и C_a. Тангенте из A на приписани круг су једнаке па је $AC_a = AB_a$ како је па је $BC_a - CB_a = z - y$. Из једнакости тангенти лако се добија да је $BC_a = BA_a$ и $B_aC = CA_a$ па је $BC_a + CB_a = z + y$, а одавде се садач лако добија да је $B_Aa = BC_a = z$ и $B_aC = CA_a = y$, а осим тога је и $AC_a = AB_a = x + y + z = p$.

Задатак 560. Доказати да важи $t_c^2 = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$.

Решење: Без губљења општости претпоставимо да је $a > b$ и нека је троугао оштроугли(случај тупоуглог се ради слично) и нека је подноз-хје висине из C на AB тачка D и средиште AB тачка E. Нека $AD = x$, сада је $CE = \frac{c}{2} - x$ и $EB = \frac{c}{2}$. Из Питагорине теореме на $\triangle ADC$ и $\triangle EDC$ имамо да је $b^2 - x^2 = {t_c}^2 - (\frac{c}{2} - x)^2$ одакле је ${t_c}^2 = b^2 + \frac{c^2}{4} - cx$. Сада је потребно одредити само x. Сада примењујемо Питагорину теорему на $\triangle ACD$ и $\triangle BDC$ и добијамо $b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$ одакле је $x = fracb^2 + c^2 - a^2 2c$, замењујући x у првој једнацјини добијамо да је $t_c^2 = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$.

Задатак 561. Доказати да бисектриса угла код темена A у $\triangle ABC$ дели страницу BC у односу $b : c$

Решење: Посматрајмо пресек симетрале код темена A са описаним кругом око $\triangle ABC$ и назовимо ту тачку D.Подножје бисектрисе означхавацјемо са $E.\angle BDA = \angle BCA$, $\angle ADC = \angle ABC$, $\angle CBD = \angle BAD = \frac{\alpha}{2}$, $\angle BCD = \angle BAD = \frac{\alpha}{2}$ одавде добијамо да је: $\triangle ABE \sim \triangle CDE$ и $\triangle CAE \sim \triangle DBE$. Нека је $CE : EB = y : z$. Сада је $CE = \frac{y}{y+z}a$ и $EB = \frac{z}{y+z}a$. Из сличности $\triangle ABE$ и $\triangle CED$ добијамо да је: $\frac{s_a}{b} = \frac{za}{(y+z)m}$, а из сличности $\triangle CAE$ и $\triangle DBE$ добијамо $\frac{s_a}{c} = \frac{ya}{(y+z)m}$ сада је лако: $y : z = b : c$.

Задатак 562. Срачунати s_a (дужина бисектрисе из темена A) преко $x = p-a, y = p-b, z = p-c$ (дужине тангенти из темена на уписани круг).

Решење: Из Стјуартове теореме имамо да је $b^2m + c^2n = man + {s_a}^2a$ где је $m = \frac{c}{b+c}a$ и $n = \frac{b}{b+c}a$ одавде је $s_a = \sqrt{\frac{b^2m+c^2n}{a} - mn} = \frac{2\sqrt{x(x+y)(x+z)(x+y+z)}}{2x+y+z}$

Задатак 563. Срачунати r_a (полупречник приписаног круга темена A) преко x, y, z.

Решење: Нека је O_a центар приписаног круга темена A, нека је додирна тачка приписаног круга са дужи BC тачка D, подножје бисектрисе из тачке B на AC тачка E, а подножје нормале из E на BC

тачка F. $BD = z$, $DO_a = r_a$, $BE = s_b$, $EF = h_a \frac{a}{a+c}$, а рачунањем углова добијамо да је $\triangle BDO_a \sim \triangle BEF$ одакле је: $\frac{z}{\sqrt{{r_a}^2+z^2}} = \frac{h_a \frac{a}{a+c}}{s_b}$. $h_a a = 2S_{\triangle ABC} = \sqrt{xyz(x+y+z)}$. $s_b(a+c) = 2\sqrt{x(x+y)(x+z)(x+y+z)}$ па је $\frac{h_a \frac{a}{a+c}}{s_b} = \sqrt{\frac{xz}{(y+x)(y+z)}}$. Даље рачунањем лако добијамо: $r_a = \sqrt{\frac{yz(x+y+z}{x}}$

Задатак 564. Дата је права l. Квадрат $ABCD$ се ротира око центра. Наћи геометријско место тачака средишта дужи PQ где је P подножје нормале из тачке D на праву l и q средиште странице AB.

Решење: Посматрајмо координантни систем са координантним поцхетком у центру квадрата $ABCD$. Нека су координате темена квадрата $A(x,y)$, $B(y,-x)$, $C(-x,-y)$, $D(-y,x)$. Нека је линија l задата са $y = a$(узимамо онај координантни систем чија је ш-оса паралелна са l). Подножје нормале из D на l има координате $P(-y,a)$, а средиште AB има координате $Q(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2})$. Нека је $t = \frac{x-y}{4}$ и сада добијамо да је тражено геометријско место тачака $(t, -t+\frac{a}{2})$, при чему је јос довољно приметити да $x-y$ варира од $-AB$ до AB.

Задатак 565. Доказати да ако у троуглу важи: $\sqrt{r}_a + \sqrt{r}_b + \sqrt{r}_c = \frac{\sqrt{r_a r_b r_c}}{r}$ онда је он једнакостраничан.

Решење: За наш троугао важи:$\frac{1}{\sqrt{r_a r_b}} + \frac{1}{\sqrt{r_b r_c}} + \frac{1}{\sqrt{r_c r_a}} = \frac{1}{r}$. Важи $r_a = \sqrt{yz(x+y+z)x}$, $r_b = \sqrt{xz(x+y+z)y}$ и $r_c = \sqrt{xy(x+y+z)z}$ па је $r_a r_b = z(x+y+z)$, $r_b r_c = x(x+y+z)$ и $r_c r_a = y(x+y+z)$. Важи: $r = \sqrt{xyz}x+y+z$, па након сређивања добијамо да је: $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = x+y+z \leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + (\sqrt{y}-\sqrt{z})^2 + (\sqrt{z}-\sqrt{x})^2 = 0$ одакле добијамо да мора бити $x = y = z$ па је и $a = b = c$

Задатак 566. [Птоломеј] Доказати да сваки тетиван четвороугао $ABCD$ важи: $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$.

Решење: На дијагонали BD нађемо тачку M такву да је $\angle BCA = \angle MCD$. Па је $\triangle ABC$ $\triangle DMC$ односно $CD/MD = AC/AB$, тј. $CD \cdot AB = AC \cdot MD$. Како је $\angle BCA = \angle MCD$ следи: $\angle BCM = \angle BCA + \angle ACM = \angle ACD = \angle ACM + \angle MCD$. Важи: BCM ACD одакле је $BC/BM = AC/AD$, тј. $BC \cdot AD = AC \cdot BM$. Сада сумирањем две добијене једнакости долазимо до тражене једнакости $CD \cdot AB + BC \cdot AD = AC \cdot MD + AC \cdot BM = AC \cdot BD$.

Задатак 567. Израчунати OI преко r и R где су O и R центар и полупречник описаног круга око $\triangle ABC$, а I и r центар и полупречник уписаног круга око $\triangle ABC$

Решење: Симетрала из A пролази кроз I и сече описани круг у A_1. Важи: $AI \cdot IA_1 = R^2 - OI^2$. Повуцимо нормалу IM дужине r на AB. Познато је да оан дели страницу AB на делове дужине x и y. Из Питагорине теореме добијамо да је $AI = \sqrt{x^2 + \frac{xyz}{x+y+z}}$. Важи: $\angle BIA = \angle IBA = 90^o - \frac{\gamma}{2}$ одакле добијамо да је $IA = BA' = CA'$. Повуцимо нормалу $A'N$ на BC(она полови BC).$\triangle AIM$ $\triangle A'BN$ па је $AM/AI = BN/BA' = BN/IA'$ па је $AI \cdot IA' = BN \cdot AI^2/AM = \frac{y+z}{2}(x^2 + \frac{xyz}{x+y+z})/x = 2\frac{abc}{4s} = 2rR$. Што значи да је: $2rR = R^2 - OI^2$ односно: $OI = \sqrt{R(R-2r)}$ чиме је доказ завршен.

46.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 568. Доказати теорему о потенцији тачке.

Задатак 569. Доказати да су тежишне дужи AA_1 и BB_1 и троугла ABC нормалне ако и само ако је $a^2 + b^2 = 5c^2$

Задатак 570. Доказати Стјуартову теорему.

Задатак 571. Наћи однос страница троугла код кога је једна тежишна дуж подељења уписаном кружницом на три једнака дела.

Задатак 572. Ако су координате темена троуглова рационални бројеви доказати да су онда и координате центра описаног круга такође рационални бројеви.

Литература

[1] Виктор Прасолов, *Problems in Plane and Solid Geometry*

[2] Титу Андреесцу, Дорин Андрица, *360 Problems for Mathematical Contests*, ГИЛ Публишинг Хоусе, 2003

Део V

Предавања за 7. разред

Предавање 47

Дељивост и конгруенције

Милован Мајсторовић, Математичка гимназија

47.1 Теоријски увод

Дефиниција 82. Цео број a је дељив целим бројем $b \neq 0$ ако постоји цео број c такав да је $a = bc$.

Теорема 107. Нека су $n \neq 0$, m, a, b и $d \neq 0$ произвољни цели бројеви, тада важи:

1) $n \mid n$.
2) $d \mid n$ и $n \mid m$ повлачи $d \mid m$.
3) $d \mid n$ и $d \mid m$ повлачи $d \mid (an + bm)$.
4) $d \mid n$ повлачи $ad \mid an$.
5) $ad \mid an$ и $a \neq 0$ повлачи $d \mid n$.
6) $1 \mid n$.
7) $n \mid 0$.

Пример 1. Неки од критеријума дељивости са неким природним бројевима.

Број n је дељив са 2 ако се завршава са цифрама 0, 2, 4, 6 или 8.

Број n је дељив са 3 ако је његов збир цифара дељив са 3.

Број n је дељив са 4 ако су му задње две цифре дељиве са 4.

Број n је дељив са 5 ако се завршава са цифрама 0 и 5.

Број $n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_3 a_2 a_1}$ је дељив са 7 ако је број $m = \overline{a_3 a_2 a_1} - \overline{a_6 a_5 a_4} + \overline{a_9 a_8 a_7} - ...$ дељив са 7.

Број n је дељив са 8 ако су му задње три цифре дељиве са 8.

Број n је дељив са 9 ако му је збир цифара дељив са 9.

Број n је дељив са 11 ако му је разлика цифара на парним и непарним местима дељива са 11.

Број $n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_3 a_2 a_1}$ је дељив са 13 ако је број $m = \overline{a_3 a_2 a_1} - \overline{a_6 a_5 a_4} + \overline{a_9 a_8 a_7} - ...$ дељив са 13.

Број n је дељив са 25 ако су му задње две цифре дељиве са 25.

Број $n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_3 a_2 a_1}$ је дељив са 27 ако је број $m = \overline{a_3 a_2 a_1} + \overline{a_6 a_5 a_4} + \overline{a_9 a_8 a_7} + ...$ дељив са 27.

Број $n = \overline{a_k a_{k-1} ... a_3 a_2 a_1}$ је дељив са 37 ако је број $m = \overline{a_3 a_2 a_1} + \overline{a_6 a_5 a_4} + \overline{a_9 a_8 a_7} + ...$ дељив са 37.

Број n је дељив са 100 ако се завршава са две цифре 0.

Дефиниција 83. Цео број d за који важи $d \mid a$ и $d \mid b$ назива се заједнички делилац. Цео број s за који важи $a \mid s$ и $b \mid s$ назива се заједнички садржалац.

Дефиниција 84. Највећи природан број у скупу делилаца бројева a и b се назива највећи заједничи делилац бројева a и b и обележава се са НЗД(a,b) или (a,b). Најмањи природани број у скупу садржаоца бројева a и b назива се најмањи заједничи садржалац бројева a и b и означава се са НЗС(a,b) или $[a,b]$.

Теорема 108. Ако је $a \in Z$ и $b \in \ N$, онда a може на јединствен начин да се представи

$a = bq + r,\ (q,\ r \in Z,\ 0 \leq r < b)$.

Дефиниција 85. (Еуклидов алгоритам). На основу претходне теореме можемо исписати следећи низ једнакости:

$a = bq_1 + r_1,\ 0 \leq r_1 < b,$

$b = r_1 q_2 + r_2,\ 0 \leq r_2 < r_1,$

$r_1 = r_2 q_3 + r_3,\ 0 \leq r_3 < r_2,$

$. \ . \ . \ . \ . \ .$

$r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n,\ 0 \leq r_n < r_{n-1},$

$r_{n-1} = r_n q_{n+1}.$

Како бројеви $r_i (i \in \{1, 2, ...n\})$ чине сторого опадајући низ природних бројева мањих од b, то ћемо након коначног броја корака доћи да $r_{n+1} = 0$, тј. до једнакости $r_{n-1} = r_n q_{n+1}$, која говори о дељивости два узастопна остатка.

Теорема 109. Ако је $a = bq+r$, онда је (a,b) ı (b,r). Последњи остатак r_n који је различит од нуле у Еуклидовом алгоритму представља највећи заједнички делилац бројева a и b.

Доказ: Нека је d највећи заједнички делилац бројева a и b. Тада из $a = bq + r$ следи да $d \mid r$, односно да је d заједнички делилац бројева b и r. Ако је c највећи заједнички делилац бројева b и r, па опет из једнакости $a = bq + r$, следи $c \mid a$, па је c највећи заједнички делилац a и b тј. $c = d$. Следи (a,b) ı (b,r). На основу овога имамо:

$(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = ... = (r_{n-2}, r_{n-1}) = (r_{n-1}, r_n)$.

Пошто $r_n \mid r_{n-1}$ то је $(r_{n-1}, r_n) = r_n, paje (a, b) = r_n$.

Теорема 110. Постоје цели бројеви x_0 и y_0 тако да је

$(a,b) = ax_0 + by_0,$

барем један од бројева a и b није нула.

Дефиниција 86. За целе бројеве a и b који при дељењу са $m \neq 0$ дају исте остатке(тј. ако m дели $a-b$; ова два исказа су еквивалентна због Теореме 2) каже се да су конгруентни по модулу m. Симболично се пише:

$a \equiv b$ (мод m)

Ако m не дели $a - b$, онда a није конгруентно b по модулу m.

Теорема 111. Нека су a, b, c, d, x и y произвољни цели бројеви, тада важи:

1) $a \equiv a$ (мод m).

2) $a \equiv b$ (мод m), $b \equiv a$ (мод m) и $a - b \equiv 0$ (мод m) су еквивалентна тврђења.

3) Ако је $a \equiv b$ (мод m) и $c \equiv d$ (мод m), онда је $a + c \equiv b + d$ (мод m).

4) Ако је $a \equiv b$ (мод m) и $c \equiv d$ (мод m), онда је $ac \equiv bd$ (мод m).

5) Ако је $a \equiv b$ (мод m) онда је $a^x \equiv b^x$ (мод m)

6) Ако је $a \equiv b$ (мод m) и $b \equiv c$ (мод m) онда је и $a \equiv c$ (мод m).

7) Ако је $a \equiv b$ (мод m) и $c \equiv d$ (мод m) онда је и $ax + cy \equiv bx + dy$ (мод m).

8) Ако је $a \equiv b$ (мод m), онда постоји цео број q такав да је $a = mq+b$.

9) Ако је $a \equiv b$ (мод m) и $c \equiv d$ (мод m) онда је и $ac \equiv bd$ (мод m).

10) Ако је $a \equiv b$ (мод m) и П(ш) полином са целобројним коефицијентима, онда је $P(a) \equiv P(b)$ (мод m).

11) Ако је $a \equiv b$ (мод m) и $d \mid m$, онда је $a \equiv b$ (мод d).

Теорема 112. $ax \equiv ay$ (мод m) ако и само ако је $x \equiv y$ (мод $\frac{m}{(a,m)}$) ($a \neq 0$).

Теорема 113. Ако је $a \equiv b$ (мод m), $a \equiv b$ (мод n) и $(m, n) = 1$ онда је $a \equiv b$ (мод mn).

47.2 Задаци за рад

Задатак 573. Наћи остатак при дељењу $2^{25} \cdot 5^{15}$ са 3.

Решење: Како је $2 \equiv (-1)$ (мод 3) следи по Теореми 5.5 да је $2^{25} \equiv (-1)$ (мод 3). Степеновањем конгруенције $5 \equiv (-1)$ (мод 3) са 15, добијамо $5^{15} \equiv (-1)$ (мод 3). По теореми 4.4 добијамо да је $2^{25} \cdot 5^{15} \equiv 1$ (мод 3).

Задатак 574. Које су последње две цифре броја 99^{2010}?

Решење: Како је $99 \equiv (-1)$ (мод 100), следи да је $99^{2010} \equiv 1$ (мод 100), па се број 99^{2010} завршава са 01.

Задатак 575. Доказати да је број $a = 7^{2n} - 4^{2n}$ дељив са 33 за свако природно н.

Решење: Како је $7^2 = 49 \equiv 16$ (мод 33), следи $7^{2n} \equiv 16^{2n}$ (мод 33). Слично из $4^{2n} \equiv 16^{2n}$ (мод 33). Одузимањем конгруенција добијамо $a = 7^{2n} - 4^{2n} \equiv 16^{2n} - 16^{2n} \equiv 0$ (мод 33).

Задатак 576. Одредити све природне бројеве n за које је број $2^n - 1$ дељив са 7. Доказати да не постоји природан број $2^n + 1$ дељив са 7.

Решење: Посматрамо остатке степена броја 2 при дељењу са 7. Приметимо да степени облика $3k + 1$ даје остатак 2, степени облика $3k + 2$ дају остатак 4, а степени облика 3к дају остатак 1. Из овог следи да је потребно да n буде облика $3k$ да би $2^n - 1$ било дељиво са 7. Такође следи да $2^n + 1$ може дати остатке 3, 5 и 2 при дељењу са 7, па следи да број $2^n + 1$ не може бити дељиво са 7 ни за које природно n.

Задатак 577. Ако је збир 2004 природна броја дељив са 6, онда је и збир њихових кубова дељив са 6. Доказати.

Решење: Како за сваки природан број a број
$a^3 - a = (a-1)a(a+1)$
дељив са 6, то је и број
$a_1^3 - a_1 + a_2^3 - a_2 + ... + a_{2004}^3 - a_{2004} =$
$= (a_1^3 + a_2^3 + ... + a_{2004}^3) - (a_1 + a_2 + ... + a_{2004})$
дељив са 6, па како је по услову задатка број $a_1 + a_2 + ... + a_{2004}$ дељив са 6, следи да је и број $a_1^3 + a_2^3 + ... + a_{2004}^3$ дељив са 6.

Задатак 578. Ако су троцифреном броју дељивом са 7 последње две цифре једнаке, доказати да је збир цифара тог броја дељив са 7.

Решење: Нека су $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $a \neq 0$ такви да $7 \mid \overline{abb} =$ $= 100a + 10b + b = 100a + 11b = 98a + 7b + 2(a + b + b)$.

Тада $7 \mid a + b + b$, тј. збир цифара троцифреног броја $\overline{abb}$ дељив је са 7.

Задатак 579. Одредити (942,444).

Решење: Применом Еуклидовог алгоритма добијамо:
$942 = 2 \cdot 444 + 54$
$444 = 8 \cdot 54 + 12$
$54 = 4 \cdot 12 + 6$
$12 = 2 \cdot 6$
Одакле следи да је $(942, 444) = 6$.

Задатак 580. Доказати да је збир $2n+1$ узастопних природних бројева дељив са $2n+1$.

Решење: Тврђење следи из једнакости:
$k+(k+1)+(k+2)+...+(k+2n)=(k+n)(2n+1)$.

Задатак 581. Доказати да се разломак $\frac{21n+4}{14n+3}$ не може скратити.

Решење: Тврђење следи из следећег низа једнакости:
$(21n+4,14n+3)=(14n+3,7n+1)=(7n+1,1)=1$.

Задатак 582. Доказати да је за сваки природан број n бар један од бројева $3^{3n}+2^{3n}$ и $3^{3n}-2^{3n}$ дељив са 35.

Решење: Ако је n непаран непаран број, онда је $3^{3n}+2^{3n}=27^n+8^n$, па је $27+8=35 \mid 27^n+8^n$.

Ако је $n=2k$, за неко природно k, онда важи:
$3^{3n}-2^{3n}=3^{6n}-2^{6n}=729^k-64^k=$
$=(729-64)(729^{k-1}+729^{k-2}\cdot 64+...+729\cdot 64^{k-2}+64)$.
па тврђење следи, јер је $729-64=19\cdot 35$.

47.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 583. Збир цифара броја x једнак је y, а збир цифара броја y једнак је z. Одредити број x ако је $x+y+z=60$.

Задатак 584. Ако за природне бројеве a, b, c, d важи $(a+b)^2+a=(c+d)^2+c$, доказати да је $a=c$ и $b=d$.

Задатак 585. Доказати да је број $2222^{5555}+5555^{2222}$ дељив са 7.

Задатак 586. Одредимо целе бројеве α и β такве да је
$\alpha\cdot 972+\beta\cdot 600=(972,600)$.

Задатак 587. Одредити све целе бројеве a за које су изрази $96+a$ и $5+a$ кубови целих бројева.

Литература

[1] Радивоје Ђурковић, *Математика* 9+, Завод за уџбенике и наставна средства Источно Сарајево, 2005.

[2] Марија Станић, Небојша Икодиновић, *Теорија бројева*, Завод за уџбенике и наставна средства Београд, 2004.

[3] *srb.imomath.com*

Предавање 48

Дељивост и конгруенције 2

Милован Мајсторовић, Математичка гимназија

48.1 Задаци за рад

Задатак 588. Колики је остатак при дељењу броја $5^{70} + 7^{50}$ са 12.

Решење: Важи:
$5^2 = 25 \equiv 1$ (мод 12) $\Rightarrow 5^{70} \equiv 1$ (мод 12);
$7^2 = 49 \equiv 1$ (мод 12) $\Rightarrow 7^{50} \equiv 1$ (мод 12).
Према томе $5^{70} + 7^{50} \equiv 2$(мод 12).

Задатак 589. Нека је $S(n)$ збир цифара целог броја n. Ако је $S(n) = S(2n)$, доказати да је н дељиво са 9.

Решење: Како је $S(n) \equiv n$ (мод 9), $S(2n) \equiv 2n$ (мод 9) и $S(2n) \equiv S(n)$ (мод 9) то је $2n \equiv n$ (мод 9), па $9 \mid n$.

Задатак 590. Доказати да ако је n сложен број, онда је то и $2^n - 1$.

Решење: Ако је n сложен број онда постоје природни бројеви p и q, p, $q > 2$ такви да је $n = pq$, па је $2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1)(2^{p(q-1)} + 2^{p(q-2)} + ... + 2^p + 1)$. Сада је очигледно да је $2^n - 1$ сложен број.

Задатак 591. Нека је $p = p_1 p_2 ... p_n$ производ првих n простих бројева. Доказати да за $n > 1$ $p + 1$ и $p - 1$ нису потпуни квадрати.

Решење: Како је $p_1 = 2$ и $p_2 = 3$, то је $p - 1 = 6P - 1$ за неки природан број P. Није тешко видети да конгруенција $x^2 \equiv -1$ (мод 6) нема решење(у скупу целих бројева), па број $p-1$ не може бити потпун квадрат. Слично је и $p_i \equiv_4 \pm 1$ за $i \geq 2$, па је $p \equiv_4 2 \pm 1 \equiv_4 2$. Онда је

$p+1 \equiv_4 3$, а није тешко видети и да конгруенција $x^2 \equiv_4 3$ нема решења у скупу целих бројева. Значи ни $p+1$ не може бити потпун квадрат.

Задатак 592. Ако су a, b и c природни бројеви такви да је $28a+30b+31c=365$, доказати да је $a+b+c=12$.

Решење: Нека је $k=a+b+c$. Онда је $28k+2b+3c=365$, а како је $2b+3c \geq 5$ то је $k \leq \frac{360}{28}$ из чега следи $k \leq 12$, јер је k природан број. Слично је и $31k-b-3a=365$, па је $k \geq \frac{369}{31}$ односно $k \geq 12$, јер је k природан број. Значи $k=12$.

Задатак 593. Нека је $S(x)$ збир цифара природног броја x. Наћи све природне x за које је $x+S(x)+S(S(x))+S(S(S(x)))=2007$.

Решење: Како број 1999 има највећи збир цифара од природних бројева из интервала $(1,2007)$ то је $S(x) \leq 28$. Слично је $S(S(x)) \leq 10$ и $S(S(S(x))) \leq 9$. Онда је $x \geq 1959$. Имамо и то да је $x \equiv_9 S(x) \equiv_9 S(S(x)) \equiv_9 S(S(S(x)))$, па је $4x \equiv_9 2007 \equiv_9 0$. Следи да $9 \mid x$, па $x \in \{1962, 1971, 1980, 1989, 1998\}$. Проверавањем видимо да нема бројева који испуњавају услове задатка.

Задатак 594. Нека је n природан број. Доказати да је број $(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)$ дељив са 2^n, а није дељив са 2^n+1.

Решење: Имамо да је $(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n) = \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2n}{n!} = \frac{2^n\cdot n!\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!} = 2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$, па је овај број дељив са 2^n, а није дељив са 2^{n+1}.

Задатак 595. Нека су m и n природни бројеви за које је $mn+1$ дељиво са 24. Доказати да је тада и $m+n$ дељиво са 24.

Решење: Доказаћемо да $8 \mid m+n$ и $3 \mid m+n$. Како $24 \mid mn+1$, то су оба m и n непарна. Имамо да $8 \mid m^2+mn+1-m^2$, а како квадрат непарног броја даје остатак 1 при дељењу са 8. Значи $8 \mid m(m+n)$, а како је m непаран број то $8 \mid m+n$. Слично ни m ни n нису дељиви са 3, а како $3 \mid m^2+mn+1-m^2$ ($m \equiv_3 \pm 1$, па је $m^2 \equiv_3 1$)то $3 \mid m(m+n)$. Сада пошто је $(m,3)=1$ то $3 \mid m+n$. Значи $24 \mid m+n$.

Задатак 596. Да ли постоји цели бројеви a, b, c и d такви да важи:
$abcd-a=1357$
$abcd-b=3571$
$abcd-c=5713$
$abcd-d=7135$.

Решење: Претпоставимо да постоји такви цели бројеви a, b, c и d. Из прве једначине имамо да $a \mid 1357$, па је a непаран број. Слично су и бројеви b, c и d непарни, па је и број $abcd$ непаран. Онда је број $1357 = abcd - a$ паран јер је разлика два непарна броја. Добили смо котрадикцију, па не постоје тражени бројеви a, b, c и d.

Задатак 597. Ако су a и b различити природни бројеви, већи од 1, такви да је $b^2 + a - 1$ дели $a^2 + b - 1$, доказати да број $b^2 + a - 1$ има бар два различита проста фактора.

Решење: Имамо да је $a \geq b$ и $b^2+a-1 \mid (b^2+a-1)(b^2-1-a)$. Из последњег добијамо да $b^2+a-1 \mid (b^2-1)^2-a^2$. Користећи да и $b^2+a-1 \mid a^2+b-1$ добијамо да $b^2 + a - 1 \mid (b^2 - 1)^2 + b - 1 = b(b - 1)(b^2 + b - 1)$. Сваки од ових чинилаца узајамно прост са остала два и мањи од $b^2 + a - 1$, па $b^2 + a - 1$ мора да има бар два различита проста фактора.

48.2 Задаци за домаћи рад

Задатак 598. *Доказати да за сваки природан број* n, $584 \mid 8^n+8^{n+1}+8^{n+2}$.

Задатак 599. Наћи решења једначине $\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}} = b$ у скупу целих бројева.

Задатак 600. Ако за природне бројеве a, b, c и d важи $a^2 + b^2 + 3ab = c^2 + d^2 + 3cd$ доказати да је $a + b + c + d$ сложен број.

Задатак 601. Природан број n је савршен ако је збир свих његових природних делилаца једнак $2n$. Наћи све савршене бројеве n за које су $n - 1$ и $n + 1$ прости бројеви.

Задатак 602. Доказати да су бројеви $2^{2^n}+1$ и $2^{2^{n+1}}+1$ узајамно прости за сваки природан број n.

Литература

[1] Радивоје Ђурковић, *Математика* 9+, Завод за уџбенике и наставна средства Источно Сарајево, 2005.

[2] Душан Милијанчевић, *Разни задаци из елементарне математике, електронско издање*, Шабац, 2010.

Предавање 49

Логичко комбинаторни задаци (инваријанте, бојења)

Лазар Арсић, Математичка гимназија

49.1 Теоријски увод

Прва тактика код решавања оваквих задатака је *потрага за инваријантама,* и називамо је **Принцип инваријанти.** Принцип примењујемо онда када када вршимо неке кораке, трансформације или сличне промене по неком правилу, и тада прво радимо на проналажењу онога што се не мења(инваријанте). Простије речено:
Када постоји неко понављање, тражи оно што се НЕ МЕЊА!
Ово је изузетно корисно у доказивању да се нешто **не може** постићи. У доказивању да је нешто могуће нема сигурну примену, јер се њоме може доказати да нешто сигурно не може или да само **можда** може. Овакве задатке радимо тако што пронађемо инваријанту(непромењивост) и затим докажемо преко тога да се нешто не може десити. Елем, примену принципа инваријанти много је лакше шватити кроз задатке који се налазе даље у предавању.

Проблеми са **бојењем** су слични инваријантама. Принцип се врши тако што се нешто подели на коначан број подделова и онда се ти подделови обоје истим бојама, означе се, и онда те ознаке користимо у доказима. Британском физичару Фишеру требало је много времена да докаже да се шаховска табла 8×8 може прекрити доминама на $2^4 \times 901^2 = 12,988,816$ начина. Поставимо питање: а на колико нацхина се то може учинити ако се шаховској табли одломе два дијагонално супротна поља? Делује још теже, међутим, сетимо се табле и закључићемо да су таква два поља исте боје. Једна домина увек прекрива тачно 1 црно и 1 бело поље, а ми би имали 30 једних и 32 других. Сада је одговор лак: на 0 начина! Овим смо наизглед тежак проблем решили лако.

49.2 Задаци за рад

Задатак 603. Дата је трансформација уређене тројке (a, b, c): $(a, b, c) \mapsto (2a - b, 2b - c, 2c - a)$. Може ли се из тројке (1, 7, 9) трансформацијама добити:
а) тројка (3, 7, 11)
б) тројка (3, 6, 8)?

Решење: Као инваријанту уочимо да је $(2a - b) + (2b - c) + (2c - a) = a + b + c$ одакле добијамо да се збир бројева тројки не мења трансформацијама. Под а) је немогуће јер $3 + 7 + 11 \neq 1 + 7 + 9$ међутим $3 + 6 + 8 = 1 + 7 + 9$. Сада приметимо да ако су a, b, c непарни онда су и $(2a - b, 2b - c, 2c - a)$ непарни. У тројци под б) бројеви 6 и 8 су парни па се не може ни она добити трансформацијама.

Задатак 604. На острву живи $9m^2$ плавих камелеона, $(3n - 1)^2$ црвених камелеона и $3k - 1$ зелених, где су m, n, k природни бројеви. Сви камелеони непрекидно лутају острвом и кад год се сретну 2 камелеона различитих боја они прелазе у ону трећу боју. Могу ли на овакав начин да остану само зелени камелеони на острву?

Решење: Прво што ћемо уочити је да је $9m^2 \equiv 0$, $(3n - 1)^2 \equiv 1$, $3k - 1 \equiv -1 \ (mod\ 3)$. Дакле на почетку број камелеона по бојама представља потпун систем остатака по модулу 3. Сада погледајмо шта се дешава трансформацијом: Означимо ове три боје са x, y, z и број камелеона по бојама a, b, c респективно. На почетку су бројеви a, b, c потпун систем остатака по модулу 3. Ако се камелеон боје x сретне са камелеоном боје y они прелазе у боју z. Сада је број камелеона по бојама $a - 1, b - 1, c + 2$, а то је опет потпун систем остатака по модулу 3 $((c + 2 \equiv c - 1) \ (mod\ 3))$. Значи ова тројка бројева остаје потпун систем независно од броја трансформација Сада, ако су сви камелеони зелени онда је плавих и црвених 0 па ова тројка више није потпун систем што је немогуће постићи.

Задатак 605. Мали Ђокица је на плочи написао бројеве $1, 2, 3, 4, ..., 2n$ где је n непаран број. Затим је мали Ђокица кренуо да бира по два броја са плоче, зовимо их a и b . Он би те бројеве избрисао, али би на плочу сваки пут дописивао број вредности $|a - b|$. То је радио док му није преостао један једини број на табли. Доказати да је број који му је на крају остао неизбрисан непаран.

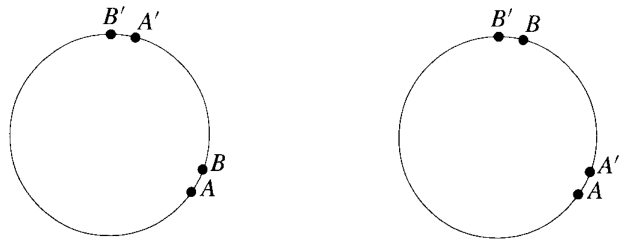
Решење: У овом слуцају посматрајмо суму бројева на табли и њену парност. Сума бројева на почетку је $\frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$ а како је n непаран и ова сума је непарна. Када бришемо бројеве сума се смањује за $a + b - |a - b|$, и нека је a већи у овом случају, сума се смањује за $a + b - a + b = 2b$ а то је паран број тако да свака нова сума остаје непарна. Одатле закључујемо да ће и тај један број који остане бити непаран.

Задатак 606. У сваком пољу шаховске табле 8×8 уписан је цео број. У једном кораку бирамо квадрат 4×4 или 3×3 и сваком броју у изабраном квадрату додајемо 1. Да ли је УВЕК могуће овим поступком изменити бројеве записане на табли тако да су сви бројеви:
а) парни
б) дељиви са 3?

Решење: Довољно је пронаћи случај у коме је ово немогуће. Пронађимо инваријанту за пример а). Обојимо трећи ред одозго и трећи ред одоздо црвеном бојом. Са S означимо суму свих 'нецрвених' поља. Сада који год квадрат 3×3 узели он има тачно три црвена поља и сума S ће се повећати за 6 па њена парност остаје иста. Слично сваки квадрат 4×4 који изаберемо има или 4 или 8 црвених поља па се S повећава за 12 или 8 па њена парност опет остаје иста. Одавде добијамо да ако је сума S била непарна на почетку а њена парност остаје иста онда ће остати бар један непаран број у 'нецрвеном' делу што је довољно.
Сада за пример б) урадимо слично али тако да се делу који остане не мења остатак при дељењу са 3. Зато ћемо обојити четврти и осми ред плавом бојом и опет означити суму 'неплавих' бројева са S. Сваки квадрат 3×3 има 0 или 3 плавих поља па њима можемо увећати суму за 6 или 9, а код 4×4 увек је 4 плавих поља па се сума повећава за $12 \Rightarrow$ остатак при дељењу суме S са 3 остаје исти. Можемо закључити да ако у почетку $S \equiv 1 \vee S \equiv 2 (mod\ 3)$ онда ће увек постојати бар један број у 'неплавом' делу који није дељив са 3.

Задатак 607. На конгрес је позвано $2n$ амбасадора. Сваки амбасадор има највише $n - 1$ политичких противника. Доказати да се сви амбасадори могу распоредити око округлог стола тако да нико не седи до свог политичког противника.

Решење: Прво, распоредимо амбасадоре прозивољно и нека је H укупан број непријатељских парова у том распореду. Сада тражимо противничке парове за столом и покушајмо да их прераспоредимо уз што мање гужве. Нека је (A, B) неки противнички пар и нек B седи са леве стране A. Размештање можемо извршити тако што нађемо пар (C, D) где је D са леве стране C и заменимо места B и C. Пар (C, D) бирамо тако да је C пријатељ са A, а D пријатељ са B. Крећући се супротно од казаљке на сату наићићемо на бар n пријатеља A, а како B има највише $n-1$ противника, неки од амбасадора који седе са леве стране неког пријатеља A је пријатељ са B. Оваквим размештањима смањујемо број непријатељских парова H док га не доведемо до нуле.



Задатак 608. Сваки од бројева $a_1, a_2, ..., a_n$ је 1 или -1, и знамо да важи:

$$S = a_1a_2a_3a_4 + a_2a_3a_4a_5 + ... + a_na_1a_2a_3 = 0.$$

Доказати да $4|n$.

Решење: Овде ћемо сами смислити трансформацију и уочити инваријанту. За трансформацију узмимо промену $a_i = -a_i$. Сваки број a_i садржи се у 4 сабирка. Кад му променимо знак S се мења на следећи начин: Ако су сва 4 сабирка била1 или -1 онда се збир мења за ± 8, ако су два 1, а два -1 онда се S не мења, ако су тачно три 1 или -1 онда се S мења за ± 4. Одавде закључујемо да остатак при дељењу S са 4 остаје исти, а како је на почетку $S = 0$ добијамо да је увек $S \equiv 0 (mod\ 4)$. Ако бисмо све негативне променили у позитивне добили би $S = n$, а уз $4|S$ то $4|n$.

Задатак 609. Бројеви од $1, 2, ..., 2n$ су поређани произвољним редоследом. Сада сваком броју додајмо број вредности места на којем се налази, то јест првом придружимо 1, другом 2,... итд. Доказати да међу овим новим бројевима постоје 2 који дају исти остатак по модулу $2n$.

Решење: Претпоставимо супротно, нека не постоје таква два. Онда сваки од њих даје један од остатака $0, 1, 2, ..., 2n-1$. Па би збир овакве групе бројева давао остатак:

$$(0 + 1 + 2 + ... + 2n - 1) \equiv_{2n} n$$

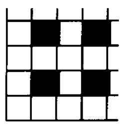
Међутим

$$2(1 + 2 + ... + 2n) = 2n(2n + 1) \equiv_{2n} 0$$

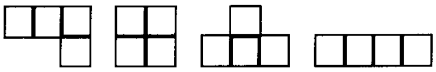
што је контрадикција.

Задатак 610. Под је прекривен плочама 4×1 и 2×2. Једна плоча је сломљена, а од резервних имамо само једну другачијег облика. Доказати да се под више не може у потпуности прекрити преуређивањем распореда плочица.

Решење: Решимо слично као задатак са доминама. Обојимо поља у црно, али тако да бојимо само у свакој другој колони и да бојимо свако друго. Сада плочица 2×2 прекрива увек само 1 црно, а 4×1 прекрива или 2 или 1. Одавде следи да је немогуће.



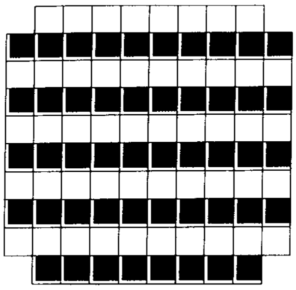
Задатак 611. Да ли је могуће направити правоугаоник од пет разлицхитих тетромина?



Решење: Једноставно обојимо поља као на шаховској табли. Овај правоугаоник би због површине морао бити површине 20, па ће бити 10 црних поља. Свака тетромина покрива увек тачно 2 црна, осим T-тетромине која прекрива или 1 или 3. Одавде следи да не може.

Задатак 612. Имамо таблу $n \times n$ са одломљеним угловима. Доказати да се може прекрити L-тетроминама и наћи довољан услов.

Решење: Сада имамо $n^2 - 4$ поља, па мора $4|n$ тј. n је паран. Али ово није довољно. Обојимо таблу на следећи начин: сваки други ред обојимо у црно. L-тетромина покрива или 3 белих и 1 црно или 3 црних и 1 бело поље. Како је једнак број црних и белих поља и дељив је са 4 онда свако потпуно прекривање корисити једнак број обе врсте тетромина, односно паран број тетромина улази у прекривање, па $8|n^2 - 4$ што значи да је n облика $4k + 2$. Пробним конструкцијама можемо утврдити да је услов $n = 4k + 2$ довољан услов.



49.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 613. На великом окупљању математичара у Шапцу догодила су се многа руковања. Младог математичара називамо непарним ако је обавио непаран број руковања, а парним ако се руковао паран број пута. Доказати да је у било ком тренутку био паран број непарних математичара.

Задатак 614. Дато је 35 целих бројева. У једном кораку бирамо 23 бројева из скупа и додајемо им сваком по 1. Доказати да се може постићи да сви 35 броја буду једнаки.

Задатак 615. На табли су написани бројеви a, b, c. У једном кораку бришемо један број, а уместо њега дописујемо збир друга два умањен за 1. Може ли се добити тројка $(17, 1967, 1983)$ од тројки:
а) $(2, 2, 2)$
б) $(3, 3, 3)$

Задатак 616. Све тачке у равни су обојене црном, белом или црвеном бојом. Доказати да постоје две истобојне тачке на растојању тачно 1.

Задатак 617. Доказати да се табла 10×10 не може покрити тетромином 4×1.

Литература

[1] А. Енгел, *Problem Solving Strategies*, Спрингер 1997.

Предавање 50

Полиноми

Милош Милосављевић, Математичка гимназија

50.1 Теорјски увод

Дефиниција 87. Израз $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ је полином степена n, $stP(x) = n$. Ми ћемо се бавити полиномима чији су коефицијенти $a_i \in R$,$a_i \in Q$, $a_i \in Z$, где је $i \in 0, 1, ..., n$.

Дефиниција 88. За полиноме $P(x)$ и $G(x)$ постоје јединствени полиноми $Q(x)$ и $R(x)$ тако да важи $P(x)\imath G(x)Q(x) + R(x)$ и $stR(x) < stG(x)$ или $R(x) = 0$. $Q(x)$ је количник, а $R(x)$ је остатак при дељењу $P(x)$ са $Q(x)$. Када је $R(x) = 0$ кажемо да $G(x)$ дели $P(x)$ и пишемо $G(x)|P(x)$.

Теорема 114. Ако је $P(x)$ реалан полином онда је збир његових коефицијената $P(1)$.

Теорема 115. Ако је $P(x)$ реалан полином разлика коефицијената уз парне и коефицијената уз непарне степене је $P(-1)$.

Теорема 116. Ако је $P(x)$ реалан полином слободан члан тог полинома је $P(0)$.

Теорема 117. Целобројне нуле полинома са целобројном коефицијентима делиоци су слободног члана тог полинома.

Теорема 118. Нека је $\frac{p}{q} \in Q$, $p \neq 0$ и $NZD(p, q) = 1$ рационална нула полинома $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. Тада $p|a_0$ и $q|a_n$.

Теорема 119. Ако је $P(x)$ реалан полином онда $x - a|P(x)$ $(a \in R)$ ако и само ако $P(a) = 0$. Слично важи и за $P(x) \in \mathbf{Q}[x]$ и $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$. Ова теорема је позната као Безуова теорема. Број a називамо нулом тог полинома.

Теорема 120. За полином $P(x) \in \mathbf{Z}[x]$ и различите целе бројеве a и b важи $a-b|P(a)-P(b)$.

Теорема 121. Ако полином x^2+px+q има нуле x_1 и x_2 имамо следећу једнакост $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)=x^2-(x_1+x_2)+x_1x_2$ Након што упоредимо коефицијенте испред једнаких степена на левој и десној страни имамо $p=-(x_1+x_2)$ и $q=x_1x_2$. Ако су x_1, x_2, x_3 нуле полинома x^3+px^2+qx+r на исти начин добијемо $p=-(x_1+x_2+x_3), q=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3, r=x_1x_2x_3$. Сличне формуле важе за полиноме виших степена. Дате формуле су познатије као Виетове формуле.

50.2 Задаци за рад

Задатак 618. Наћи све полиноме са целобројним коефицијентима који задовољавају $P(5)=13, P(2)=5$.

Решење: Како имамо $a-b|P(a)-P(b)$, овде мора да важи $5-2|P(5)-P(2)$, односно $3|8$. Такав полином не постоји.

Задатак 619. Нека је $P(x)=(x^2-x+1)^{2010}$. Одредити збир коефицијената на парним местима полинома $P(x)$.

Решење: Нека је збир коефицијената на парним местима p,а на непарним l.
Тада је $p+l=P(1)=(1-1+1)^{2010}=1$, а $p-l=P(1)=(1+1+1)^{2010}=3^{2010}$. Одавде је $2p=3^{2010}+1$, па је $p=\frac{3^{2010+1}}{2}$.

Задатак 620. Ако је $x^3+y^3+z^3=3xyz$, доказати $x+y+z=0$ или $x=y=z$.

Решење: Дату једнакост моземо записати у следећем облику $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$, (Изможите десну страну, и добије се након скраћивања). Из услова задатка имамо да је $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$, па је и $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)=0$. Онда је $x+y+z=0$, или $(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)=0$. Помножимо последњу једнакост са два и напишимо је у следећем облику $x^2+y^2-2xy+x^2+z^2-2xz+y^2+z^2-2yz=0$. Имамо три квадрата бинома $(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0$. Како је квадрат увек већи или једнак 0, тада сва три квадрата морају бити једнаки 0, односно $x-y=0$ и $x-z=0$ и $y-z=0$, дакле $x=y=z$.

Задатак 621. Наћи x тако да је вредност $P(x,y)$ минимална, $P(x,y)=2x^2+5y^2-4x-2y-4xy+7$

Решење: Овде ћемо увежбати вештину намештања на квадрат бинома. Обратимо пажњу на то да имамо $2x^2$,$-4xy$ и $5y^2$. $-4xy=-2*2*x*y$. Како имамо $5y^2$, и $2x^2$, логичније је да је $-4xy=-2*2y*x$ (увек се оријентишемо према средњем члану). Направимо ли квадрат бинома од x и $2y$ имамо $P(x,y) = (x-2y)^2 + x^2 - 4x + y^2 - 2y + 7$. Даље је $P(x,y) = (x-2y)^2 + (x-2)^2 + (y-1)^2 + 2$. Како је квадрат увек ненегативан, то је најмања вредност датог полинома када је $x = 2y, x = 2, y = 1$ и тада је $P(x,y) = 2$.

Задатак 622. Раставити $x^8 + 98x^4 + 1$ на два чиниоца са целобројним коефицијентима.

Решење: Опет ћемо намештати квадрате бинома.
$x^8 + 2x^4 + 1 + 96x^4 = (x^4+1)^2 + 96x^4$,
Желимо опет да наместимо на квадрат бинома, али тако да један чиниоц буде $x^4 + 1$.
$(x^4+1)^2 + 96x^4 =$
$(x^4+1)^2 + 2*8*x^2*(x^4+1) + (8x^2)^2 - 2*8*x^2*(x^4+1) + 32x^4 =$
$(x^4+1+8x^2)^2 + 32x^4 - 16x^2(x^4+1) =$
$(x^4+1+8x^2)^2 - 16x^2(x^4-2x^2+1) =$
$(x^4+1+8x^2)^2 - 16x^2(x^2-1)^2 =$
$(x^4+1+8x^2)^2 - (4x^3-x)^2$.

Ово је разлика квадрата, тако да имамо

$$x^8 + 98x^4 + 1 = (x^4 - 4x^3 + 8x^2 + x + 1)(x^4 + 4x^3 + 8x^2 - x + 1).$$

Овим је задатак завршен.

Задатак 623. Нека је $a, b, c \in R,\ a+b+c > 0, bc+ca+ab > 0, abc > 0$. Тада је $a > 0, b > 0, c > 0$..

Решење: Нека је $a+b+c = u, bc+ca+ab = v, abc = w$.
Из Вијетових правила имамо да су a, b, c нуле полинома
$P(x) = x^3 - ux^2 + vx - w$.
Ако је $x < 0, P(x) < 0$, јер $x^3 < 0, -ux^2 < 0, +vx < 0, -w < 0$. Чак и кад је $x = 0, P(x) = -w < 0$.
Дакле $x > 0$, а како су a, b, c нуле полинома $P(x)$, мора бити $a > 0, b > 0, c > 0$.

Задатак 624. Доказати да су све нуле полинома x^5+x-10 ирационалне.

Решење: Нека је $\frac{p}{q} \in Q, \frac{p}{q} \neq 0$ и $NZD(p,q) = 1$ рационална нула полинома $x^5 + x - 10$. Из $(\frac{p}{q})^5 + \frac{p}{q} - 10 = 0$ множењем са q^5 добијемо $p^5 + pq^4 = 10q^5$. Одавде $q|p^5$, па пошто је $NZD(p,q) = 1$, следи $q = 1$. Слично добијемо $p|10q^5$, одакле $p|10$. Очигледно $p > 0$. Провером за $p = 1, 2, 5, 10$ видимо да дати полином нема рационалне нуле.

Задатак 625. Наћи све целобројне вредности x за које је $P(x) = x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 20x + 10$ потпун квадрат.

Решење: Имамо $P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 + 8x^2 - 16x + 8 + 1 = (x-1)^4 + 8(x-1)^2 + 16 - 15$.
$P(x) = ((x-1)^2 + 4)^2 - 15$. Такође $P(x) = k^2, k \in N$. Обележимо $(x-1)^2 + 4 = m$, дакле $m \geq 4$. Тада је $m^2 - k^2 = 15, (m-k)(m+k) = 15$. Како је $m \geq 4$ можемо да занемаримо негативне факторе, па имамо две могућности:
1)$m - k = 1, m + k = 15$. Одавде је $m = 8$, па добијемо два решења $x = 3, x = -1$
2)$m - k = 3, m + k = 5$. Добијемо $m = 4$, и одавде имамо још једно решење $x = 1$.

Задатак 626. Нека су a, b, c три цела броја. Наћи све полиноме са целобројним коефицијентима за које важи: $P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$.

Решење: Из Безуове теореме имамо:
$P(x) - b = (x-a)P_1(x)$ (1)
$P(x) - c = (x-b)P_1(x)$
$P(x) - a = (x-c)P_1(x)$
Од бројева a, b, c изаберимо пар са највећ0м апсолутном разликом.
Нека је то $|a-c|$. Тада имамо:
$|a-b| < |a-c|$ (2)
Заменимо x са c у (1), следи:
$a - b = (c-a)P_1(c)$
Како је $P_1(c)$ цео број имамо $|a-b| \geq |c-a|$,
а то је контрадикција са (2). Дакле такав полином не постоји.

Задатак 627. Наћи све полиноме $P(x)$ који за свако x задовољавају $xP(x-1) = (x-3)P(x)$

Решење: За $x = 0$ имамо $P(0) = 0$.
За $x = 1$ је $P(1) = 0$.
За $x = 2$ је $P(2) = 0$.
Дакле $P(x) = x(x-1)(x-2)Q(x)$. Заменимо ово у почетну једнакост.
$x(x-1)(x-2)(x-3)Q(x-1) = (x-3)x(x-1)(x-2)Q(x)$.
Одавде је $Q(x) = Q(x-1)$, па $Q(x)$ мора бити нека константа.
Заиста, претпоставимо супротно, нека је
$Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, n \geq 1, a_n \neq 0$.
Тада је
$a_n(x-1)^n + a_{n-1}(x-1)^{n-1} + ... + a_1(x-1) + a_0 = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$
Одавде изједначавањем коефицијената испред x^{n-1} мора бити
$ka_n + a_{n-1} = a_{n-1}$, $(k = const)$
Ово је контрадикција. Дакле $P(x) = cx(x-1)(x-2), c = const$.
Тиме је задатак завршен.

50.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 628. Одредити збир коефицијената на непарним местима полинома $P(x) = (x^2 + x + 1)^{201} + (x^2 - x + 1)^{210}$.

Задатак 629. Нека је $P(x)$ полином са целобројним коефицијентима такав да је $P(a) = P(b) = P(c) = -1$ за три различита цела броја a, b и c. Доказати да $P(x)$ нема целобројних нула.

Задатак 630. Доказати Теорему 7. Ако је полином $P(x, y)$ симетричан и $x - y | P(x, y)$, тада и $(x - y)^2 | P(x, y)$.
(Полином је симетричан ако је $P(x, y) = P(y, x)$).

Задатак 631. Наћи све полиноме за које важи$P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x)$.

Задатак 632. Наћи све полиноме за које важи $P(x)P(-x) = P(x^2)$.

Литература

[1] А. Енгел, *Problem Solving Strategies*, Спрингер 1997.

[2] В. Стојановић, *Математископ 3*, Научна Књига 1988.

[3] Р. Тошић,Н. Икодиновић,М.Станић,С.Димитријевић, *Тангента 10*, Материјали за младе математичаре - свеска 45, Друштво Математичара Србије 2006.

Предавање 51

Пребројавања

Милош Милосављевић, Математичка гимназија

51.1 Теоријски увод

Дефиниција 89. Број елемената коначног скупа А називамо кардинални број скупа А и обележавамо га са $|A|$.

Дефиниција 90. Ако је скуп X унија дисјунктних скупова $S_1, S_2, ..., S_n$, тада је $|X| = |S_1| + |S_2| + ... + |S_n|$.

Дефиниција 91. Ако су $S_1, S_2, ..., S_n$ непразни скупови,
тада је $|S_1 \times S_2 \times ... \times S_n| = |S_1| \cdot |S_2| \cdot ... \cdot |S_n|$.

Дефиниција 92. $n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

51.2 Задаци за рад

Задатак 633. а) Колико има петоцифрених бројева који не садрже нулу?
б) Колико има петоцифрених бројева чије су све цифре различите?

Решење:
а) ooooo
Имамо 5 места на које можемо распоредити 9 цифара, (1,2,3,4,5,6,7,8,9). За прво место имамо 9 могућности, исто важи и за друго, треће, четврто и пето. Дакле имамо $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^5 = 59049$ таквих бројева.
б) ooooo
Слично као малопре, за прво место имамо у оптицају 9 цифара (све осим нуле, број не може почињати нулом) , за друго нам је у оптицају 0, али морамо да избацимо цифу коју смо искористили за прво место, дакле 9 опција, за треће имамо 8 опција (избацимо две искориштене

цифре), четврто 7 опција, пето 6. Дакле има $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27216$ таквих бројева.

Задатак 634. На колико начина n особа може да стане у врсту тако да 2 уочене особе не стоје једна поред друге?

Решење:
Нека су уочене особе a, и b. Имамо две могућности за њихов распоред, ab и ba. Посматрајмо њих као једну целину. Укупан број распореда кад су ове две особе једна поред друге је $2(n-1)!$(погледај задатак 1 под б)) . Укупан број распореда свих особа је $n!$. Дакле имамо $n! - 2(n-1)!$ начина .

Задатак 635. На колико начина можемо поставити 8 топова на шаховску таблу, тако да се никоја два не нападају?

Решење: Нумеришимо топове бројевима 1 до 8. Поље за првог топа мозeмо изабрати на $8 \cdot 8$ начина. Пошто се топови не смеју нападати прецртајмо колону и врсту у којој се налази тај топ. Овиме добијемо $7 \cdot 7$ плочу. Поновимо овај поступак за све топове и имамо $(8!)^2$ распореда. Међутим пошто су топови нумерисани, више пута смо бројали неке распореде. Нама је свеједно да ли је, на пример, на пољу $a3$ топ 1 или 6. На неком пољу може бити било који од топова 1-8. За следеће заузето поље имамо 7 могућности, један топ смо искористили. Дакле распореда ових топова има 8!. То је уједно број оних распореда које смо више пута бројали. Број распореда топова је $\frac{(8!)^2}{8!} = 8!$.

Задатак 636. На колико начина можемо одабрати шест особа од њих осам, али ако узмемо А, морамо узети и Б?

Решење: Ако одаберемо особу А, морамо одабрати и особу Б, па онда од осталих 6 бирамо 4 особе. То можемо учинити на $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$(погледај претходни задатак). Ако не одаберемо особу А, онда од преосталих 7 особа бирамо 6, што је исто као да бирамо једну која је преостала. Имамо 7 начина ода одаберемо ту једну особу. Значи укупно имамо 22 начина.

Задатак 637. На колико начина можемо одабрати 3 броја од 1 до 40 тако да је њихов збир паран?

Решење: Или су сва три броја парна, или су два непарна, један паран. Ако су сва три броја парна имамо $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1140$ начина.
Ако су два непарна, а један паран, укупан број начина је $20 \cdot \frac{20 \cdot 19}{2} = 3800$.
Дакле имамо 4940 начина.

Задатак 638. На колико начина се 10 новчаница може распоредити у 2 новчаника?

Решење: Свака новчаница може бити у једном или у другом новчанику. Имамо 2 избора за сваку. Укупан број избора је $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10} = 1024$.

Задатак 639. На фудбалском турниру учествује 18 екипа. Доказати да се после осмог кола могу наћи три екипе међу којима не постоје две које су међусобно одиграле утакмицу.

Решење: Уочимо једну екипу. Она није играла против 9 других екипа. Ако се међу тих 9 екипа могу наћи две које нису играле међусобно задатак је решен. Претпоставимо супротно. Тада је тих 9 екипа одиграло све међусобне сусрете. За то им је било потребно $\frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ сусрета. Током једног кола 9 екипа може одиграти максимално 4 утакмице. То значии да су за 8 кола могли одиграти максимално 32 утакмице. Контрадикција. Дакле можемо наћи три екипе.

Задатак 640. На свакој страници квадрата дате су 3 тачке које нису темена тог правоугаоника, Колико је троуглова одређено датим овим тачкама?

Решење: Имамо две опције, да два темена троугла припадају једној страници квадрата или да сва три темена припадају различитим страницама. У првом случају на 4 начина бирамо страницу, на 3 нацхина бирамо две од три тачке, а на 9 преостало теме. Укупно имамо $4 \cdot 3 \cdot 9 = 108$ начина. У другом случају на 4 начина бирамо страницу, а свако теме троугла на 3, сто би рекло $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$ начина. Укупно имамо $108 + 108 = 216$ троуглова одређено овим тачкама.

Задатак 641. На турниру је учествовало n шахиста међу којима је било мајстора и велемајстора.Свака победа доноси по поен. После заврсетка турнира показало се да је сваки учесник половину својих поена освојио играјуци против мајстора. Докажи да је n потпун квадрат.

Решење: Узмимо да је број мајстора и велемајстора m, односно v. Мајстори су међусобно одиграли $\frac{m(m-1)}{2}$ партија, и освојили укупно толико поена у међусобним сусретима. Исто толико су скупили и играјући против велемајстора. Слично су велемајстори међусобно одиграли $\frac{v(v-1)}{2}$ и освојили укупно толико поена. Како је број одиграних партија mv имамо:
$\frac{m(m-1)}{2} + \frac{v(v-1)}{2} = mv$
Након што упростимо овај израз имамо: $m + v = (m - v)^2$. Како је $m + v = n$, задатак је доказан.

Задатак 642. У скупштини има 30 посланика. Сваки од посланика је у свађи са тачно 10 других посланика. На колико начина може бити формирана трочлана комисија, тако да су свака два члана те комисије у међусобној свађи или да никоја два члана те комисије нису у међусобној свађи?

Решење: Нека је x број комисија које задовољавају услове задатка(добре комисије), а y број преосталих комисија (лоше комисије). Тада је $x + y = \frac{30\cdot 29\cdot 28}{3\cdot 2\cdot 1} = 4060$. Сада нека сваки посланик направи списак свих троцланих комисија којих је он члан, а друга два посланика су или оба у свађи с њим, или ниједан није у свађи с њим. На том спискоу ће се свака добра комисија јавити три пута(записаће је сваки посланик), а свака лоша само једном. На том списку има $\frac{19\cdot 18}{2} = 161$ комисија које имају једног фиксираног посланика и нема посланика која су у свађи, и има $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$ комисија које садрже једног фиксираног посланика и сви су у свађи. Како имамо 30 таквих спискова то је:
$3x + y = (161 + 45)\cdot 30 = 6480$. Сада је лако израчунати да је $x = 1210$.

51.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 643. Познато је да крокодил има 68 зуба. Колико је минимално крокодила потребно да бисмо били сигурни да постоје 2 са истим распоредом зуба?

Задатак 644. Свака страница квадрата подељена је на n једнаких делова. Колико троуглова можемо конструисати тако да им темена буду деоне тачке?

Задатак 645. Колико постоји петоцифрених бројева који се записују помоћу непарних цифара, али тако да се једна цифра сме јављати максимално два пута?

Задатак 646. На колико начина можемо сместити n топова на шаховску таблу $k \times l$ тако да се ниједна два не нападају међусобно?

Задатак 647. На полици се налази 20 књига. На колико начина је могуће изабрати 5 књига тако да никоје две књиге нису биле једна до друге на полици?

Литература

[1] Р. Тошић, *Мала Комбинаторика*, Просветни Преглед 1996 1997.

[2] В. Стојановић, *Математископ 3*, Научна Књига 1988.

[3] Р. Тошић,Н. Икодиновић,М.Станић,С.Димитријевић, *Тангента 10*, Материјали за младе математичаре - свеска 45, Друштво Математичара Србије 2006.

Предавање 52

Степени

Петар Радовановић, Математичка гимназија

52.1 Теоријски увод

Дефиниција 93. Нека је $a \in R$. Тада је $a^1 = a, a^{n+1} = a^n \cdot a$, за све $n \in N$.

Дефиниција 94. За $a \in R \backslash \{0\}, a^0 = 1$.

Дефиниција 95. За $a \in R \backslash \{0\}, n \in N, a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Теорема 122. Нека су a и b реални, а m и n природни бројеви. Тада је:
1)$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2)$a^m : a^n = a^{m-n}$;
3)$(a^m)^n = a^{mn}$;
4)$(a \cdot b)^m = a^m b^n$;
5)$(a : b)^m = a^m : b^m$.

52.2 Задаци за рад

Задатак 648. Шта је веће: $(-2)^{300}$ или $(-3)^{200}$?

Решење: Из $(-2)^{300} = 2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100} < 9^{100} = (3^2)^{100} = 3^{200} = (-3)^{200}$ следи да је $(-2)^{300} < (-3)^{200}$.

Задатак 649. Шта је веће: 2^{1991} или 1991^{181}?

Решење: Како је $2^{1991} = (2^{11})^{181} = 2048^{181} > 1991^{181}$, то је $2^{1991} > 1991^{181}$.

Задатак 650. Дат је израз $\frac{2^{17}+2^{16}+\cdots+2^2+2+1}{2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1} : 3^3$. Доказати да је вредност датог израза цео број.

Решење: Ако се $\frac{2^{17}+2^{16}+\cdots+2^2+2+1}{2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1} : 3^3$ прошири са $2-1$ добија се израз $\frac{(2-1)(2^{17}+2^{16}+\cdots+2^2+2+1)}{(2-1)(2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1)} : 3^3$, тј. $\frac{2^{18}-1}{2^9-1} : 3^3 = \frac{(2^9-1)(2^9+1)}{2^9-1} : 3^3 = (2^9+1) : 27 = 19$.

Задатак 651. За које реалне вредности a, b, c важи $\frac{a^{2002}+b^8+c^6+1}{2} = a^{1001} + b^4 - c^3 - 1$?

Решење: Дата једнакост се трансформише у $(a^{1001}-1)^2 + (b^4-1)^2 + (c^3+1)^2 = 0$, одакле се добијају решења $(a, b, c) = (1, 1, -1)$ и $(a, b, c) = (1, -1, -1)$.

Задатак 652. Нека је $a = 2^{2005} - 2^{2004} + 2^{2003}, b = 2^{2004} - 2^{2005} + 2^{2006}, c = 3\sqrt{3} \cdot 2^{2003}$. Доказати да је збир квадрата нека два од ових бројева једнак квадрату трећег.

Решење: Како је $a = 2^{2003}(2^2 - 2 + 1) = 3 \cdot 2^{2003}, b = 2^{2004}(1 - 2 + 2^2 = 6 \cdot 2^{2003}, c = 3\sqrt{3} \cdot 2^{2003}$, и узимајући у обзир да је $A = 2^{2003}$, добијамо да је $a^2 = 9A^2, b^2 = 36A^2, c^2 = 27A^2$. Следи да је $a^2 + c^2 = b^2$.

Задатак 653. Упоредити бројеве $3^{2007} - 2^{3000}$ и $2007 \cdot 2^{2007}$.

Решење: Пођимо од очигледне неједнакости $3^2 > 2^3$. Степеновањем добијамо да је $3^{2000} > 2^{3000}$. Следи да је $3^{2007} > 3^7 \cdot 2^{3000}$, па је $3^{2007} - 2^{3000} > (3^7 - 1) \cdot 2^{3000} > 2007 \cdot 2^{2007}$. Према томе, $3^{2007} - 2^{3000} > 2007 \cdot 2^{2007}$.

Задатак 654. Израчунај вредност израза $a^6 + 3a^2b^2 + b^6$ ако је $a^2 + b^2 = 1$.

Решење: Имамо да је $(a^2+b^2)^3 = a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = a^6 + 3a^2b^2 + b^6$ због $a^2 + b^2 = 1$. Зато је дати израз једнак $(a^2+b^2)^3 = 1^3 = 1$.

Задатак 655. Одреди све целе бројеве такве да је $x^4 + y^{2008} = 2x^2$.

Решење: Дату једнакост трансформишемо у $x^4 - 2x^2 + 1 + y^{2008} = 1$, односно $(x^2-1)^2 + (y^2)^{1004} = 1$. Одавде закључујемо да је $(x^2-1)^2 = 1$ и $(y^2)^{1004} = 0$ или $(x^2-1)^2 = 0$ и $(y^2)^{1004} = 1$. Дакле, једина целобројна решења су: $(x, y) \in \{(0,0), (1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)\}$.

Задатак 656. Ако је $\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x^2-\frac{1}{x^2}} = a$, израчунати $\frac{x^4+\frac{1}{x^4}}{x^4-\frac{1}{x^4}}$ помоћу a.

Решење: Сређивањем израза $\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x^2-\frac{1}{x^2}} = a$ добијамо $\frac{x^4+1}{x^4-1} = a$, тј. $x^4 + 1 = ax^4 - a$. Одатле је $x^4(a-1) = a+1$, па је $x^4 = \frac{a+1}{a-1}$. Коначно је $\frac{x^4+\frac{1}{x^4}}{x^4-\frac{1}{x^4}} = (\frac{a+1}{a-1} + \frac{a-1}{a+1}) : (\frac{a+1}{a-1} - \frac{a-1}{a+1}) = \frac{a^2+1}{2a}$.

Задатак 657. Шта је веће: 2^{3015} или 3^{2010}?

Решење: Имамо да је $2^3 < 3^2$, па је и $(2^3)^{1005} = 2^{3015} < 3^{2010} = (3^2)^{1005}$.

52.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 658. Упореди разломке $\frac{5^{2007}+1}{5^{2008}+1}$ и $\frac{5^{2008}+1}{5^{2009}+1}$.

Задатак 659. Ако је $a^2 + b^2 - 2a + 6b + 10 = 0$, колико је $a^{2010} - 2010b$?

Задатак 660. Који од израза A и B има већу вредност: $A = (8^2 \cdot 32^4) : 256^6$ или $B = (1024^5 : (6^{20} : 3^{20})^2) : 4^4$?

Задатак 661. Шта је веће: $5^4 + 2^{10}$ или 3^7?

Задатак 662. Ако је $a - b \geq 12$, где су a и b реални бројеви доказати да је онда $a^4 + b^4 > 2006$.

Литература

[1] Миодраг Петковић, Занимљиви математички проблеми, Научна књига 1985.

[2] Војислав Андрић, Математика $X = 1236$, Круг 2006.

[3] Владимир Стојановић, Математископ 1 - Водич за шампионе, Математископ 2004.

[4] Математички лист

[5] Задаци са такмичења

Предавање 53

Да ли је број рационалан или није?

Игор Мартиновић, Математичка гимназија

53.1 Теоријски увод

Дефиниција 96. Реалан број a називамо рационалним ако се може записати у облику $\frac{p}{q}$, где је p цео број, а q природан број.

Из дефиниције закључујемо да рационалан број можемо написати у облику $\frac{p}{q}$ тако да је $NZD(p,q) = 1$. Ово је веома важна особина рационалних бројева.

Дефиниција 97. У колико реалан број није рационалан за њега кажемо да је ирационалан.

Неки ирационални бројеви су π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$ ...

Теорема 123. Збир, разлика,производ и количник два рационална броја (када су оба различита од 0) је рационалан број.

Теорема 124. Збир, разлика,производ и количник једног рационалног и једног ирационалног броја (када су оба различита од 0) је ирационалан број.

Теорема 125. Реалан број је рационалан ако и само ако има коначан или бесконачно периодичан децимални запис.

53.2 Задаци за рад

Задатак 663. Доказати да су следећи бројеви ирационални:
а)$\sqrt{5}$ б)$\sqrt{5}+\sqrt{3}$ в)$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

*Решење:*а) Претпоставимо супротно тј. да је $\sqrt{5}$ рационалан број. То значи да се може представити у облику $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ и $NZD(p,q) = 1$. Квадрирањем добијамо да је $5 = \frac{p^2}{q^2}$ односно $5q^2 = p^2$ (1). Одавде закључујемо да $5 \mid p^2$ односно $5 \mid p$. Нека је $p = 5p_1$. Када уврстимо ову једнакост у (1) и поделимо са 5 добијамо $q^2 = 5p_1$. Закључујемо да $5 \mid q$, али онда је $NZD(p,q) \neq 1$ што је у супротности са претпоставком да је $NZD(p,q) = 1$. То значи да претпоставка да је $\sqrt{5}$ рационалан број нетачна. Дакле, $\sqrt{5}$ је ирационалан број.

б) Претпоставимо супротно тј. да је $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ рационалан број. То значи да се може представити у облику $\sqrt{5}+\sqrt{3} = \frac{m}{n}$ и $NZD(m,n) = 1$. Квадрирањем добијамо да је $8+2\sqrt{15} = \frac{m^2}{n^2}$. По теореми 2 лева страна једнакости је ирационалан број, а десна страна је рационалан број па је једнакост немогућа.Дакле, $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ је ирационалан број.

в) Претпоставимо супротно тј. да је $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ рационалан број и представимо га у облику разломка $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{p}{q}$. Када квадрирамо обе стране добијамо $1+\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{p^2}{q^2}$ односно $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{p^2-q^2}{q^2}$. Поново квадрирамо обе стране и добијамо $2+\sqrt{3} = \frac{(p^2-q^2)^2}{q^2}$. По теореми 2 лева страна једнакости је ирационалан број, па пошто је десна страна рационалан број ова једнакост је немогућа. Дакле, претпоставка да је $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ рационалан број није тачна, па је $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ ирационалан број.

Задатак 664. Који од датих бројева је ирационалан? Рационалне бројеве представити у облику разломка.
а) 0.185185185... б) 2.01020102010... в) 0.101001000100001... (иза сваке јединице се сваки пут налази по једна нула више)

Решење: а) Нека је $0.185185185... = x$ (1) . Онда је $1000x = 185.185185185...$ (2). Затим, одузимањем једнакости (1) и (2) добијамо $(2)-(1) = 999x = 185$ односно $x = \frac{185}{999}$. Дакле, број 0.185185185... је рационалан.

б) Нека је $2.01020102010... = x$ (1). Онда је $10000x = 20102.01020102010...$ (2). Одузимањем једнакости (2) и (1) добијамо $9999x = 20100$ односно $x = \frac{20100}{9999}$. Дакле, број 2.01020102010... је рационалан.

в) Очигледно наш број нема коначан децимални запис. Докажимо да нема ни периодичан. Заиста, ако би запис био периодичан, тада би се почев од неког места понављао неки коначан низ цифара. Нека се од неке m-те позиције иза децималног зареза понавља низ од k цифара $\overline{a_1a_2...a_k}$. Нека је $N > \max\{m+k, 3k+1\}$. Посматрајмо шта се дешава на позицијама иза N-те јединице иза децималног записа. Ту се налази N нула. Пошто је $N > m+k$ то значи да су те нуле у делу броја који се понавља. Како је $N > 3k+1$ то се у тих N нула садржи бар један период тј. низ $\overline{a_1a_2...a_k}$. Међутим то повлачи и да су тих к цифара све нуле. То значи да се после m-те позиције налазе само нуле што је немогуће јер има бесконачно много јединица иза децималног зареза. Дакле, дати број нема ни коначан ни периодичан запис, па је према теореми 3 ирационалан.

Задатак 665. Да ли је вредност израза рационалан или ирационалан број?
а) $\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}}$
б) $\sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}}$

Решење: а) $\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{1^2+(\sqrt{5})^2+2\cdot 1\cdot\sqrt{5}} - \sqrt{1^2+(\sqrt{5})^2-2\cdot 1\cdot\sqrt{5}}$
$= \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{5})^2} = |1+\sqrt{5}| - |1-\sqrt{5}| = 1+\sqrt{5}-(\sqrt{5}-1) = 2$
Вредност израза је рационалан број.

б) $\sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}} = \sqrt{3^2+(\sqrt{2})^2+2\cdot 3\cdot\sqrt{2}} - \sqrt{3^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot 3\cdot\sqrt{2}}$
$= \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} = |3+\sqrt{2}| - |3-\sqrt{2}| = 3+\sqrt{2}-(3-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$
Вредност израза је ирационалан број.

Задатак 666. Доказати да је вредност израза рационалан број: $S = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

Решење: Приметимо да је $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}-\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1} = \sqrt{2}-1$
Слично за свако $n \in N$ важи $\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n-n+1} = \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ Због тога је $S = -\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-...-\sqrt{99}+\sqrt{100} = -1+10 = 9$ Вредност израза је рационалан број.

Задатак 667. Да ли су дати бројеви рационални?
а) $A = \sqrt{1111...111 - 222...222}$ (200 јединица и 100 двојки)
б) $B = \sqrt{4444...444 + 11...11 - 66...66}$ ($2n$ четворки, $n+1$ јединица, n шестица)

Решење: а) $A = \sqrt{\frac{1}{9}\cdot(10^{200}-1) - \frac{2}{9}\cdot(10^{100}-1)} = \sqrt{\frac{1}{9}\cdot(10^{200}-1-2\cdot 10^{100}+2)}$
$= \sqrt{\frac{(10^{100}-1)^2}{3^2}} = \frac{10^{100}-1}{3}$. Број A је рационалан.

б)

$$B = \sqrt{\frac{4}{9}\cdot(10^{2n}-1) + \frac{1}{9}\cdot(10^{n+1}-1) - \frac{6}{9}\cdot(10^n-1)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9} \cdot (4 \cdot 10^{2n} - 4 + 10^{n+1} - 1 - 6 \cdot 10^n + 6)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9} \cdot (2 \cdot 10^n + 1)^2} = \sqrt{\frac{(2 \cdot 10^n + 1)^2}{3^2}} = \frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}$$

Задатак 668. Ако су x, y и z реални бројеви такви да су xy, yz и zx рационални бројеви различити од нуле, доказати да је:
број $x^2 + y^2 + z^2$ рационалан;

Решење: Пошто су xy,yz и zx рационални бројеви они се могу представити у облику разломака. Нека је $xy = \frac{m}{n}$, $yz = \frac{a}{b}$ и $zx = \frac{c}{d}$(m,a,$c\in Z$, и n,b,$d\in N$). Множењем ове три једнакости добијамо $x^2y^2z^2 = \frac{mac}{nbd}$. Кореновањем добијамо $xyz = \sqrt{\frac{mac}{nbd}}$. Сада израчунамо вредности x,y и z у функцији од m,a,c,n,b и d.

$$z = \frac{xyz}{xy} = \frac{\sqrt{\frac{mac}{nbd}}}{\frac{m}{n}}$$

$$x = \frac{xyz}{yz} = \frac{\sqrt{\frac{mac}{nbd}}}{\frac{a}{b}}$$

$$y = \frac{xyz}{zx} = \frac{\sqrt{\frac{mac}{nbd}}}{\frac{c}{d}}$$

Користећи израчунате вредности добијамо да је $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{mbc}{nda} + \frac{mda}{nbc} + \frac{nac}{mbd}$ Број $x^2 + y^2 + z^2$ представљен је као збир три рационална броја, па је и он рационалан.

Задатак 669. Да ли постоје рационални бројеви x, y, z, t такви да важи
$(x + y\sqrt{2})^2 + (z + t\sqrt{2})^2 = 5 + 4\sqrt{2}$

Решење: Претпоставимо да такви бројеви постоје Трансформацијом леве стране дате једнакости добијамо
$x^2 + 2y^2 + z^2 + 2t^2 + 2xy\sqrt{2} + 2zt\sqrt{2} = 5 + 4\sqrt{2}$. Пошто је $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2t^2$ рационалан а $2xy\sqrt{2} + 2zt\sqrt{2}$ ирационалан број, закључујемо да важи:
$x^2 + 2y^2 + z^2 + 2t^2 = 5$ и $2xy\sqrt{2} + 2zt\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине на бројеве x^2 и $2y^2$, а затим на бројеве z^2 и $2t^2$ добијамо
$x^2 + 2y^2 \geq 2\sqrt{x^2y^2 \cdot 2} = 2xy\sqrt{2}$ и $z^2 + 2t^2 \geq 2\sqrt{z^2t^2 \cdot 2} = 2zt\sqrt{2}$

Сабирањем ове две неједнакости добијамо $x^2+2y^2+z^2+2t^2 \geq 2xy\sqrt{2}+2zt\sqrt{2}$. Када у новодобијену неједнакост уврстимо познате вредности добијамо $5 >= 4\sqrt{2}$ што је нетачно, па не постоје рационални бројеви који задовољавају услов задатка.

Задатак 670. Доказати да је $(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}})^2$ рационалан број

Решење:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}}}$$

$$=\frac{4+2\sqrt{3}}{\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}$$

Сличним поступком добијамо да је $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}$. Коначно

$$(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}})^2=(\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}+\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6})^2=2$$

Дакле, дати израз је рационалан број.

Задатак 671. Да ли је $A=\sqrt{2003\cdot 2005\cdot 2007\cdot 2009+16}$ рационалан број?

Решење: Нека је $x=2005$. Онда је $A=\sqrt{(x-2)x(x+2)(x+4)+16}=\sqrt{(x^2+2x-8)(x^2+2x)+16}$
Уведимо смену $x^2+2x=a$. Сада је $A=\sqrt{a-8}a+16=\sqrt{(a-4)^2}=a-4=x^2+2x-4$ Дакле, број А је рационалан.

Задатак 672. Нека су a и b природни бројеви чији је збир 1. Ако су a^3 и b^3 рационални бројеви, доказати да су a и b рационални бројеви.

Решење: $a+b=1$ Такође $(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3b^2a=a^3+b^3+3ab(a+b)=a^3+b^3+3ab=1$
Бројеви a^3,b^3 и 1 су рационални, па је и број $3ab$ односно ab рационалан број. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)((a+b)^2-ab)=(a-b)(1-ab)$ Бројеви a^3, b^3, ab и 1 су рационални, па је и број $a-b$ рационалан. Нека је $m=a+b$ и $n=a-b$. Бројеви m и n су рационални, па је и број $\frac{m+n}{2}=a$ рационалан. Број $a-b$ је рационалан, па је и b рационалан број.

53.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 673. Доказати да је $A = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ ирационалан број.

Задатак 674. Ако су a,b,c и $\frac{a-b\sqrt{2010}}{b-c\sqrt{2010}}$ рационални бројеви, доказати да је тада $ac = b^2$.

Задатак 675. Ако је $A = \sqrt{7-\sqrt{48}} + \sqrt{5-\sqrt{24}} + \sqrt{3-\sqrt{8}}$, доказати да је A рационалан број.

Задатак 676. Доказати да је $A = \sqrt{111...111222...2225}$ рационалан број.(2009 јединица и 2010 двојки)

Задатак 677. Кажемо да реални бројеви a и b имају својство Π ако $a^2 + b \in Q$ и $b^2 + a \in Q$. Ако a и b имају својство Π и $a + b \in Q$, $a + b \neq 1$ доказати да су a и b рационални бројеви.

Литература

[1] Ђорђе Баралић , *Pripreme za juniorske olimpijade shkolske 2007/2008*

Предавање 54

Елементарна геометрија 1 - подударност

Никола Марковић, Математичка гимназија

54.1 бTeorijski uvod

Дефиниција 98. Два троугла су подударна ако су им све странице и сви углови подударни.

За доказ подударности два троугла користимо четири основна става подударности.

Став I: Два троугла су подударна ако имају једнаке по две одговарајуће странице и њима захваћене углове (СУС).

Став II: Два троугла су подударна ако имају једнаке по једну страницу и на њима једнаке одговарајуће налегле углове (УСУ).

Став III: Два троугла су подударна ако су све три странице једног троугла једнаке одговарајућим страницама другог троугла (ССС).

Став IV: Два троугла су подударна ако су две странице и угао наспрам веће од њих једног троугла једнаке одговарајућим страницама и углу другог троугла (ССУ).

54.2 бZadaci za rad

Задатак 678. Дат је паралелограм $ABCD$ и права p која садржи тачку D. Тачке A_1, B_1 и C_1 су подножја нормала из одговарајућих темена паралелограма на праву p. Доказати да је $AA_1 + CC_1 = BB_1$.

Решење: Нека је тачка M подножје нормале из темена C на праву BB_1. Троуглови ADA_1 и BCM су подударни по ставу УСУ, страница b и два угла са паралелним крацима, из чега произилази да је $BM =$

AA_1, а такође имамо и да је $MB_1 = CC_1$. Овиме је завршен доказ, што је и тражено да се уради.

Задатак 679. Доказати да је код једнакокраког трапеза $d^2 = m^2 + h^2$.

Решење: Нека су подножја висина из темена C и D једнакокраког трапеза $ABCD$ тачке E и F. Троуглови AFD и BCE су подударни по ставу УСУ (једнаке катете, једнаки углови на основици, и углови са паралелним крацима), самим тим су им једнаке средишне дужи. Сада ако погледамо троугао AEC видимо да су његове странице једна дијагонала, висина и дуж AE, даљи из предходно доказане подударности можемо закључити да је дуж AE једнака средњој линији јер је EF једнако краћој основици а AF једнако двострукој дужини средишње дужи троугла AFD. Из питагорине теореме примењене на троугао AEC следи тврдња коју је требало доказати.

Задатак 680. Над страницама паралелограма $ABCD$, конструсани су квадрати са средиштима M, N, P, Q. Доказати да је $MNPQ$ квадрат.

Решење: Да би доказали да је $MNPQ$ квадрат треба доказати да су све странице једнаке као и сви углови. За почетак, докажимо да су странице једнаке. Ако погледамо троуглове QAM, MNB, NCP и DPQ можемо видети да су сви подударни по ставу СУС, и то $QA \cong BN \cong CN \cong DQ$ као половине дијагонала једнаких квадрата, $AM \cong MB \cong CP \cong PD$ такође као половине дијагонала једнаких квадрата, и $\angle QAM = \angle MBN = \angle NCP = \angle PDQ = 90° + \alpha$, па следи да је $MN = NP = PQ = QM$. Сада на умањујући општост, доказаћемо да је један од углова једнак $90°$, што се аналогно доказује и за остале. $\angle QMN = 90° - \angle AMQ + \angle BMN$, а пошто је $\angle AMQ = \angle BMN$ следи $\angle QMN = 90°$. Овиме је завршен доказ да је $MNPQ$ квадрат. .

Задатак 681. Нека су M, N, P и Q редом средине страница паралелограма $ABCD$ и нека је $DM \cap AN = \{E\}, BP \cap AN = \{F\}$. Доказати да је $EF = \frac{2}{5}AN$.

Решење: Нека је $CQ \cap BP$ тачка R, тада су троуглови AME и CPR подударни по ставу УСУ. Из те подударности даље произилази да су и троуглови AED и BCR подударни па су им и средишне дужи подударне из чега следи да је $FN = \frac{1}{2}AE$. Даље пошто је $ME \parallel BF$ а M се налази на средини AB следи да је $AE = EF$ из чега даље закључујемо да је $EF = \frac{2}{5}AN$ што је и требало доказати.

Задатак 682. Дат је паралелограм $ABCD$. Кроз пресечну тачку дијагонала O конструисане су две узајамно нормалне праве које секу странице паралелограма у тачкама M, N, P и Q. Доказати да је $MNPQ$ ромб.

Решење: Ако је MP нормално на NQ и ако су троуглови AOM и COP подударни, по ставу УСУ, из чега имамо да је $OM = OP$, исто тако и за троуглове BON и DOQ из чега се добија да је $NO = OQ$ имамо да се дијагонале четвороугла полове и секу под углом од $90°$ што је потребан и довољан услов да би овај четвороугао био ромб.

Задатак 683. Доказати да је сваки паралелограм уписан у круг, правоугаоник.

Решење: Како је $AO = OC = BO = OD = r$ из тога следи да је $AC = BD = 2r$ и пошто можемо доказати да су троуглови ABC, ABD, BCD и ACD подударни ставом ССС из тога следи да су сви углови овод четвороугла по $90°$, па је тиме завршен затадак, јер је то довољан доказ да је паралелограм уписан у круг, баш правоугаоник.

Задатак 684. Доказати да, ако дијагонале трапеза полове углове на једној основици, онда је трапез једнакокраки или има три једнаке странице.

Решење: Из услова задатка, тј. да је четвороугао трапез, имамо да је $CD \parallel AB$ из чега следи да је $\frac{\alpha}{2} = \angle ACD$ из чега даље следи да је троугао ACD једнакокрак, па имамо да је $AD = CD$, исто тако се доказује и за троугао BCD из чега такође произилази да је $BC = CD$ па је тако $BC = CD = DA$ што је и требало доказати.

Задатак 685. Доказати да су подножја нормала повучених из пресека дијагонала ромба на његове странице темена правоугаоника.

Решење: Нека је тачка пресека дијагонала ромба $ABCD$, тачка O, и нека су подножја нормала из O на странице ромба тачке M, N, P и Q. Троуглови AOB, BOC, OCD и AOD по ставу ССС, из чега следи да су дужи OM, ON, OP и OQ једнаке као висине подударних троуглова. Даље имамо да су дијагонале четвороугла $MNPQ$ једнаке и да се полове што је довољан доказ да је тај четвороугао, правоугаоник.

Задатак 686. Нека су E и F средине основица трапеза $ABCD$. Доказати да средња линија трапеза дели дуж EF на два једнака дела.

Решење: Нека је пресек дужи EF и средње линије m тачка O. Ако је MN висина трапеза $ABCD$ која садржи тачку O, имамо да су троуглови MEO и ONF подударни по ставу УСУ, из чега следи да су дужи EO и OF једнаке што даље следи да средња линија дели EF на два једнака дела што је тебало доказати.

Задатак 687. Конструисати четвороугао $ABCD$ ако се зна да је: $AB = 5cm, BC = 3cm, CD = 4cm$ и дијагонале $AC = 6cm$ и $BD = 5,5cm$.

Решење: У овом решењу, образложићемо само начин на који овај задатак може да се уради. Конструишимо помоћни троугао ABC (ССС)а затим троугао BCD (ССС), овиме је конструкција завршена јер смо констуисали све тачке траженог четвороугла.

54.3 бZadaci za domac1i rad

Задатак 688. Конструисати четвороугао ако је $AB = 5cm, BC = 4cm, CD = 3cm, AD = 4cm$ и $\angle ABC = 60°$.

Задатак 689. Симетрала оштрог угла код темена A паралелограма $ABCD$ сече продужетак странице BC у тачки E, при чему је $CE = 3cm$. Израчунати дужине страница паралелограма ако му је обим $50cm$.

Задатак 690. У квадрату $ABCD$ тачка M је средиште странице AB, а N тачка странице AD таква да важи $AN = 2ND$. Одрадити обим и површину квадрата $ABCD$ ако је $MN = 1cm$.

Задатак 691. Нека је D произвољна тачка хипотенузе AB правоуглог троугла ABC. Права одређена висинама троугла из темена C и права која садржи тачку D, и паралелна је катети AC секу се у тачки E. Доказати да је $CD \perp BE$.

Задатак 692. Око једнакостраничног троугла странице $12cm$ описан је круг k. Наћи дужину полупречника круга који додирује две странице тог троугла и круг k унутрашњим додиром.

бLiteratura

[1] С. Огњановић, *М*атематика 10.

[2] Додатна настава из математике.

Предавање 55

Елементарна геометрија 2 - круг

Никола Марковић, Математичка гимназија

55.1 Теоријски увод

Дефиниција 99. Централни угао круга је угао коме је теме у центру круга а кракови су му полупречници круга, док је периферијски угао, угао коме је теме на кружној линији а кракови су му тетиве круга.

Теорема 126. Ако су централни и периферијски угао над истим кружним луком онда је централни угао два пута већи од периферијског.

55.2 Задаци за рад

Задатак 693. Доказати да је централни угао дупло већ од периферијског угла над истим кружним луком.

Решење: Нека је AB тетива круга над којом су конструисани дати централни и периферијски углови. Теме централног угла је тачка O а периферијског угла S и нека је $OS \cap AB = \{C\}$. Сада за троугао AOS имамо да је $OA = OS$ па је троугао једнакокрак из чега следи да је $\angle SAO = \angle OSA$. Исто важи и за троугао BSO. Даље можемо доказати да су троуглови AOS и BSO подударни, став СУС, па је периферијски угао ASB једнак $2 \cdot \angle OSA$. Пошто је познато да је $\angle AOC = \angle SAO + \angle OSA = 2 \cdot \angle OSA$, исто важи и за угао $\angle COB$ па је тако $AOB = 4 \cdot \angle OSA$, тиме је задатак завршен јер је то крај доказа да је централни угао два пута већи од периферијског.

Задатак 694. Доказати да су угао између тангенте круга и тетиве, која садржи додирну тачку тангенте и круга, и периферијски угао над том тетивом једнаки.

Решење: Нека је тетива круга AB и нека тангента p садржи тачку B. Периферијски угао над тетивом AB, и теменом у тачки S је α а угао између тетиве и тангенте β, треба доказати да је $\alpha = \beta$. Ако је O центар датог круга имамо да је троугао AOB једнакокрак, и такође да је $OB \perp p$. Сада видимо да је $\beta = 90^\circ - \angle ABO$, а такође је и централни угао над AB једнак $180^\circ - \angle OAB - \angle ABO = 180^\circ - 2 \cdot \angle ABO$ па је периферијски угао α једнак његовој половини што износи $90^\circ - \angle ABO$ па је тако $\alpha = \beta$ што је и требало доказати.

Задатак 695. Конструисати угао дупло мањи од датог, без конструисања његове симетрале.

Решење: Конструкцију би требало извести на следећи начин. Прво се конструише круг са центром у темену датог угла, са произвољним полупречником. Тај круг сече кракове датог угла у тачкама A и B. Сада треба конструисати периферијски угао над тетивом AB. Тај периферијски угао једнак је половини централног угла над истом тетивом, што је дати угао, па је тако конструисан угао дупло мањи од датог.

Задатак 696. Одредити површину једнакокраког троугла $ABC(AC = CB)$ чији је крак $6cm$, а полупречници њему описаног круга OA и OB граде угао од 60°.

Решење: Угао $\angle ACB$ је једнак половини угла $\angle AOB$, као периферијски угао над истом тетивом, и износи 30°. Ако повучемо висину h_a из темена A на страницу BC, чије је подножје A_1, имамо да је троугао AA_1C правоугли са једним углом од 30°, па је тако он половина једнакостраничног троугла, из чега следи да је $h_a = \frac{1}{2} \cdot AC = 3cm$, па је тако површина троугла ABC једнака $\frac{6cm \cdot 3cm}{2} = 9cm^2$.

Задатак 697. Дате су две концетричне кружнице. Дужина тетиве веће кружнице, која додирује мању кружницу, једнака је $2cm$. Наћи поврсхину кружног прстена образованог датим кружницама.

Решење: Нека је R полупречник велике а r полупречник мале кружнице, и нека је дата тетива AB. Нека је OH висина троугла ABO. Можемо уочити да у троуглу HAO важи да је $R^2 - r^2 = 1cm^2$, а пошто знамо да је површина прстена једнака $R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi$ па је површина овог прстена πcm^2.

Задатак 698. Доказати да је збир површина две фигуре, које подсећају на два месеца, који настају тако што се констуишу полукружнице са центрима на срединама страница правоуглог троугла, са половинама одговарајућих страница као полупречницима, које су конструсисане са исте стране хипотенузе, једнак површини тог правоуглог троугла.

Решење: Збир површина ове две фигуре износи збиру површине троугла и површина полукругова описаних над катетама умањеном за површину полукруга описаног над хипотенузом. Ако би смо то записали као једначину , где је P површина троугла а M површина датих фигура, имамо да је $P + \frac{(\frac{a}{2})^2\pi}{2} + \frac{(\frac{b}{2})^2\pi}{2} - \frac{(\frac{c}{2})^2\pi}{2} = M$, сада ако би смо хипотенузу представили као $\sqrt{a^2+b^2}$ и то заменили у датој једначини имали би смо да је баш $P = M$ што је и требало доказати.

Задатак 699. Тетива PQ датог круга једнака је његовом полупречнику. Израчунати угао који граде тангенте на дати круг у тачкама P и Q.

Решење: Знамо да је троугао OPQ једнакостраничан, странице r. Из овога закључујемо да је периферијски угао над тетивом PQ једнак $30°$. Нека се тангенте p и q секу у тачки S, из задатка 2. имамо да су углови $\angle PQS$ и $\angle SPQ$ једнаки периферијском углу над тетивом PQ и износе по $30°$, па је тако угао $\angle PSQ$ једнак $120°$.

Задатак 700. Троугао ABC је једнакостраничан, и страница му је $2cm$. Конструисана су три круга са центрима у теменима троугла ABC и полупречницима дужине $1cm$. Израчунати површину унутар троугла која није покривена ниједним од дата три троугла.

Решење: Из приложеног у задатку лако закључујемо да је површина троугла покривена датим круговима у ствари половина површине једног круга полупречника $1cm$, јер су дати исечци од тих једнаких кругова једнаки са углом од $60°$ па тако сва три заједно образују полукруг полупречника $1cm$, па тако тражена површина износи $\frac{2^2\cdot\sqrt{3}}{4}cm^2 - \frac{1^2\pi}{2}cm^2$.

Задатак 701. Одредити површину мањег кружног одсечка који одсеца тетива AB, дужине $6cm$, ако је централни угао над тетивом AB једнак $120°$.

*Решење:*Нека је r полупречник круга, а нека је OC нормала из центра круга на тетиву AB. За троугао AOC имамо да је он правоугли са угловима од по $30°$ и $60°$, па је тако $AC = \frac{AB}{2} = \frac{r\sqrt{3}}{2} = 3cm$, из чега даље имамо да је површина овог одсечка једнака $\frac{r^2\pi\cdot 120°}{360°} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = 4\pi - 3\sqrt{3}$.

Задатак 702. У кружни исечак круга полупречника $6cm$ уписан је круг који додирује полупречнике и лук тог исечка. Ако је тетива која одговара том исечку $4cm$ полупречник уписаног круга је ?

Решење: Означимо са O центар датог круга, AB дати тетиву, S центар уписаног круга, C средиште тетиве AB и D подножје из S на OB. Из сличности троуглова SOD и BOC имамо да је $\frac{6-r}{r} = \frac{6}{2}$, па је $r = \frac{3}{2}cm$.

55.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 703. Дат је круг и ван њега тачка M. Кроз тачку M конструсане су сечице s_1 и s_2 које секу дати круг у тачкама A и B, односно C и D, тако да је тачка A између тачака M и B, а C између M и D. Ако је $MA = 3cm, MB = 8cm$ и $MC = 4cm$, дужина CD износи?

Задатак 704. Полукружница полупречника $3cm$ ротирана је око једне крајње тачке свог пречника за угао од $30°$. Колика је површина фигуре коју је при томе описала та полукружница?.

Задатак 705. У једном кругу повучене су из исте тачке две тетиве: једна од $6cm$ и једна од $9cm$, тако да граде угао од $120°$. Колика је површина тог троугла?

Задатак 706. На датом кругу уочене су три тачке које деле кружну линију на три дисјунктна лука у односу $3 : 4 : 5$. У уоченим тачкама конструисане су тангенте на круг. Колики су углови тако добијеног троугла?

Задатак 707. Два полупречника OA и OB круга граде угао од $60°$. У тачки A конструисана је нормала AN на тангенту круга конструисану у тачки B. Ако полупречник круга износи $6cm$, одредити површину између нормале AN, тангенте BN и лука AB.

Литература

[1] С. Огњановић, *Математика 10.*

[2] Додатна настава из математике.

Предавање 56

Елементарна геометрија 3 - четвороугао

Никола Марковић, Математичка гимназија

56.1 Теоријски увод

Теорема 127. Четвороугао $ABCD$ је тетиван ако и само ако постоји кружница која садржи тачке A, B, C и D.

Теорема 128. Четвороугао $ABCD$ је тетиван ако и само ако је $\angle BAC + \angle BCD = 180°$.

Теорема 129. Четвороугао $ABCD$ је тетиван ако и само ако је $\angle ADB = \angle BCA$.

Теорема 130. Четвороугао $ABCD$ је тетиван ако и само ако је $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ (**Птоломејева теорема**).

Теорема 131. Нека се дијагонале конвексног четвороугла $ABCD$ секу у тачки O. Онда је четвороугао $ABCD$ тетиван ако и само ако је $AO \cdot CO = BO \cdot DO$.

Теорема 132. Четвороугао $ABCD$ је тангентан ако и само ако постоји кружница која додирује дужи AB, BC, CD и DA.

Теорема 133. Четвороугао $ABCD$ је тангентан ако и само ако је $AB + CD = BC + AD$.

Теорема 134. Четвороугао $ABCD$ је тангентан ако и само ако се кружнице уписане у троуглове ABC и ADC додирују.

Теорема 135. Нека се праве AB и CD секу у тачки M, а праве AD и BC у тачки N. Онда је четвороугао $ABCD$ тангентан ако и само ако је $MA + MC = NA + NC$.

56.2 Задаци за рад

Задатак 708. Висине паралелограма односе се као $2:3$, његов обим је $40cm$, а оштар угао $30°$. Израчунати површину паралелограма.

Решење: Нека је подножје висине из D на AB тачка D_1, а подножје висине из B на AD тачка B_1. Угао $\angle DAB$ износи $30°$. Ако погледамо троуглове AD_1D и ABB_1 видимо да су то половине једнакостраничних троуглова и да тако висине износе $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$. Даље ако применимо дату пропорцију и чињеницу да имамо вредност обима добија се да је дужина странице a једнака $12cm$ а одговарајуће висине h_a, $4cm$, тако имамо да површина износи $48cm$.

Задатак 709. Симетрала оштрог угла код темена A паралелограма $ABCD$ сече продужетак странице BC у тачки E, при чему је $CE = 3cm$. Израчунати дужине страница паралелограма ако му је обим $50cm$.

Решење: Лако се доказује из приложеног да је троугао ABE једнакокрак, и према томе добијамо једнакост $a = b+3$ а пошто имамо обим а самим тим и вредост $a+b = 25cm$, сада можемо да израчунамо да су вредности страница $a = 14cm$ и $b = 11cm$.

Задатак 710. У једнакокраки трапез, где су a и b основице уписана је кружница, чији пречник износи h што је висина датог паралелограма. Доказати да је $h^2 = a \cdot b$.

Решење: .

Задатак 711. Основице једнакокраког трапеза су $a = 25cm$ и $b = 15cm$, а дужине катета износе $8cm$. Одредити дужину дијагонале и површину ако се зна да је збир углова на већој основици већ од $90°$.

Решење: Ако спустимо нормалу из темена C на AB, са подножјем у тачки C_1, можемо применити питагорину теорему на троугао C_1BC, из чега закључујемо да је $h^2 = 39cm^2$, даљом применом питаогорине теореме на троугао AC_1C имамо да дужина дијагонале износи $\sqrt{439}cm$.

Задатак 712. Нека је O центар уписаног круга правоуглог трапеза $ABCD$. Ако је $OC = 5cm$ и $OB = 12cm$, полупречник уписаног круга у дати трапез износи?

Решење: OB и OC су симетрале два суплементна угла, па је $\angle BOC = 90°$. По питагориној теореми је $BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = 13cm$, па је површина троугла $BOC : \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot r$ и одавде је $r = \frac{60}{13}cm$.

Задатак 713. Конструиши квадрад два пута мањи од датог.

Решење: Нека је страница датог квадрата a. Да би конструисали квадрат дупло мањи од датог морамо прво одрадити дужину његове странице. Ако му је површина $\frac{a^2}{2}$ дужина странице самим тим износи $\frac{a}{\sqrt{2}}$ што је једнако $\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}$. Ако погледамо да дужина дијагонале почетног квадрата износи $a \cdot \sqrt{2}$, лако долазимо до тражене странице. Наставак је конструкција квадрата, која не представља проблем јер је познато све што је потребно да би била изведена.

Задатак 714. Нека је E средиште странице CD правоугаоника $ABCD$ и нека је BM висина троугла ABC, а тачка N средиште дужи AM. Доказати да је $\angle BNE = 90°$.

Решење: .

Задатак 715. Доказати да су средишта дијагонала и средишта двеју наспрамних страница конвексног четвороугла темена паралелограма.

Решење: Нека је то четвороугао $ABCD$, и нека су тачке E и F средишта страница AB и CD, а тачке G и H средишта дијагонала AC и BD. Сада можемо приметити да је дуж EH средишна дуж троугла ABD па је самим тим паралелна са страницом AD и једнака њенојј половини, такође и дуж FG је средишна дуж троугла ACD, и она је исто паралелна AD и једнака њеној половини, па тако можемо закључити да су EH и FG две једнаке и паралелне дужи. Исто тако се доказује и за дужи HF и GE, и тиме је завршен задатак, јер је то довољан доказ да је $EHFG$ тражени паралелограм.

Задатак 716. Доказати да је разлика кракова мања од разлике основица код трапеза.

Решење: Нека је то трапез $ABCD$. Нађимо тачку E на страници AB такву да је $EC \parallel AD$. Сада ако погледамо на троугао EBC видимо да су његове странице $a - b, c$ и d, где су a, b основице а c, d кракови трапеза $ABCD$, из чега се даље може закључити да је $(a - b) > c - d$, што је и требало доказати.

Задатак 717. Нека је $ABCD$ паралелограм и нека је E тачка полуправе AB, а F тачка полуправе AD, при чему је $BE = AB$ и $DF = AD$. Доказатида се праве AC, DE и BF секу у једној тачки.

Решење: Нека је тачка G пресек странице BC и дужи DE, а тачка H пресек странице CD и дужи BF. Сада ако погледамо троугао AED

видимо да је тачка B налази на средини странице AE и имамо да је $BG \parallel AD$, из чега следи да је BG средишна дуж троугла AED, и једнака је половини странице AD а самим тим и BC па се тако тачка G налази на средини странице BC. Исто тако се доказује и да се тачка H налази на средини странице CD. Ако повучемо дијагоналу BD образује се троугао BCD а пошто знамо да се дијагонале полове, имамо да се тражене праве секу у једној тачки и та тачка је баш тежиште троугла BCD.

56.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 718. Ако су M, N, P и Q средишта страница конвексног четвороугла $ABCD$, наћи однос површина четвороуглова $ABCD$ и $MNPQ$.

Задатак 719. У унутрашњости правоугаоника $ABCD$ дата је тачка P. Ако је $PA = 5cm$, $PB = 10cm$ и $PC = 14cm$, одредити PD.

Задатак 720. У једнакокраки трапез површине $20cm^2$ уписан је круг полупречника $r = 2cm$. Израчунати дужине страница трапеза.

Задатак 721. Конструисати квадрат $ABCD$ ако је дата тачка A, и тачке M и N на страницама BC и CD редом.

Задатак 722. Дат је правоугли троугао ABC са правим углом код темена C. На страницама AB и AC дате су тачке E и F, тим редом, такве да је $AC = AE$ и $EF = AF$. Доказати да је $BE + CF = EF$.

Литература

[1] С. Огњановић, *Математика 10.*

[2] Додатна настава из математике.

Предавање 57

Рачунање и докази у геометрији 2(Питагорина теорема)

Стефан Баца

57.1 Теоријски увод

Теорема 136. Питагорина теорема - Површина квадрата над хипотенузом правоуглог троугла једнака је збиру површина квадрата над катетама тог троугла.

Доказ: Коструишимо два подударна квадрата $CDFH$ и $C_1D_1F_1H_1$ чије странице $CD = C_1D_1 = a+b$. Троуглови $ABC, BDE, EFG, GHA, OB_1A_1$, $B_1D_1A_1, OG_1H_1, OE_1H_1$ су подударни по СУС, где је O пресек дужи $G_1B_1iA_1E_1$. Четвороугао $ABEG$ је квадрат, квадрат над хипотенузом c, јер је $AB = BE = EG = GA = c$ (хипотенуза правоуглог троугла ABC). $\angle DBE + \angle EBA + \angle ABC = 180^o$, $\angle DBE + \angle ABC = 90^o$, онда је $\angle EBA = 90^o$/ Ако тачке на квадрату $H_1F_1D_1C_1$ рапоредимо тако да важи : $C_1B_1 = a, B_1D_1 = b, D_1A_1 = a, A_1F_1 = b, F_1G_1 = b, G_1H_1 = a, H_1E_1 = biE_1C_1 = a$ добијамо одговарајћу подударност и релацију $a^2 + b^2 = c^2$, чиме смо доказали теорему.

57.2 Задаци за рад

Задатак 723. У једнакокрако-правоуглом троуглу $ABC(AC = BC)$ дата је тачка M тако да је $AM = 2, BM = \sqrt{2}$ и $CM = 1$. Израчунати површину троугла ABC.

Решење: У спољашњост троугла ABC конструишемо тачку D, тако да је троугаоBCD подударан троуглу ACM. Ако $\angle ACM = \phi$, онда је $\angle BCD = \phi$, па је $\triangle CMD$ једнакокрако правоугли ($CM = CD = 1$ и $\angle DCM = \phi + \alpha = 90^o$). Тада је $DM = \sqrt{2}$. Како је $BD = AM = 2, BM = DM = \sqrt{2}$, то је и троугао BDM једнакокрако-правоугли. Значи $\angle BDM = 45^o$ и $\angle CDM = 45^o$, па је $\angle CDB = 90^o$. Дакле $BC^2 = CD^2 + BD^2 = 1^2 + 2^2 = 5$. Површина је : $P = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{BC \cdot BC}{2} = \frac{5}{2}$.

Задатак 724. Дат је правоугли троуга ABC са правим углом код темена C и катетама $a = 6cm$ и $b = 8cm$. Ако су A_1, B_1, C_1 средишта страница BC, AC и AB одредити полупречник кружнице која садржи тачке A_1, B_1, C_1

Решење: Тражени круг је описан око правоугаоника $A_1CB_1C_1$. Дијагонала d тог правоугаоника је половина хипотенуза $c = 10cm$, дакле $5cm$, па је тражени полупречник $r = 2.5cm$.

Задатак 725. Дат је конвексан четворугао $ABCD$ тако да је $AB+AD = 10cm$, $BC = CD$ и $\angle BCD = \angle BAD = 90^o$. Израчунати површину датог четвороугла.

Решење: Ако је $AB = x$, онда је $AD = 10 - x$. Троугао ABD је правоугли, па је површина троугла ABD $P = \frac{AB \cdot AD}{2} = \frac{x \cdot (10-x)}{2} = 5 \cdot x - \frac{x^2}{2}$. Троугао BCD је једнакокрако-правоугли, па је површина троугла $BCD, P = \frac{BC \cdot CD}{2} = \frac{BC^2}{2} = \frac{BD^2}{2}$. Користећи Питагорину теорему добија се $BD^2 = AB^2 + AD^2 = x^2 + (10 - x)^2 - 2 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 100$, па је површина троугла$BCD, P = \frac{x^2}{2} - 5 \cdot x + 25$. Површина четвроругла $ABCD$ је збир површина троуглова ABD и BCD, тј. $P = 5 \cdot x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - 5 \cdot x + 25 = 25cm^2$

Задатак 726. Бочне стране ABS, BCS и CAS тростране пирамиде $ABCS$ су међусобно нормалне и имају редом површине $54cm^2, 96cm^2$ и $72cm^2$. Израчунати запремину пирамиде и мерне бројеве сваке од ивица пирамиде.

Решење: Нека је $AS = a, BS = b$ и $CS = c$. Тада је запремина дате пирамиде $V = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \frac{c}{3} = \frac{a \cdot b \cdot c}{6}$. Како је $P_{ABC} = \frac{a \cdot b}{2} = 54, P_{BCS} = \frac{b \cdot c}{2} = 96$ и $P_{CAS} = \frac{a \cdot c}{2} = 72$, то се множењем ових трију релација добија $a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 : 8 = 54 \cdot 96 \cdot 72$. Дакле $a \cdot b \cdot c = 8 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 4$ и $a \cdot b = 108$, па је $c = 16cm$. Слично је $a = 8 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 4 : (2 \cdot 6 \cdot 16) = 9cm$ и $b = 12cm$. Користићи Питагорину теорему добија се да је $AB = 15cm, BC = 20cm$ и $CA = \sqrt{337}cm$.

Задатак 727. Дат је правоугли трапез ABC, са правим углом код темена B, дхије су основице$AB = 8cm$ и $CD = 4cm$, а крак $BC = 4cm$. У датом трапезу на случајан нацин изабрано 17 тачака. Доказати да међу изабраним тачкама постоје бар две тачке чије међусобно растојање није веће од $\sqrt{5}cm$.

Решење: Дати трапез поделимо на четри подударна трапеза, а затим сваки од добијених трапеза поделимо опет на четри подударна трапеза. како имамо 17 тачака, а 16 трапеза, на основу Дирихлеовог принципа постоји трапез унутар ког се налазе бар две тачке датог скупа. Како је највеће растојање унутар једног од 16 добијених подударних трапеза дијагонала трапеза која је једнака $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}cm$, то увек постоје две тачке чије растојање није веће од $\sqrt{5}cm$.

Задатак 728. У полукруг полупречника r уписати квадрат. Израчунати површину странице квадрата у зависности од r.

Решење: Површина квадрата $P=a^2$, а како је $a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{5\cdot a^2}{4}=r^2$, то је $a^2=\frac{4\cdot r^2}{5}$, па је $P=\frac{4\cdot r^2}{5}$.

Задатак 729. На једној страни диедра чији је угао 60^o, дата је тацка M. Њено одсотјање од друге стране диедра је $8\cdot\sqrt{3}cm$. Колико је њено одстојање од ивице диедра?

Решење: Тражено одстојање је $16cm$. Ако су M_1 и M_2 нормалне пројекције тачке M редом на страну диедра и на ивицу, трада је : $\angle MM_1M_2=90^o, \angle MM_2M_1=60^o$

Задатак 730. Ако су краци неједнакокраког трапеза међусобно нормални, онда је збир квадрата његових основица једнак збиру квадрата његових дијагонала. Доказати.

Решење: Нека се краци трапеза секу у тачки M. Тада је $\angle AMB$ прав. Нека су мерни бројеви основице трапеза a и b, кракови c и d, дигајонала d_1 и d_1, а дужи DM и CM,x и y. Из Питагорине теореме следи $a^2+b^2=(x+d)^2+(c+y)^2+x^2+y^2=(x+d)^2+y^2+(c+y)^2+x^2=d_1^2+d_2^2$.

Задатак 731. Оштри углови неједнакокраког трапеза су комплементарни. Израчунати обим и површину трапеза, ако је један крак $15cm$, мања основица $14cm$ и висина $12cm$.

Решење: Ако се конструише паралелограм $ADCE$, онда је јасно да је троугао BCE правоугли, пошто су углови на основици комплементарни. Тада је $EM^2=15^2-12^2=81=9^2$, па је $EM=9cm$. Сада је $BC^2=(x+9)^2-15^2=x^2+12^2$. Решавањем једначина добија се $x=16cm$, а тада је крак $BC=20cm$. Обим трапеза је $88cm$, а површина $318cm^2$.

Задатак 732. У унутрашњости троугла са страницама дужине $6cm, 8cm$ и $10cm$ уоче се четири произвољне тачке. Доказати да међу њима постоје бар две које се налазе на растојању мањем од $5cm$.

Решење: Како је $6^2 + 8^2 = 10^2$, следи да је дати троугао правоугли. Ако поделимо дати троугао дузима A_1B_1 и A_1C_1, где су A_1, B_1, C_1 редом средишта страница BC, CA и AB, онда ће бар две од четири тачке да буду у једном од та три дела. Растојање између те две тачке које се налазе у једном делу је мање од $5cm$.

57.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 733. Израчунати обим торугла чија је једна страница дужине $24cm$, а одговарајућ висина и тежишна дуж $8cm$, односно $10cm$.

Задатак 734. Правоугаоник $ABCD$ чије су странице $a = 6cm, b = 3cm$ и једнакостранични троугао ABE имају заједничку страницу $AB = a$ и налазе се са исте стране те странице. Израчунати обим и површину заједничког дела правоугаоника и једнакостраничног троугла.

Задатак 735. Дата је тространа једнакоивична пирамида $SABC$. Нека је SS_1 висина пирамиде, а M средиште висине SS_1. Доказати да је $\angle AMB = 90^o$.

Задатак 736. Унутрашњи углови троугла односе се као $2 : 3 : 7$. Дужина највеће странице троугла је 1 м. Одредити дужине осталих страница троугла.

Задатак 737. Израчунати површину трапеза чије су основице дужина $a = 25cm, b = 15cm$ и краци $c = 6cm$ и $d = 8cm$

Литература

[1] С. Огњановиц, *Математика 10ђ*, Круг, 2007.

[2] Група аутора, *1000 задатака*, Друштво математичара Србије , 2007.

Предавање 58

Дирихлеов принцип

Стефан Станојевић, Математичка гимназија

Дирихлеов принцип. Уколико је $nk+1$ објеката распоређено у k скупова, тада се у једном од тих скупова мора налазити барем $n+1$ објеката.

58.1 Задаци за рад

Задатак 738. . У квадрату странице $31cm$ је на произвољан начин распоређено 2010 тачака. Доказати да међу датим тачкама постоје бар две чије је растојање мање од $1cm$.

Решење: Квадрат ћемо поделити на $44^2 = 1936$ мањих подударних квадрата странице $\frac{31}{44}cm$. Како је $\frac{31}{44} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, растојање између сваке две тачке унутар малог квадрата биће мање од 1. Пошто по Дирихлеовом принципу мора постојати квадрат у коме се налазе бар 2 од изабраних 2010 тачака, тврђење је доказано.

Задатак 739. На првенству школе у кошарци свака са сваком игра 10 екипа. Доказати да у сваком тренутку такмичења постоје две екипе са истим бројем одиграних утакмица.

Решење: Претпоставимо да у неком тренутку не постоје две екипе са истим бројем одиграних утакмица. Како имамо 10 екипа, а свака екипа има 10 могућности за број одиграних утакмица (0...9), то ћемо кад саберемо број одиграних утакмица свих тимова добити $0+1+2+...+9 = 45$. Међутим, збир бројева одиграних утакмица свих тимова мора бити паран. Контадикција! Значи, у сваком тренутку постоје две екипе са истим бројем одиграних утакмица.

Задатак 740. Бела раван је на произвољан начин попрскана плавом бојом. Доказати да у плавобелој равни постоје две тачке исте боје (плаве или беле) чије је растојање $1cm$.

Решење: Уочимо произвољан једнакостраничан троугао странице $1cm$. По Дирихлеовом принципу два његова темена ће бити обојена истом бојом. Овако смо нашли две тачке исте боје на растојању $1cm$.

Задатак 741. Бела раван је на произвољан начин попрскана плавом бојом. Доказати да у плавобелој равни постоји правоугли троугао чија је хипотенуза $2010cm$ и чија су сва темена исте боје.

Решење: По претходном задатку, постоји дуж AB дужине $2010cm$ чија су оба темена исте боје. Опишимо кружницу над овом дужи као пречником. Ако је било која тачка C кружнице различита од темена почетне дужи исте боје као темена почетне дужи, троугао ABC је рес-хење задатка. Ако ниједна тачка кружнице различита од A и B није исте боје као A и B, онда су све тачке кружнице осим A и B исте боје па међу њима можемо наћи тражени троугао. Повуцимо произвољан пречник CD различит од AB и изаберимо произвољну тачку E на кружници. Троугао CDE ће задовољавати услове задатка.

Задатак 742. Доказати да се од произвољних 12 бројева могу издвојити два чија је разлика дељива са 11.

Решење: По Дирихлеовом принципу постоје два броја која дају исти остатак при дељењу са 11.

Задатак 743. Дато је 5 различитих природних бројева. Доказати да међу њима постоје три броја чији је збир дељив са 3.

Решење: Ако међу овим бројевима постоје три броја која дају три тазличита остатака при дељењу са 3, задатак је решен, њиховим сабирањем добићемо број дељив са 3. Ако не постоје, сваки од 5 бројева ће давати један од два могућа остатка при дељењу са 3. По Дирихлеовом принципу, међу њима ће постојати 3 броја који дају исти остатак. Збир ова три броја биће дељив са 3.

Задатак 744. Дато је 11 различитих природних бројева. Доказати да међу њима постоји 6 бројева чији је збир дељив са 6.

Решење: Изаберимо било којих 5 од 11 датих бројева. По претходном задатку, међу њима можемо изабрати три броја чији је збир дељив са 3. Ако поновимо још два пута овај поступак, од датих 11 бројева можемо изабрати три групе по три броја тако да је у свакој групи збир бројева дељив са 3. Сада по Дирихлеовом принципу од те три групе постоје две у којима је збир бојева исте парности, па сабирајући те две групе добијамо збир дељив са 6.

Задатак 745. Наћи најмањи број n такав да се између било којих n целих бројева може изабрати 18 бројева, тако да је њихов збир дељив са 18.

Решење: Одговор је 35 бројева.

Између 17 нула и 17 јединица није могуће изабрати потребних 18 бројева. Дакле, тражени број је већи од 34.

Доказаћемо да је од произвољних 35 бројева могуће изабрати 18 тако да им је збир дељив са 18. По претходном задатку, од произвољних 11 бројева је могуће изабрати 6 тако да им је збир дељив са 6. Одвојимо 11 од датих 35 бројева и од њих изаберемо шесторку чији је збир дељив са 6. Поступак поновимо још четири пута и добићемо 5 шесторки, од којих је у свакој збир бројева дељив са 6. Нека су збирови бројева ових пет шесторки a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

Посматрајмо бројеве

$k_1 = \frac{a_1}{6}, k_2 = \frac{a_2}{6}, k_3 = \frac{a_3}{6}, k_4 = \frac{a_4}{6}, k_5 = \frac{a_5}{6}$.

Од ових 5 бројева можемо издвојити 3 таква да им је збир дељив са 3. Пошто индекси нису битни, можемо претпоставити да су то k_1, k_2, k_3. Сада је $a_1 + a_2 + a_3 = 6(k_1 + k_2 + k_3)$, па како је $k_1 + k_2 + k_3$ дељиво са 6 то је $a_1 + a_2 + a_3$ дељиво са 18. Спајањем ове три шесторке добићемо 18 бројева чији је збир дељив са 18.

Задатак 746. Доказати да се у сваком скупу од шест људи могу наћи три човека који се међу собом не познају или пак свако познаје преосталу двојицу.

Решење: Нека је A један човек из скупа од шест људи. Тада по Дирихлеовом принципу од преосталих петоро људи постоје тројица, рецимо B, C, D, тако да важи једно од следећа два тврђења:

а)A познаје сваког од B, C, D. Ако се никоја двојица од B, C, D не познају тврђење је доказано. Ако се нека двојица од њих, рецимо B и C, познају, тада се A, B, C сви међусобно познају.

б)A не познаје никог од B, C, D. Ако се B, C, D сви међусобно познају, тврђење је доказано. Ако се нека двојица од њих, рецимо B и C, не познају, тада су A, B, C сви међусобно непознати.

Задатак 747. Све дијагонале и странице неког седамнаестоугла обојене су и то, неке плавом, неке белом, а неке црвеном бојом. Доказати да међу страницама и дијагоналама постоје три истобојне дужи које су странице троугла.

Решење: Уочимо произвољно теме. Како је оно повезано са 16 других темена и странице и дијагонале су обојене у три боје, по Дирихлеовом принципу шест дужи исте боје полази из њега. Ако су било која два од ових шест темена међусобно повезана помоћу дужи ове боје, задатак је решен. Ако нису, ових шест темена су повезани дузхима које могу бити обојене у две боје, па по претходном задатку међу њима постоји истобојни троугао.

58.2 Задаци за домаћи рад

Задатак 748. У правилном шестоуглу чија је страница $2cm$ на случајан начин распоређена је 51 тачка, од којих су неке обојене плавом, а неке црвеном бојом. Доказати да без обира на распоред тачака и њихову обојеност, увек постоје две тачке исте боје чије растојање није веће од $1cm$.

Задатак 749. Бели лист папира попрскан је мастилом. Доказати да у тој равни постоји једнакокраки правоугли троугао чија су темена исте боје.

Задатак 750. У равни је дато 8 тачака тако да не постоје три тачке које су на истој правој. Докажи да постоји троугао чија су темена у тим тачкама, а један његов угао је мањи од 60 степени.

Задатак 751. Бела раван је на произвољан начин попрскана плавом бојом. Доказати да у плаво белој равни постоји једнакостранични троугао чија су сва три темена исте боје.

Задатак 752. Бела раван је на произвољан начин попрскана плавом бојом. Доказати да у плаво белој равни постоји дуж чије средиште је исте боје као и њени крајеви.

Литература

[1] *1000 задатака*, Друштво математичара Србије 2003.

[2] Ратко Тошић, *Математички проблеми '97*,Алеф, КММ Архимедес 1997.

[3] Миољуб Исаиловић, *Збирка решених задатака за редовну и додатну наставу у 7. разреду основне школе*, Графика Шабац 2004.

[4] Сајт *www.matematikaos.blogspot.com*

Предавање 59

Многоугао

Невена Николић, Математичка гимназија

Међу људима једнаких умних способности, који раде под истим условима, у предности су они који знају геометрију. Б. Паскал

59.1 Теоријски увод

Дефиниција 100. Многоугао је део равни ограничен затвореном, изломљеном линијом, укључујући и тачке са те линије.

Дефиниција 101. Ако дуж која спаја било које две тачке на изломљеној линији не сече ниједну страницу многоугла, онда је то конвексан многоугао.

Дефиниција 102. Правилан многоугао је онај који има међусобно подударне странице и унутрашње углове.

Теорема 137. (Птоломејева теорема) Ако је $ABCD$ тетивни четвороугао, важи следеће $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$.

59.2 Задаци за рад

Задатак 753. Тетивни дванаестоугао се састоји од шест страница дузхине $\sqrt{3}$ и шест страница дужине 4. Израчунати површину тог дванаестоугла.

Решење: Површина тог дванаестоугла садржи 6 троуглова типа $R, R, \sqrt{3}$ и 6 троуглова типа $R, R, 4$ (Р је полупречник описане кружнице око дванаестоугла). Како његова површина не зависи од распореда ових троуглова, претпоставимо, не умањујући општост, да су му суседне странице различите дужине. Означимо темена многоугла са $A_1, A_2, \dots A_{12}$, а центарописаног круга са O. Тада су троуглови $A_1A_3, A_3A_5, A_5A_7, A_7A_9, A_9A_{11}, A_{11}A_1$ подударни међу собом, као и троуглови $A_1A_2A_3, A_3A_4A_5, A_5A_6A_7, A_7A_8A_9, A_9A_{10}A_{11}, A_{11}A_{12}A_1$. Угао код темена O у првој групи троуглова је $60°$, а туп угао у дгугој групи троуглова је $150°$. Сада се лаком рачуницом добија површина од $\frac{105\sqrt{3}}{2}$.

Задатак 754. Дат је правилан седмоугао странице 1. Доказати да је $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1$

Решење: Продужимо странице AB и DC до пресека у тачки X. Како је $AHDF$ ромб (јер је $AH||DF$, $DH||FA$ и $AF = DF$), и како је $AC = AF$, то је $AC = AH$. Из сличности троуглова HBC и HAD, имамо $\frac{BC}{AD} = \frac{BH}{AH}$,тј. $\frac{1}{AD} = \frac{AH-1}{AH} = \frac{AC-1}{AC}$, одакле следи тврђење задатка.

Задатак 755. У квадрату $ABCD$ дата је тачка P таква да је $AP = 1, BP = 2, CP = 3$. Одредити угао APB.

Решење: Ротацијом равни око B која пресликава A у C, тачка P прелази у Q. При томе је $PB = QB$ и угао PGB једнак је $45°$. Како је $PC^2 = 9 = 1 + 4 + 4 = PA^2 + PB^2 + BQ^2 = CQ^2 + PQ^2$, троугао PQC је правоугли и угао PQC је прав. Па следи да је тражени угао $135°$.

Задатак 756. Дат је произвољан многоугао. Доказати да се овај многоугао може покрити кругом чији је пречник подударн оловини обима датог многоугла.

Решење: Одредимо на многоуглу тачке и B које полове обим датог многоугла. Конструишимо круг k коме је центар средиште O дужи AB, а пречник једнак s ($2s$ је обим многоугла). Претпоставимо да постоји неко теме C многоугла које је ван круга, тј. да је $OC > \frac{s}{2}$. У троуглу ABC је $2 \cdot OC < (AC + BC)$, па како је $AC + BC \leqslant s$ следи да је $2 \cdot OC < s$. Контрадикција.

Задатак 757. Извршена је триангулација тетивног n-тоугла. Доказати да збир полупречника уписаних кругова у добијене троуглове не зависи од начина триангулације.

Решење: За решавање проблема потребна нам је следећа лема:

Лема 15. за ошроугли троугао ABC важи $OA_1 + OB_1 + OC_1 = R + r$; за тупоугли троугао ABC са тупим углом код темена C важи $OA_1 + OB_1 - OC_1 = R + r$ где је R- полупречник описаног, r-полупречник уписаног круга, A_1, B_1, C_1 подножја нормала из O-центар описаног круга,на странице троугла.

Доказ: (за оштроугли троугао, за тупоугли се доказује на исти начин) применимо Птоломејеву једнакост на тетивне четвороуглове AC_1OB_1,

BC_1OA_1, CB_1OA_1. Добијамо; $c\cdot OB_1+b\cdot OC_1=R\cdot a$, $c\cdot OA_1+a\cdot OC_1=R\cdot b$, $a\cdot OB_1+b\cdot OA_1=R\cdot c$. Када саберемо леве и десне стране ових једнакости и левој додамо $OA_1\cdot a+OB_1\cdot b+OC_1\cdot c$, а десној $2s\cdot r$ (што је једнако) добијамо $(OA_1+OB_1+OC_1)\cdot s=(R+r)\cdot s$. Овим је доказ завршен. Нека је O центар описане кружнице око многоугла, самим тим O је и центар описане кружнице за све троуглове. Означимо темена са $A_1, A_2, ..., A_n$ и растојања тачке O од страница $A_1A_2, A_2A_3..., A_nA_1$, редом, са $d_1, d_2, ..., d_n$. Сада изаберимо произвољну дуж A_iA_j након триангулације, она је страница тачно два троугла добијена троугла, нека су то $A_iA_sA_j$ и $A_iA_rA_j$. Ако A_iA_j садржи O тада након примене леме добијамо: $r_1+r_2=d_j+d_i+d_r+d_s-2R$, ако не садржи O онда се O налази унутар једног и ван другог троугла. Ако је d растојање тачке O од дужи A_iA_j тада се у једном изразу налази као сабирак са десне стране, а у дугом изразу као умањилац, па се приликом сабирања поскрати, тада добијамо $r_1+r_2=d_j+d_i+d_r+d_s-2R$ што је исти израз. Када просумирамо све овако добијене р-ове, финални израз изгледа овако: $d_1+d_2+...+d_n-(n-2)R=r_1+r_2+...+r_{n-2}$, дакле не зависи од начина триангулације.

Задатак 758. Да ли можемо прекрити једнакостранични троугао странице 30 дисјунктним једнакокраким трапезима страница 1, 1, 1 и 2?

Решење: Можемо, јер се једнакостранични троугао странице 30 може поделити на 100 једнакостраничних троуглова странице 3, а такви троуглови се могу прекрити са три дата трапеза.

Задатак 759. Сва темена конвексног многоугла налазе се у унутрашњости квадрата чија је страница дужине 1. Доказати да је збир квадрата дужина страница тог многоугла мањи од 4.

Решење: Нека су M и N темена многоугла, тако да трака одређена правим m и n, које су паралелне страницама AD и BC покрива цео многоугао. Нека је a_i једна страница ђоње"изломљене линије многоугла између M и N и x_i и y_i нормалне пројекције дужи a_i на странице AB и AD. Нека је a_j једна страница "горње"изломљене линије многоугла између M и N и z_j и t_j нормалне пројекције дужи a_j на странице BC и CD. Према Питагориној теореми добијамо $a_i^2=x_i^2+y_i^2$ и $a_j^2=z_j^2+t_j^2$. Узимајући у обзир све странице многоугла добијамо $\sum a_i^2=\sum x_i^2+\sum y_i^2+\sum z_i^2+\sum t_i^2$. Како су све пројекције мање од 1, то су њихови квадрати мањи од самих њихових дужина, па је: $\sum a_i^2<\sum x_i+\sum y_i+\sum z_i+\sum t_i \leqslant 1+1+1+1=4$

Задатак 760. Дат је правилан шестоугао $ABCDEF$ странице дужне . Користећи само лењир конструисати дуж дужине $\frac{a}{n}$, за $n=1,2,3....$

Решење: Конструишимо пресеке K и L правих BC и AC редом са правом DE, затим пресек M правих AB и CD и најзад пресеке N и O правих ML и AD, редом, са правом CF. Лако се доказује да је

$BMNKDO$ такође правилан шестоугао странице и да је $FN = 3FO = 3a$. Настављајући овај поступак можемо, за дати природан број n, одредити на правој FO тачку S тако да је $FS = nFO = na$. Ако је T пресек правих ES и OD, из сличности троуглова FSE и OST добијамо да је $TD = \frac{1}{n}a$.

Задатак 761. Нека је D скуп дијагонала правилног 100-угла. Да ли постоји подскуп E скупа D са следећа три својства:

1° Никоје две дијагонале немају заједничких тачака.
2° Из сваког темена 100-угла полази паран број дијагонала из скупа E.
3° Дијагонале из E деле 100-угао на троуглове.

*Решење:*Претпоставимо да је n-тоугао подељен дијагоналама из D на троуглове тако да никоје две од дијагонала скупа D немају заједничку унутрашњу тачку и да из сваког темена n-тоугла полази паран број дијагонала, Тада се добијени троуглови могу обојити плавом и црвеном бојом, тако да су свака два троугла који имају заједничку страницу обојени различитим бојама. (То се може постићи тако што се полигон на почетку обоји једном бојом, а после се повлаче дијагонале једна за другом и након сваког повлачења дијагонале све обојене површине са једне стране дијагонале се префарбају оном другом бојом).

За тако обојене троуглове важи да је свака дијагонала страница једног плавог и једног црвеног троугла и да сви троуглови код којих је једна страница истовремено и страница n-тоугла обојени су истом бојом, рецимо плавом (То следи из чињенице да из сваког темена н-тоугла полази паран број дијагонала из D, тј. да је свако теме n-тоугла заједничко теме непарног броја троуглова на које је н-тоугао подељен.)

АКо је p плавих а c црвених тоуглова онда је $n+3c = 3p$, јер је свака дијагонала из D страниа само једног плавог троугла. Према томе, број n је дељив са три, а то значи да се 100-угао не може поделити на троуглове дијагоналама тако да важе задати услови.

Задатак 762. Нека су AB и BC суседне странице правилног деветоугла уписаног у круг чији је центар тачка O. Са M означимо средиште странице AB, а са N средиште полупречника OX који је нормалан на BC. Доказати да је угао OMN једнак 30°.

Решење: Угао АОШ једнак је 60°, па је троугао AOX једнакостранични. У њему је AN висина па је угао ANO прав, као и угао AMO. Следи да је четвороугао $AONM$ тетивни, одакле је угао $\angle OMN = 30°$.

Задатак 763. Одредити највећу могућу површину троугла који је уписан у правилан шестоугао површине S, тако да је једна страница троугла паралелна страници шестоугла.

Решење: Нека је $ABCDEF$ правилан шестоугао странице 1 и нека су X и Y редом тачке на страницама AF и BC, тако да важи $AX = BY = x$, а Z произвољна тачка на страници ED. Тада важи $XY = 1+x$, а висина троугла XYZ која одговара страници XY је $h = \sqrt{3} - x\frac{\sqrt{3}}{2}$, па је површина троугла једнака $\frac{\sqrt{3}}{4}[\frac{9}{4} - (x - \frac{1}{2})^2]$ и има маш вредност за $x = \frac{1}{2}$. $P = \frac{9\sqrt{3}}{16}$, како је $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, следи $P_{max} = \frac{3S}{8}$.

59.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 764. У круг је уписан седмоугао чија су три угла једнака $120°$. Доказато да су бар две странице овог седмоугла једнаке.

Задатак 765. У четвороуглу $ABCD$ је тачка M средиште странице AB и тачка N средиште странице CD. Ако је $BC + AD = 2MN$ и AB није паралелно са CD, онда је четвороугао $ABCD$ трапез. Доказати.

Задатак 766. На страници AB квадрата $ABCD$ дата је нека тачка M. Симетрала угла CDM сече BC у тачки N. Доказати да је $DM = AM + CN$.

Задатак 767. У квадрату $ABCD$ дата је тачка P таква да је $AP : BP : CP = 1 : 2 : 3$. Одредити угао APB.

Задатак 768. Дат је правилни 10-оугао уписан у кружницу са центром O и полупречником r. Ако су A, B, C узастопна темена десетоугла доказати да је $AD - AB = r$.

Литература

[1] З. Каделбург, П. Младеновић, *САВЕЗНА ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ*, Београд 1990.

[2] ДМС, *1000 ЗАДАТАКА*, Материјали за младе математичаре свеска 39, Београд 2006.

[3] В. Стојановић, *МАТЕМАТИСКОП 3*, Београд, 1988

[4] В. Драговић, Ђ. Дугошија, П. Младеновић *Републичка и савезна такмичења из математике*, Материјали за младе математичаре свеска 39, Београд 2002.

Предавање 60

Рачунање и докази у геометрији (Питагорина теорема)

Стефан Бауа, Математичка гимназија

60.1 Теоријски увод

Теорема 138. Питагорина теорема - Површина квадрата над хипотенузом правоуглог троугла једнака је збиру површина квадрата над катетама тог троугла.

Доказ: Коструишимо два подударна квадрата $CDFH$ и $C_1D_1F_1H_1$ чије странице $CD = C_1D_1 = a+b$. Троуглови $ABC, BDE, EFG, GHA, OB_1A_1, B_1D_1A_1, OG_1H_1, OE_1H_1$ су подударни по СУС, где је O пресек дужи $G_1B_1iA_1E_1$. Четвороугао $ABEG$ је квадрат, квадрат над хипотенузом c, јер је $AB = BE = EG = GA = c$ (хипотенуза правоуглог троугла ABC). $\angle DBE + \angle EBA + \angle ABC = 180°$, $\angle DBE + \angle ABC = 90°$, онда је $\angle EBA = 90°$. Ако тачке на квадрату $H_1F_1D_1C_1$ рапоредимо тако да важи : $C_1B_1 = a, B_1D_1 = b, D_1A_1 = a, A_1F_1 = b, F_1G_1 = b, G_1H_1 = a, H_1E_1 = b$ и $E_1C_1 = a$ добијамо одговарајћу подударност и релацију $a^2 + b^2 = c^2$, чиме смо доказали теорему.

60.2 Задаци за рад

Задатак 769. Израчунати обим и површину правоугаоника ако су дате дијагонала и једна страница.

Решење: Нека је a једна страница правоугаоника и d дијагонала. Другу страницу ћемо наћи преко Питагорине теореме $b^2 = d^2 - a^2$.

Обим правоуганика $O = 2 \cdot a + 2 \cdot \sqrt{d^2 - a^2}$, површина $P = a \cdot \sqrt{d^2 - a^2}$.

Задатак 770. Дат је једнакокраки троугао ABC. Израчунати обим и површину троугла је дата основица a и одговарајућа висина h.

Решење: Користећи Питагорну теорему ћемо одредити крак троугла $b^2 = \frac{a^2}{4} + h^2$. Површина троугла је $P = \frac{a \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}}{2}$, а обим $O = a + 2 \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2}$.

Задатак 771. Израчунати висину, површину, полупречник уписане и полупречник описане кружнице јенакостраничног троугла странице a.

Решење: Висина троугла је $h = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, површина $P = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$, полупречник уписане кружнице $r = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}$, описане $R = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задатак 772. Странице паралелограма су a и b, а оштар угао $60°$. Одредити дужине дијагонала.

Решење: Нека је тачка O преске дијагонала $ACiBD$, где је AC краћа дијагонала, из тога да је угао $60°$ закључујемо да се радио о ромбу. Применом Питагорине теореме на на правоугле троуглове са правим углом у тачки O добијамо да је $d_1 = a, d_2 = 2 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задатак 773. Хеликоптер путује од базе S под углом од $74°$ $112km$ до станице A. Након тога иде под углом од $164°$ до станице B. Које је растојање од станице B до базе?

Решење: Пошто се сви углови односе на исти правац закључујемо да се радио о углу од $90°$. Према Питагориној теореми $x^2 = 112^2 + 134^2$, дакле $x = 175km$

Задатак 774. Два круга имају заједничку тангенту са тачкама додира A и B. Полупречници кругова су $4cm$ и $2cm$. Наћи растојање између центара кругова ако је $AB = 7cm$.

Решење: Нека су C и D центри кругова, нека је тачка E нормала из C на полупречник DA. $DE = 4 - 2$ $CE = 7cm$ из Питагорине теореме $x^2 = 2^2 + 7^2$ $x = 7.3cm$.

Задатак 775. Нека је a дужина странице квадрата. Одредити растојање од једног темена квадрата до велике дијагонале квадрата.

Решење: Дужина велике дијагонале $AG = a \cdot \sqrt{3}$. Посматрајмо троугао ABG, тражена вредност је висина тог троугла, $x = \frac{a \cdot a \cdot \sqrt{2}}{a \cdot \sqrt{3}}$.

Задатак 776. Тачка M је средиште странице BC квадрата $ABCD$. Нека је S тачка унутар квадрата са особином да је S једнако удаљено од тачака A, D и M. Ако је страница квадрата $AB = 40cm$, израчунати обим и површину четвороугла $ABMS$.

Решење: Нека је $SM = SA = SD = x$ и нека је N средиште странице AD. Тада је $SN = 40 - x$. Из правоуглог троугла ASN је по питагориној теореми, $x^2 = (40 - x)^2 + 20^2$. Одавде је $80 \cdot x = 2000$ и $x = 25cm$. Обим трапеза $ABMS$ је тада $O = 110cm$, а површина $P = 650cm^2$.

Задатак 777. У правоуглом троуглу ABC хипотенуза $c = 20cm$, полупречник круга уписаног у троуглу је r и поплупречник круга описаног око троугла је R. Ако је $r : R = 2 : 5$, одредити обим и површину тог троугла.

Решење: Хипотенуза c правоуглог троугла једнака је $2R$, па је $R = 10cm$. Како је $r : R = 2 : 5$, то је $r = 4cm$. С друге стране $c = a - r + b - r$, што значи да је $a + b = c + 2 \cdot r = 28cm$. Одавде следи да је $(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = 28^2 = 784$. Како је $a^2 + b^2 = c^2 = 400$, то значи да је $2 \cdot a \cdot b = 784 - 400 = 384$. Дакле површина троугла је $P = \frac{2 \cdot a \cdot b}{4} = \frac{a \cdot b}{2} = 96cm^2$. обим тог троугла је $O = a + b + c = 48cm$.

Задатак 778. Полазећи из тачке O пуж најпре крене $1m$ на север, па $1m$ на запад, потом $2m$ на југ, па $2m$ на исток, затим $3m$. на север, па $3m$ на запад, даље $4m$ на југ, па $4m$ на исток, итд. Свака два наредна праволинијска потеза су за по $1m$ дужа од претходна два. Свако скретање се врши улево под правим углом. Колико најмање пута траба пуж да крене на север да би се од тачке O удаљио за више од $100m$?

Решење: После n-тог потеза на запад, пуж се налази на растојању $n \cdot \sqrt{2}m$ од тачке O (на позицији која се у односу на тачку O налази на супротном крају дијагонале квадрата са страницомn). Како потезу на запад претходи потез на север, довољно је наћи најмањи природан ројn за који је $n \cdot \sqrt{2} > 100$ тх. $2n^2 > 1000$. Лако налазимо да је тразени број $n = 71$

60.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 779. Доказати Питагорину теорему користећ сличност.

Задатак 780. Посматрач види објекат (дуж) АБ из две тачке Ц и Д међу којима је растојање 300 м под угловима од 30° . Праве AD и BC су међусобно нормалне. Колика је дӯжина објекта AB?

Задатак 781. Нормале констуисане из темена B и D правоугаоника на дијагоналу AC, деле дијагоналу на три једнака дела. Ако је дужина једне странице правоугаоника , колика је дужина друге странице правоугаоника?

Задатак 782. Врт има облик правоугаоника са теменимаA, B, C, D. У врту је чесма која је од темена A удаљена $14cm$, а од темена B удаљена $4cm$ и од темена C удаљена $12cm$. Колико је чесма удаљена од темена D ?

Задатак 783. Око једнакокраког троугла, чија је основица $48cm$, а крак $40cm$, описан је круг. Одредити полупречник тог круга.

Литература

[1] С. Огњановић, *Математика* 10+, 2007.

[2] Хасе и Харис публикације, *Pythagoras theorem* 2008.

Предавање 61

Једнакости површина

Раде Шпегар, Математичка гимназија

61.1 Теоријски увод

Дефиниција 103. $S_{A_1A_2...A_n}$ је површина многоугла $A_1A_2...A_n$

Теорема 139. [Херон] Површина троугла ABC је једнака $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ где је p полуобим троугла.

Теорема 140. [Брахмагупта] Ако је четвороугао $ABCD$ тетиван онда му је површина једнака $S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ где је p полуобим цетвороугла.

61.2 Задаци за рад

Задатак 784. Доказати да је сума дужина нормала било које унутрашње тачке једнакостраничног троугла на његове странице константна.

Решење: Назовимо ову тачку M. Нека су подножја висина на странице AB, BC, CA дужине x, y, z респективно. Сада је $S_{ABC} = \frac{AB \cdot x + BC \cdot y + CA \cdot z}{2} = \frac{a}{2} \cdot (x+y+z) = a^2\frac{\sqrt{3}}{2}$ па је $(x+y+z) = a\sqrt{3}$ што не зависи од положаја тачке M.

Задатак 785. Ако је тачка X у унутрашњости паралелограма АБЦД. Доказати да је: $S_{ABX} + S_{CDX} = S_{BCX} + S_{ADX}$

Решење: Из X повуцимо нормале на странице паралелограма и то на AB, BC, CD, DA нека су њихове дужине респективно m, n, p, q.

$S_{ABX} = \frac{AB \cdot m}{2}$, $S_{CDX} = \frac{CD \cdot p}{2}$ при чему је $AB = CD$ и $m+p$ дужина висине паралелограма нормалне на AB. Сада је $S_{ABX} + S_{CDX} = \frac{S_{ABCD}}{2}$, аналогно добијамо да је и $S_{BCX} + S_{ADX} = \frac{S_{ABCD}}{2}$ чиме је доказ завршен.

Задатак 786. На свакој страници паралелограма изабрана је тачка. Површина четвороугла са теменима у овим тачкама је пола површине паралелограма. Доказати да је бар једна дијагонала четвороугла паралелна страници паралелограма.

Решење: Нека су на страницама паралелограма AB, BC, CD, DA тачке K, L, M, N респективно. Нека дијагонала KM није паралелна страници AD. Фиксирајмо тачкеK, M, N и померајмо L дуж станице BC. У складу са овим померањем површина троугла KLM се мења стриктно монотоно. Осим тога, ако је $LN||AB$ онда је $S_{KLMN} = \frac{S_{ABCD}}{2}$ па то важи само у том случају.

Задатак 787. Доказати да тежишне дужи деле сваки троугао на 6 троуглова једнаких површина.

Решење: Нека су подножја тежишних дужи из A, B, C респективно A_1, B_1, C_1 и тежисте T. Сада је $S_{ATC_1} = SC_1TB$, а аналогно $S_{BTA_1} = SA_1TC$ и $S_{CTB_1} = SB_1TA$ јер имају заједничку нормалу и једнаке основе. Из истог разлога је $SACC_1 = S_{BCC_1}.SACC_1 - S_{ATC_1} = S_{BCC_1} - SC_1TB$ па је $2S_{BTA_1} = 2S_{CTB_1}$ одакле аналогно добијамо да су свих 6 површина једнаке.

Задатак 788. Наћи тачку П у унутрашњости троугла АБЦ тако да је $S_{ABP} = S_{BCP} = S_{CAP}$.

Решење: Троуглови ABP и CAP имају заједничку страницу AP па како су им површине једнаке то су им онда једнаке и висине на страницу AP. Продужимо AP до пресека са BC и назовимо тачку пресека A_1, а подножја висина из B и C на AP, B' и C'. $BB' = CC'$. Из УСУ добијамо да је $\triangle BB'A_1$ конгруентан $\triangle CC'A_1$ одакле је $BA_1 = CA_1$ па је AP тежишна дуж $\triangle ABC$. Аналогно добијамо да су и BP и CP тезхишне дужи па је P тежиште $\triangle ABC$.

Задатак 789. Доказати да троугао чије су дужине страница једнаке дужинама тежишних дужи $\triangle ABC$ има површину једнаку $\frac{3}{4}S_{ABC}$

Решење: Нека су A', B', C' средишта страница BC, CA, AB респективно. Конструишемо тачку M тако да је $BCMC'$ паралелограм. Сада су такође $AC'CM$ и $BB'MA'$ такође паралелограми јер је $AM = CC'$ и $A'M = BB'$. Па је троугао одређен са тежишним дужима у ствари

$\triangle AA'M$.Нека је N пресек правих $B'C'$ и AA'. Пошто је $AC'A'B'$ паралелограм имамо да је $C'N = B'N = \frac{1}{2}B'M$ па је B' тежиште $\triangle AA'M$. Одавде следи да је $S_{AA'M} = 3S_{AA'B'} = \frac{3}{2}S_{AA'C} = \frac{3}{4}S_{ABC}$

Задатак 790. Ако је тетиван троугао има површину S и полуобим p. Доказати да ако је $S = (\frac{p}{2})^2$ онда је четвороугао квадрат.

Решење: Како је четвороугао тетиван то је онда $S = \sqrt[4]{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \frac{p}{2}$. Из неједнакости између аритметичке и геометријске средине добијамо $\sqrt[4]{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \leq \frac{p-a+p-b+p-c+p-d}{4} = p/2$ при чему једнакост важи само за $p-a = p-b = p-c = p-d$, односно $a = b = c = d$ па је четвороугао ромб. Како збир наспрамних углова мора бити 180^o то је онда тражени четвороугао ромб.

Задатак 791. Дат је троугао ABC и тачка P у његовој унутрашњости нека су h_a, h_b, h_c дужине висина из A, B, C троугла ABC респективно и нека су x, y, z дужине нормала из P на странице BC, AC, AB респективно. Доказати да је $\frac{x}{h_a} + \frac{y}{h_b} + \frac{z}{h_c} = 1$

Решење: $\frac{x}{h_a} = \frac{S_{BCP}}{S_{ABC}}, \frac{y}{h_b} = \frac{S_{CAP}}{S_{ABC}}, \frac{z}{h_c} = \frac{S_{ABP}}{S_{ABC}}$, сабирањем ове три једнакости добијамо тражену.

Задатак 792. Изразити полупречник уписаног круга r троугла ABC преко дужина страница a, b, c.

Решење: Нека је центар уписаног круга И. Важи да је $S_{AIB} = \frac{c \cdot r}{2}, S_{BIC} = \frac{a \cdot r}{2}, S_{CIA} = \frac{b \cdot r}{2}$ па је због $S_{ABC} = S_{AIB} + S_{BIC} + S_{CIA}$ одакле је $\frac{r \cdot (a+b+c)}{2} = S_{ABC}$ односно $rp = S$. Из Хероновог обрасца добијамо да је $r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$ где је $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Задатак 793. Нека су тачке A_1, B_1, C_1 и D_1 тачке на продужецима страбица AB, BC, CD и DA конвексног четвороугла АБЦД, такве да су A, B, C и D средишта страница DA_1, AB_1, BC_1 и CD_1, респективно. Доказати да је површина четвороугла A_1, B_1, C_1, D_1 пет пута већа од површине $ABCD$.

Решење: $A_1A = AD$ и $D_1D = DC$, $S_{D_1A_1A} = S_{D_1AD} = S_{CAD}$. Сличо $S_{B_1C_1C} = S_{B_1CB} = S_{ACB}$. Па је $SD_1A_1D + S_{B_1C_1B} = 2S_{ABCD}$. Слицно и $SA_1B_1A + S_{C_1D_1C} = 2S_{ABCD}$, тако да имамо $S_{A_1B_1C_1D_1} = 5S_{ABCD}$.

61.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 794. Свака дијагонала конвексног четвороугла полови површину четвороугла. Доказати да је четвороугао паралелограм.

Задатак 795. Нека су A_1, B_1, C_1 тачке на страницама BC, AC, AB троугла ABC такве да је $BA_1 : A_1C = 1 : 2$, $CB_1 : B_1A = 1 : 2$, $AC_1 : C_1B = 1 : 2$ одредити однос површина троугла одређеног правама AA_1, BB_1, CC_1 и троугла ABC.

Задатак 796. Нека су K, L, M, N средишта страница AB, BC, CD и DA, четвороугла $ABCD$, респективно. Дузи KM и LN се секу у O. Доказати да важи:$S_{AKON} + S_{CLOM} = S_{BKOL} + S_{DNOM}$

Задатак 797. Ако је $ABCD$ конвексан четвороугао и P пресек дијагонала. Доказати да је $S_{PAB} + S_{PCD} = S_{PBC} + SPAD$ ако и само ако је P средиште AC или BD

Задатак 798. $ABCD$ је јединични квадрат, а P је тачка на BC тако да је уписан круг $\triangle APB$ конгруентан кругу тангентном дузима PC, AP и CD. Наћи полупречник ових кругова.

Литература

[1] В. Прасолов, *Problems In Plane And Solid Geometry*

[2] A. Cherney, A. Liu, *Soviet Union Mathematical Olympiad 1961 1968*, Intuitive Mathematics Press 2003.

[3] T. Andreescu, D. Andrica, *360 Problems for Mathematical Contests*, GIL Publishing House 2003.

[4] *www.mathlinks.ro*

Део VI

Предавања за 6. разред

Предавање 62

Елементарна геометрија 1 (подударност)

Лазар Арсић, Математичка гимназија

62.1 Ставови о подударности

Два троугла су подударна ако:

Став 1. Ако су им једнаке све странице (став ССС).

Став 2. Ако су им међусобно једнаке одговарајуће две странице троугла и угао захваћен њима (став СУС).

Став 3. Ако им је једнака једна страница троугла и оба угла налегла на њу (став УСУ).

Став 4. Две странице троугла и угао наспрам једне од њих је једнак одговарајућим страницама и углу другог троугла и оба троугла су или тупоугли, или оштроугли, или правоугли (став ССУ).

62.2 Задаци за рад

Задатак 799. Доказати да је тежишна линија хипотенузе једнака половини исте.

Решење: Нека је прав угао код темена A у троуглу ABC и средина хипотенузе M. Сада нека је подножје нормале из M на веци крак AC тачка N. Тада је $MN \| AB$ па је MN средња линија. Одатле се добија $AN = NC$ па сада знамо да је $\triangle AMN \cong \triangle MNC$ (СУС) па је $AM = MC$. Сада знамо још и да су троуглови на које дели правоугли троугао хипотенузина тежишна линија једнакокраки и то можемо користити у будућим задацима.

Задатак 800. На хипотенузи BC правоуглог троугла ABC налазе се тачке D и E такве да је $CA = CD$ и $BA = BE$. Израчунај угао $\angle DAE$.

Решење: Означимо углове $\angle ABC$ и $\angle ACB$ са β и γ. Како су троуглови ABE и ADC једнакокраки троуглови угао
$angleAED = angleAEB = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, а $\angle ADE = \angle ADC = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Угао $\angle DAE = 180^\circ - \angle AED - \angle ADE = \frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

Задатак 801. У троуглу ABC дата је висина CE. Ако симетрала спољасњег угла код темена C сече праву AB у тачки Д и ако је $CE = \frac{CD}{2}$ доказати да је $\alpha - \beta = 60^\circ$.

Решење: Како је катета CE дупло мања од хипотенузе CD то је угао $\angle CDE = 30^\circ$. Угао $\angle CAB = \alpha$ је спољасњи па је $\angle CAB - \angle ACD = 30^\circ$ тј. $\alpha - \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 30^\circ$ односно $\alpha - \frac{\alpha+\beta}{2} = 30^\circ$. Одавде добијамо тражено $\alpha - \beta = 60^\circ$.

Задатак 802. У једнакокраком правоуглом троуглу ABC на катетама AB и AC налазе се тачке редом D и E, такве да је $AE = AD$. Нормале из A и E секу BC у K и L респективно. Доказати да је $BK = KL$.

Решење: Нека је тачка M иза A у односу на C таква да је $MA = AE$. Тада су $\triangle ADC$ и $\triangle AMB$ подударни (став СУС: $MA = AE, AC = AB, \angle BAC = \angle MAB = 90^\circ$) и могу се "пренети"један у други ротацијом око A за 90° те $CD \perp MB$ па су $MB \| AK \| EL$ и уз $MA = AE$ следи да су и BK и KL једнаке.

Задатак 803. Висине AD и CE троугла ABC секу се у тачки H, тако да је $AB = CH$. Израчунати $\angle ACB$.

Решење: Докажимо да је $\triangle HDC \cong \triangle ABD$: $\angle HDC = \angle ADB, \angle BAD = \angle ECB$ као углови са нормалним крацима, и $CH = AB$ по услову. Одавде добијамо $AD = DC$ па је $\triangle ADC$ једнакокраки правоугли и $\angle ACD = 45^\circ$ тј. $\angle ACB = 45^\circ$.

Задатак 804. У правоуглом троуглу хипотенузина висина дели хипотенузу на два одсечка чија је разлика једнака дужини једне катете. Одредити углове тог троугла.

Решење: Нека је троугао ABC, $\angle A$ прав и AB мања катета, а подноз- хје висине D. Означимо тачку Е између D и E такву да је $BD = DE$. Тада дуж EC представља разлику одсечака и једнака је AB Троуглови $\triangle ABD$ и $\triangle ADE$ су подударни (СУС) па је $\angle AED = \angle ABC = \beta$

и $AE = AB$ па је $\triangle AEC$ једнакокрак и $\angle EAC = \angle BCE = \gamma$. Угао $\angle AEB$ је спољашни за $\triangle AEC$ па је $\beta = 2\gamma$ и још $\beta + \gamma = 90°$ одакле се добија $\angle ABC = 60°$ и $\angle ACB = 30°$.

Задатак 805. У троуглу ABC је $AC = BC$. На правој AC иза A у односу на C узета је нека тачка D. Нека је тачка E на краку BC таква да је $AD = BE$. Доказати да основица AB полови дуж DE.

Решење: Нека је С тачка пресека AB и DE, а F таква да је $EF \| AC$. $\triangle EFB$ је такође једнококраки па је $EF = EB$. Сада је $\triangle ADS \cong \triangle FES$ ($\angle ASD = \angle ESF$ као унакрсни, остала два угла су им са паралелним крацима и $EF = AD$) одакле добијамо $DS = SE$.

Задатак 806. Утроуглу ABC је $\beta = 15°, \gamma = 30°$. Права која пролази кроз A и нормална је на AB сече страницу BC у тачки D. Доказати да је $BD = 2AC$.

Решење: Троугао ABD је правоугли и нека је тачка E средиште његове хипотенузе. По задатку 1 троугао $\triangle ABE$ је једнакокраки па је $AE = BE = ED = \frac{BD}{2}$ $\angle BAE = 15°$, а $\angle DAE = 30°$ као спољашњи одакле добијамо да је троугао $\triangle AEC$ једнакокраки па је $AC = AE = \frac{BD}{2}$.

Задатак 807. Један угао једнакокраког троугла је $108°$. Доказати да је одсечак симетрале угла на основици, од темена до пресека са краком два пута дужи од висине која одговара основици.

Решење: Нека је $\angle A = 108°$, H подножје висине из BAC на BC, тачка D пресек симетрале $\angle ABC$ са AC. Права AH је уједно и симетрала угла над основицом па је $\angle HAE = 54°$. Нека је E средиште DC. Тада је HE средња линија $\triangle DBC$ па је $HE \| BD$ и $\angle AHE = 90° - \angle EHC = 90° - \angle DBC = 90° - \frac{36°}{2} = 72°$. Сада је и $\angle AEH = 54°$ следи: $\triangle AHE$ је једнакокраки и $AH = HE = \frac{BD}{2}$ тј. $2AH = BD$.

Задатак 808. У троуглу ABC где је $AC = BC$ и $\angle ACB = 70°$ дата је тачка P таква да је $\angle BAP = 5°$ и $\angle ABP = 30°$. Израчунати $\angle BPC$.

Решење: Нека је CD висина на основицу H и пресечна тачка ове висине и праве BP. Тада је $BH = AH$ и $\angle BAH = 30°$, а $\angle HAP = 25°$. Како је $\angle CAB = 55°$, то је и $\angle CAH = 25°$. У троуглу ABP је $\angle APH = 35°$ као спољашњи угао. Сем тога је $\angle ACD =$ половина од $70°$, тј. $\angle ACD = 35°$. Сада су троуглови AHP и AHC подударни (УСУ). Отуда је $AP = AC$, па је APC једнакокраки троугао и због $\angle PAC = 50°$ следи да је $\angle ACP = 65°$. Због тога је $\angle BCP = 5°$. Међутим, знамо да је $\angle PBC = 25°$, па је тражени угао $\angle BPC = 150°$.

62.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 809. Дата је тачка D на страници BC троугла ABC, таква да је $DC = 2BD$, $\angle ADC = 60^\circ$ и $\angle ABC = 45^\circ$. Израчунати остале унутрашње углове троугла ABC.

Задатак 810. У троуглу ABC је $AB = AC$ и $\angle CAB > 30^\circ$. На страници BC је дата тачка M и на страници AC тачка N, тако да је $\angle BAM = 30^\circ$ и $AM = AN$. Израчунати $\angle CMN$.

Задатак 811. Израчунати углове троугла ако се зна да висина, симетрала угла и тежишна линија из истог темена деле угао код тог темена на 4 једнака дела.

Задатак 812. Један оштар угао правоуглог троугла је пет пута већи од другог. Доказати да је онда хипотенуза четири пута већа од своје висине.

Задатак 813. Симетрале углова ABC и ACB троугла ABC секу се у тачки O. Права п која садржи тачку O и паралелна је са BC, сече страницу AB у тачки P и страницу AC у тачки Q. Доказати да је $PQ = BP + CQ$.

Литература

[1] В. Стојановић, *Водич за шампионе*, Матхематископ, Београд 2004.

[2] В. Андрић, И. Томић, Р.Ковачевић *Подударност троуглова и примене*, електронско издање.

[3] В.В. Прасолов, *Problems in plane and solid geometry*, електронско издање.

Предавање 63

Елементарна геометрија 2 (подударност)

Лазар Арсић, Математичка гимназија

63.1 Теоријски увод

Теорема 141. Код троугла важи:

Све висине троугла се секу у једној тачки (ортоцентар);
Све симетрале унутрашњих углова секу се у једној тачки (центар уписаног круга);
Све симетрале страница секу се у једној тачки (центар описаног круга);
Све тежишне линије троугла секу се у једној тачки (тежиште);
Тежиште дели сваку тежишну линију тако да је одсечак од темена до тежишта двапут већи од одсечка од тежишта до средишта наспрамне странице.

Теорема 142. Код паралелограма важи:

Наспрамне странице су паралелне;
Наспрамне странице су једнаке;
Наспрамни углови су једнаки;
Суседни углови су суплементни;
Дијагонале се полове;
Важи и обрнуто. То јест ако у неком четвороуглу важи неко од ових својства онда је тај четвороугао паралелограм.

Дефиниција 104. Паралелограм са свим једнаким страницама назива се ромб.

Теорема 143. Код ромба су:

дијагонале нормалне;
дијагонале су му уједно и симетрале углова;
у ромб можемо уписати круг.

Теорема 144. Код трапеза важи:

Две наспрамне странице су му паралелне и називају се основицама;
Средња линија трапеза је дуж ција је дужина једнака полузбиру основица, крајеви су јој на средиштима кракова и паралелна је основицама;
Одесчак средње линије између дијагонала једнак је полуразлици основица;
Око једнакокраког трапеза се може описати круг.

63.2 Задаци за рад

Задатак 814. У троуглу ABC угао код темена C је прав. Нека су тачке D и E такве да је $BD = DE = EC$. Ако је $BC = 3AC$ доказати да је $\angle AEC + \angle ADC + \angle ABC = 90°$.

Решење: Нека су тачке M и N такве да је $BCMN$ квадрат и тачка A на страници CM. Сада нека су P и Q на страници MN такве да је $MP = PQ = QN$. Троуглови DPQ и ABC су подударни (СУС) па је $\angle QDP = \angle ABC$. Такође $\triangle ADC \cong \triangle AMP$ (СУС) па је $\triangle APD$ једнакокраки и правоугли јер су му допуне до $180°$ два комплементна угла. Одавде имамо: $\angle ADC + \angle ABC = \angle ADC + \angle QDP = 90°90° - 45° = 45°$. Троугао AEC очигледно једнакокраки правоугли па је збир углова $\angle ACE + (\angle ADC + \angle ABC = 90°) = 45° + 45° = 90°$.

Задатак 815. У равни су дате тачке A, B, C, D, такве да је $AB \perp CD$ и $AC \perp BD$. Доказати да је $AD \perp BC$.

Решење: Тачка C није на AB јер био онда постојале две нормале на AB у B, BD и BC па C и D не би биле различите. Тек сада можемо из услова задатка рећи да ако посматрамо $\triangle ABC$, тачка D је ортоцентар па је и $AD \perp BC$.

Задатак 816. У једнакокраком троуглу ABC тачка M је средиште основице AB. Нека N тачка крака BC, таква да еј $MN \perp BC$ и нека је S средиште дужи MN. Доказати да је права AN нормална на правој CS.

Решење: Нека је P средиште NB. Дуж PS је средња линија па је $SP \| MB$ тј. $SP \| AB$ а како је AM уједно и висина на AB добијамо $SP \perp CM$. Сада је S ортоцентар троугла CMP па је и $CS \perp MP$ а $MP \| AN$ као средња линија(M и P су средишта) па се добије $CS \perp AN$.

Задатак 817. Дат је паралелограм $ABCD$, којем је угао код темена Б туп. Странице AB и BC су продужене преко темена B и продузхецима се одређене тачке E и F, тако да су дужи BE и BF основице једнакокраких троуглова BCE и ABF. Доказати да је троугао DEF једнакокрак.

Решење: Доказимо да је $\triangle AFD \cong \triangle CDE$: $AF = AB = DC$, $AD = BC = CE$ и $\angle DAF = \angle DAB + \angle FAB = \angle DCB + \angle BCE = \angle DCE$ јер су углови на основицама $\angle ABF$ и $\angle CBE$ једнаки као унакрсни па су једнаки и углови над основицама. Из подударности добијамо $FD = DE$ па је $\triangle DEF$ једнакокраки сто се и тражило.

Задатак 818. Дат је ромб са оштрим углом од 60° и тачке M на AB и N на BC тако да је $MB + NB = AB$. Доказати да је троугао MDN једнакостраничан.

Решење: Због угла од 60° је мања дијагонала ДБ једнака страницама ромба. Из $MB + NB = AB$ имамо $NB = AM$. Заједно са тим да је $\angle DAM = \angle DBN = 60^\circ$ имамо: $\triangle AMD \cong \triangle DBN$. Сада је $MD = DN$ и $\angle MDN = \angle MDB + \angle BDN = \angle ADM + \angle BDN$ добијамо да је $\triangle DMN$ једнакостраничан.

Задатак 819. У паралелограму $ABCD$ страница AB је двапута дужа од странице BC. Нека је тачка M средиште странице AB. Доказати да је $\angle CMD$ прав.

Решење: Нека је тачка N средиште CD. Тада су четвороуглови $AMND$ и $MBCN$ ромбови CM и DM су му дијагонале. Ове дужи су уједно и симетрале суплементних углова па је угао између њих прав.

Задатак 820. Дат је паралелограм $ABCD$. Ако су M и N седишта страница AB и CD редом нека су пресеци дужи DM и BN са дијагоналом AC тачке P и Q. Доказати да P и Q деле дијагоналу AC на три једнака дела.

Решење: Четвороугао $MBND$ је паралелограм$(MB = DN, MB \| DN)$. Сада је $DM \| NB$ тј. $DP \| NQ$, а уз услов да је N средиште DC добијамо да је NQ средња линија $\triangle DPC$ па је Q средиште PC тј. $PQ = QC$. Слицно се добија $AP = PQ$ па на крају имамо $AP = PQ = QC$.

Задатак 821. Дат је паралелограм $ABCD$ и права p која са паралелограмом има само једну заједничку тачку, теме D. Нека су M, N и O подножја нормала из редом A, B и C. Доказати да је $AM + CO = BN$.

Решење: Спустимо нормалу из C на BN. Нека је пресечна тачка те нормале са BN означена са R. Очигледно је $RCON$ правоугаоник што даје $NR = CO$. Посматрајмо троуглове ADM и BCR. Они су подударни јер су им сви углови међусобно са паралелним крацима и $AN = BC$ и сада је $RB = AM$. Mожемо закључити $BN = BR = RN = AM + CO$.

Задатак 822. Доказати да су средишта страница било ког разностраног троугла и подножје једне од висина темена једнакокраког трапеза.

Решење: Нека су M, N и P редом средишта страница AB, BC и CA и R подножје висине из C на AB. Дуз PN је редња линија троугла па је $PN \| AB$ тј. $PN \| KM$. Права PK сече праву MN јер сече AC, а MN је средња линија и паралелна са AC. Сада можемо рећи да је $KMNP$ трапез. Дуж KP је тежишна линија хипотенузе AC па је једнака $KP = PC$. Троглови CPN и NMB су подударни (ССС) па је и $MN = PC = PK$ и овај трапез је једнакокрак.

Задатак 823. Дијагонале AC и BD једнакокраког трапеза са основицом AB секу се у тачки O, тако да је $\angle AOB = 60°$. Доказати да су средишта дужи OA, OD и BC темена једнакостраничног троугла.

Решење: Троуглови ABO и CDO су једнакокраки са углом од $60°$ па су и једнакостранични. Сада су су M и P као средишта и подножај висина из B односно C.Троуглови MBC и PBC су правоугли са заједничком хипотенузом, дужи MN и PN су им тежисне линије одакле се добија $MN = \frac{BC}{2} = PN$. Дуж MP је средња линија у троуглу ODA па је $MP = \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2}$ па су све странице троугла MNP једнаке одакле добијамо да је он једнакостраничан.

63.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 824. Ако су O и S центри уписаног и описаног круга троугла ABC, доказати да је $\angle SAO = \frac{\beta-\gamma}{2}$.

Задатак 825. Дијагонале паралелограма $ABCD$ секу се у тачки O. Доказати да су центри кругова K, L, M и N описаних око троуглова AOB, BOC, COD, и DOA темена ромба.

Задатак 826. У конвексном четвороуглу $ABCD$ је $\angle ACB = 20°$, $\angle ACD = 30°$ и $\angle ADB = 40°$. Одредити $\angle BAC$ ако је $AD = BD$.

Задатак 827. У паралелограму $ABCD$ на страници AB је дата тачка K, тако да је $\angle AKD = \angle DKC$. Ако је тачка S средиште дужи KD, доказати да је дуж CS нормална на дуж DK.

Задатак 828. На једној гусарској карти пише:
"На острву се налазе бор, палма и чемпрес. Пођи од бора према чемпресу и броj кораке, од чемпреса се окрени удесно за 90° и иди исти толики број корака. Ту постави знак. Затим поново пођи од бора али према палми и број кораке, када дођеш до палме скрени за 90° улево и иди јос толико корака. Ту постави други знак. Копај на средишту између знакова и наћи ћеш благо."
Наш гусар је дошао на острво али бора од кога се креће није било. Али уз мало геометрије он је ипак нашао благо. Како је успео?

Литература

[1] В. Стојановић, *Водич за шампионе*, Матхематископ, Београд 2004.

[2] В. Андрић, И. Томић, Р.Ковачевић *Подударност троуглова и примене*, електронско издање.

[3] В.В. Прасолов, *Problems in plane and solid geometry*, електронско издање.

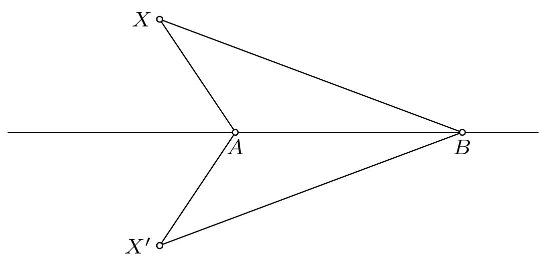
Предавање 64

Осна симетрија

Милован Мајсторовић, Математичка гимназија

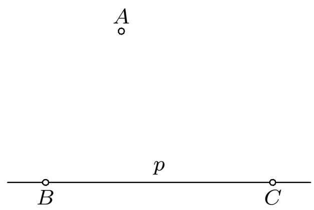
64.1 Теоријски увод

Дефиниција 105. Пресликавање у односу на праву l(означава се S_l) је изометријска трансформација која тачку X пресликава у X' тако да је l симетрала дужи XX'. Ова трансформација се такође назива осна симетрија, а l је оса те симетрије.



Дефиниција 106. Композиција две осне симетрије је паралелна транслација уколико су осе симетрије паралелне, а ротација уколико осе нису паралелне.

Теорема 145. Све фиксне тачке осне симетрије су на оси те симетрије.



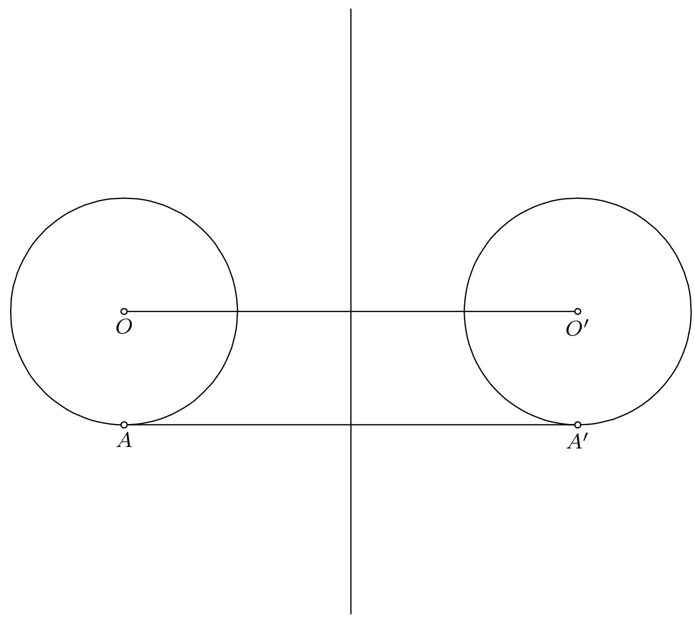
Доказ: Нека је A фиксна тачка осне симетрије S_p, са осом p. Претпоставимо супротно да A није тачка праве p. Нека су B и C произвољне тачке. B и C су фиксне тачке те осне симетрије, па би она са три фиксне тачке била коинциденција, што је контрадикција.

Дефиниција 107. Нека су p и q две праве неке равни које се секу тачки S и ω угао једнак двоструком углу оријентисаном pSq, тј. $\omega = 2\angle pSq$. Композиција $S_p \circ S_q$ назива се центална ротација или краће ротација те равни, у ознаци $R_{S,\omega}$ са центром у S, за угао ω.

64.2 Задаци за рад

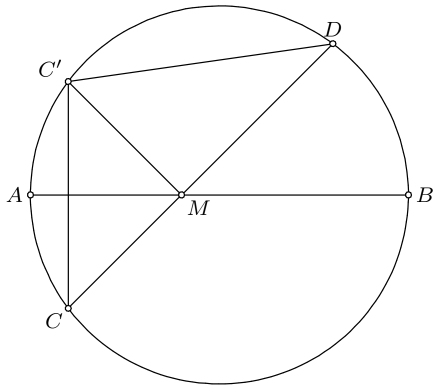
Задатак 829. Доказати да осна симетрија пресликава круг у круг.

Решење: Важи: Имамо круг k и праву l. Центар круга O ће се пресликати у неку тачку O' у односу на l. Такође нека тачка са кружнице A ће се пресликати у неку тачку A, тако да је $OA \cong O'A'$ и $OA \parallel O'A'$. Слично имамо и за остале тачке кружнице, па значи да се круг осном симетријом слика у круг са истом дужином полупречника.



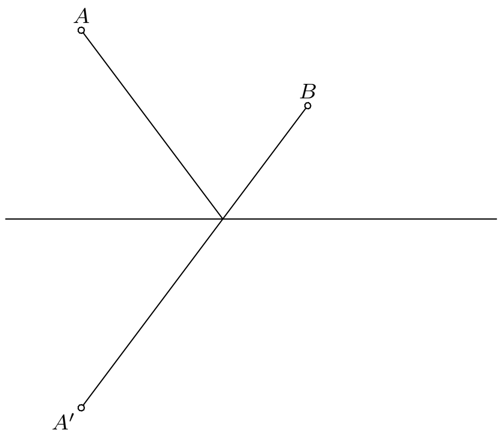
Задатак 830. Тачка M припада пречнику круга AB. Тетива CD сече AB у тачки M под углом од 45^o. Доказати да сума $CM^2 + MD^2$ је константна без обзира на избор тачке M.

Решење: Означимо тачке симетричне C и D у односу на AB C' и D' редом. Тада важи $CM^2 + MD^2 = CM^2 + MD^2 = C'D^2$. Како је угао над тетивом $C'D$ $\angle C'CD$ увек износи 45^o, без обзира на избор тачке M, следи да је $C'D$ константно, па је и сума $CM^2 + MD^2$ константна.



Задатак 831. Ако су A и B две тачке са исте стране праве p. Одредити тачку X на правој p тако да $AX + BX$ минимално.

Решење: Нека је тачка A' осно симетрична тачки A у односу на праву p. Имамо да је $AX \cong A'X$, па ће минимално растојање између A и B подударно са минималним растојањем између A' и B, следи да тачка X треба да буде у пресеку $A'B$ и праве p.



Задатак 832. Нека су a, b и c три праве неке равни. Конструисати $A \in a$ и $B \in b$ такве да је $S_c(A) = B$.

Решење: Нека је $S_c(a) = a'$. Означимо тачку пресека правих b и a' са B'. Како тачка B' има своју осно-симетричу тачку на правој a у односу на праву c(јер је тачка праве a'), па је она управо тражена тачка B, и њој симетрична у односу на праву c тачка A.

Задатак 833. Нека су p, q и r три праве равни и K и L две тачке неке равни. Конструисати праве s и s' које садрже редом тачке K и L, такве да је $S_r \circ S_q \circ S_p(s) = s'$

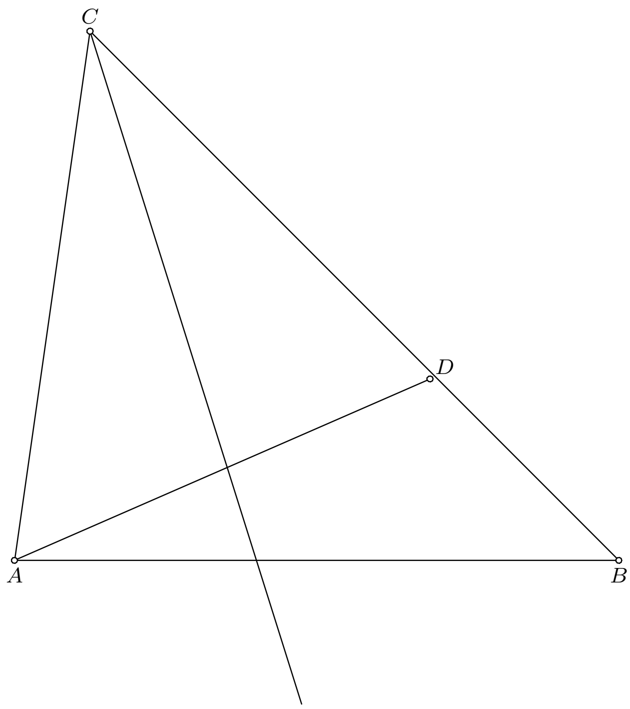
Решење: Нека је $S_r \circ Sq \circ S_p(K) = K'$ и нека је $S_p \circ Sq \circ S_r(L) = L'$. Пошто важи $S_r \circ Sq \circ S_p(s) = s'$, $S_r \circ Sq \circ S_p(KL') = K'L'$, следи с садржи тачке K и L', а s' тачке K' и L', па знамо да конструишемо s и s'.

Задатак 834. Констуисати троугао ако је дато: а) $c, a-b, \angle C$. б) $c, a+b, \angle C$

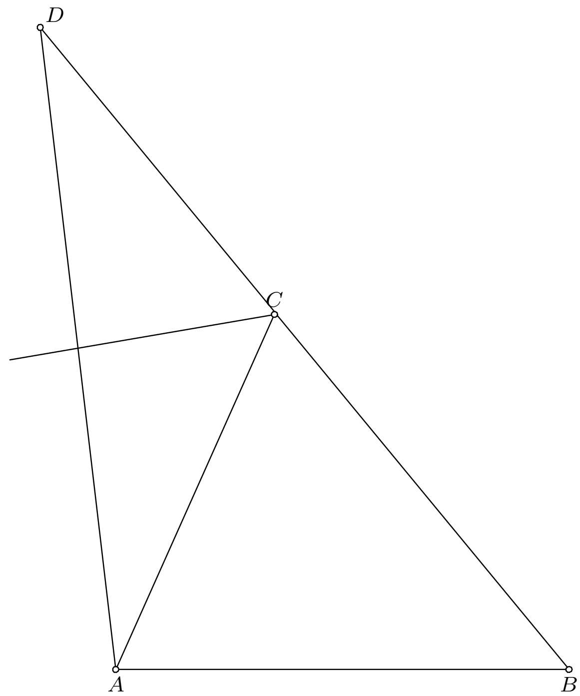
Решење: а) Претпоставимо да је троугао ABC конструисан. Нека је тачка D симетрича тачки A у односу на симетралу унутрашњег угла код темена C. Тада важи:

$\angle BDA = 180^0 - \angle ADC = 180^o - \frac{1}{2}180^o - \angle C) = 90^o + \frac{1}{2}\angle C$.

У троуглу ABD нам је познато: $AB = c$, $BD = a - b$ и $\angle ADB = 90^o + \frac{1}{2}\angle C$, па знамо да га конструишемо. Тачка C је пресек праве BD и медијатрисе дужи AD, па знамо да конструишемо троугао ABC.



б) Слично као решење под а). Нека је D тачка симетрична тачки A у односу на симетралу спољашег угла код темена C.



Задатак 835. Колики угао заклапају праве p и q ако важи:
$S_p \circ S_q \circ S_p = S_q \circ S_p \circ S_q$

Решење: Нека је тачка пресека правих p и q тачка A, а угао између њих α .Из почетне једначине добијамо:
$S_p \circ S_q \circ S_p \circ S_q = S_q \circ S_p$
$S_p \circ S_q \circ S_p \circ S_q \circ S_p = S_q$
$S_p \circ S_q \circ S_p \circ S_q \circ S_q \circ S_p = \varepsilon$
$\varepsilon = R_{A,360^o} = R_{A,2\alpha} \circ R_{A,2\alpha} \circ R_{A,2\alpha} = R_{A,6\alpha} \Rightarrow 6\alpha = 360^o \Rightarrow \alpha = 60^o$.

Задатак 836. Ако важи $S_{l_1}(l_2) = l_3$, доказати да важи $S_{l_3} = S_{l_1} \circ S_{l_2} \circ S_{l_1}$.

Решење: Нека су тачке X и Y симетричне у оносу на линију l_3, онда су $S_{l_1}(X)$ и $S_{l_1}(Y)$ су симетриче у односу на праву l_2, па важи $S_{l_1}(X) = S_{l_2} \circ S_{l_1}(Y)$, $S_{l_1} \circ S_{l_3}(Y) = S_{l_2} \circ S_{l_1}(Y) \Rightarrow S_{l_1} \circ S_{l_3}(Y) = S_{l_1} \circ S_{l_2} \circ S_{l_1}(Y)$, па важи $S_{l_1} \circ S_{l_3} = S_{l_1} \circ S_{l_2} \circ S_{l_1}$.

Задатак 837. Дате су три линије l_1, l_2 и l_3 које се секу у једној тачки и тачка A_1 на линији l_1. Конструисати троугао ABC тако да је A_1 средиште странице BC, а линије l_1, l_2 и l_3 симетрале страница троугла.

Решење: Кроз тачку A_1 права BC сече под правим углом праву l_1. Тачка A је тачка пресека правих симетричних правој BC у односу на праве l_2 и l_3. Како је $S_{l_2}(A) = C$ и $S_{l_2}(A) = B$, па знамо да конструисхемо и тачке B и C.

Задатак 838. Круг уписан у троугао ABC додирује странице тог троугла у тачкама A_1, B_1 и C_1. Тачке A_2, B_2 и C_2 су симетриче овим тачкама у односу на одговарајуће бисектрисе углова троугла. Доказати да је $A_2B_2 \parallel AB$.

Решење: Нека је тачка O центар уписаног круга у троугао ABC, и обележимо са a и b праве OA и OB. Имамо да је $S_a \circ S_b(C_1) = A_2$ и $S_b \circ S_a(C_1) = B_2$. Тачке A_2 и B_2 су добијене ротацијом тачке C_1 за супротне углове, па како је $OC_1 \perp AB$, следи $A_2B_2 \parallel AB$.

64.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 839. Нека су p и q две међусобно нормалне праве. Доказати да важи $S_q(p) = p$.

Задатак 840. Конструисати троугао ако је дато: a, b и $\angle A - \angle B$.

Задатак 841. Нека су K и L тачке симетричне темену A троуглу ABC у односу на бисектрисе унутрашњих углова код темена B и C. Ако је P додирна тачка уписаног круга тог троугла са ивицом BC, доказати да је P средиште дужи KL.

Задатак 842. Нека су k и l кругови са разних страна праве p. Конструисати правилан троугао ABC чија висина $AA^{'}$ припада правој p а друга два темена B и C су редом на круговима k и l.

Задатак 843. Конструисати троугао ABC ако је дат угао α и тежишне дужи t_b и t_c.

Литература

[1] Виктор Прасолов, *PROBLEMS IN PLANE AND SOLID GEOMETRY*, електронско издање.

[2] Милан Митровић, Срђан Огњановић, Михаило Вељковић, Љубинка Петковић, Ненад Лазаревић, Геометрија за први разред Математичке гимназије, Круг Београд, 2003.

Предавање 65

Пребројавања са стилом

Ђорђе Ракић, Математичка гимназија

65.1 Задаци за рад

65.1.1 Геометријска пребројавања

Задатак 1. У простору је дато n тачака, тако да никоје три нису колинеарне, а и никоје 4 нису копланарне. Колико оне одређују: а) правих; б) троуглова; в) кругова; г) равни ?

Решење: А) Свака права је одређена са две тачке, тако да је питање на колико начина моземо изабрати две различите тачке од њих n, а то је $\frac{n(n-1)}{2}$. Б) Сваки троугао је одређен са тачно три тачке, па се питамо на колико начина од n тачака мжемо изабрати три различите. То је $\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2}$. В) Сваки круг одређен са тачно три тачке, па се питамо на колико начина од n тачака мжемо изабрати три различите. То је $\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2}$. Г) Свака раван је одређена са тачно три тачке, па се питамо на колико начина од n тачака мжемо изабрати три различите. То је $\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2}$.

Задатак 2. Колико дијагонала има конвексан n-тоугао?

Решење: Број дужи које одређује n тачака је $\frac{n(n-1)}{2}$. Међутим, како су ту урачунате и странице датог многоугла, онда је укупан број дијагонала $\frac{n(n-3)}{2}$.

Задатак 3. На свакој страници квадрата дато је 10 тачака, тако да ниједна није теме квадрата. Колико троуглова се може уочити, тако да су им темена неке од уочених тачака?

Решење: Од 40 уочених тачака, три тачке моземо изабрати на $\frac{40 \cdot 39 \cdot 38}{3 \cdot 2}$. Међутим, треба искључити оне случајеве када све три тачке припадају истој правој, а таквих је $4\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2}$. Онда је решење: $\frac{40 \cdot 39 \cdot 38 - 4 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2}$

Задатак 4. Колико највише области одређују n различитих правих исте равни?

Решење: Нека је P_n највећи број области. Ако уведемо још једну праву она ће се сећи са њих н, градећи $n+1$ области. Онда је укупан број области задат формулом $P_{n+1} = P_n + n + 1$, где је $P_1 = 2$.

Задатак 5. Дато је 10 црвених 18 зелених тачака. Колико је различитих троуглова одређено овим тачкама, тако да ниједан троугао није једнобојан?

Решење: Нека је прво теме зелене боје. Њега можемо изабрати на 18 начина. Друго теме је црвене боје. Њега можемо изабрати на 10 начина. Треће теме можемо изабрати било како, тј. имамо $17 + 9$ начина. Онда је укупан број троуглова $\frac{18 \cdot 10 \cdot (17+9)}{2}$.

Задатак 6. Да ли је могуће распоредити 10 тачака на 5 дужи, тако да на свакој дужи буду по 4?

Решење: Нацртати све дијагонале конвексног петоугла. Тражене тачке су темена петоугла и тачке пресека дијагонала.

65.1.2 Пребројвања

Задатак 7. Из града G_1 у град G_2 воде 3 пута. Из града G_2 у град G_3 воде 2 пута, а из града G_3 у град G_4 води 5 путева. Из града G_1 у град G_4 води јос један директни пут. На колико се различитих начина може стићи из града G_1 у град G_4?

Решење: $3 \cdot 2 \cdot 5 + 1$

Задатак 8. Колико има троцифрених бројева којима су све цифре различите и дељиви су са 5?

Решење: Цифра јединица мора бити 0 или 5, тако да за њу имамо 2 могућности. Цифра стотина не може бити 0. Тако је број троцифрених бројева са задатим својством: $8 \cdot 8 \cdot 2$.

Задатак 9. У разреду има 20 ученика. На колико различитих начина се може изабрати председник, заменик и благајник?

Решење: Посто је редослед битан онда је решење: $20 \cdot 19 \cdot 18$.

Задатак 10. Новчић се баца 5 пута. Колико различитих случајева је могуће добити на овај начин?

Решење: Посто су могућа само два ишода (писмо или глава) онда је решење 2^5.

Задатак 11. Колико решења у скупу природних бројева има једначина: $x_1 + x_2 = 100$?

Решење: Пошто је реч о природним бројевима, онда из су решења само природни бројеви мањи од 100. Одређивањем првог броја, ми смо одредили и други. Таквих решења је 99.

Задатак 12. Колико различитих делилаца има број 2010^{2010}?

Решење: $2010^{2010} = 2^{2010} \cdot 3^{2010} \cdot 5^{2010} \cdot 67^{2010}$. Његов број делилаца је Н1$(2010+1)(2010+1)(2010+1)(2010+1) = 2011^4$

Задатак 13. На колико се различитих начина може 7 новчаница од 1000 динара ставити у леви и десни џеп?

Решење: Задатак је сличан 11ом задатку. Решење је 8, посто у једном џепу може бити и 0 новчаница.

Задатак 14. У кутији се налази 10 црвених, 15 белих и 17 црних куглица. Колико је луглица потребно извући да би се сигурно могло рећи да је бар једна од њих црна и једна бела?

Решење: У најнеповољнијем случају, то је $17 + 10 + 1$.

Задатак 15. Колико се нових различитих речи може добити од речи МАТЕМАТИКА?

Решење: $\frac{10!}{2!\cdot 2!\cdot 3!}$. Делимо са 2! и 3! јер се слова М, Т и А понављају по два, тј. три пута. (знак ! се назива факторијел и представља производ свих бројева почевши од један до n, $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$)

Задатак 16. На колико начина можемо сместити 9 људи на 12 столица а на колико начина можемо сместити 9 људи на 6 столица?

Решење: 9 људи на 12 столица се смешта тако што људи бирају столице, а то је $\frac{12!}{3!}$ начина. 9 људи на шест столица, тада столице бирају људе, па је решење $\frac{9!}{3!}$.

Задатак 17. На колико начина може 8 особа стати у врсту, тако да особе А и Б не стоје једна поред друге?

Решење: За почетак, осам особа можемо поређати у врсту на 8! начина. Сада посматрајмо колико је пута бројано ту да особе А и Б седе једна поред друге. Спојимо особе А и Б у једну особу Ц. Сада, овако их можемо поређати на 7! начина, али то је случај ако је А и Б повезано, али га морамо помножити са 2, јер није дозвољено ни да буде Б и А. Онда је решење $8! - 2 \cdot 7!$.

65.2 Задаци за домаћи рад

Задатак 18. На кружници је дато 8 тачака. Треба нацртати изломљену линију која се састоји од 7 дужи чија су темена дате тачке и то тако да та изломљена линија нема самопресека. Колико се изломљених линија може нацртати на тај начин?

Задатак 19. У равни је дато шсет тачака. Свака дуж одређена овим тачкама обојена је плавом или црвеном бојом. Доказати да постоји троугао са теменима у овим тачкама, тако да су му странице исте боје.

Задатак 20. У равни је дато 25 тачака, тако да за произвољне три од њих постоје две чије је растојање мање од 1. Доказати да постоји круг полупречника 1 унутар кога се налази бар 13 од датих тачака.

Задатак 21. Свака тачка у равни са целобројним координатама је обојена црвеном или плавом бојом. Доказати да постоји четвороугао са истобојним теменима.

Задатак 22. На колико начина могу да се поставе на шаховској табли краљ и краљица, тако да краљица не шахира краља?

Литература

[1] А. Енгел, *Problem Solving Strategies*, Спрингер 1997.

[2] В.В. Прасолов, *Problems in plane and solid geometry*, електронско издање.

[3] В. Стојановић, Водич за шампионе

Предавање 66

Скуп целих бројева

Петар Радовановић, Математичка гимназија

66.1 Теоријски увод

Дефиниција 108. Скуп целих бројева Z дефинише се као

$$Z = N \cup \{0\} \cup (-N),$$

где је $-N = \{-n | n \in N\} = \{-1, -2, -3...\}$.

Дефиниција 109. Апсолутна вредност целог броја a дефинише се као

$$|a| = a, a \in N,$$

$$|a| = 0, a = 0,$$

$$|a| = -a, a \in (-N).$$

66.2 Задаци за рад

Задатак 844. Након одређеног броја радних дана, при изградњи неког индустријског постројења, бригада је почела радити ударнички, па је свака 3 дана после скратила на 2 дана. Ако је посао завршен за 70 уместо за 90 дана, колико се дана радило ударнички?

Решење: Ударничким радом скраћен је рок за 20 дана што значи, да је уместо 60 дана $(3 \cdot 20)$ рађено 40 дана $(2 \cdot 20)$. Дакле, ударнички је рађено 40 дана после 30 дана рада нормалним темпом.

Задатак 845. Одредити број, већи од 100 и мањи од 200, који при дељењу са 2 даје остатак 1, при дељењу са 3 даје остатак 2, при дељењу са 4 даје остатак 3 и при дељењу са 5 даје остатак 4.

Решење: Ако бисмо овај број повећали за 1, он би био дељив са 2,3,4 и 5. Дакле то је број $k \cdot s - 1$ где је $s = NZS(2,3,4,5) = 60$. Добијамо $100 < k \cdot 60 - 1 < 200$. Ово важи за $k = 2$ и $k = 3$. Решења су 119 и 179.

Задатак 846. Дато је пет различитих целих бројева a, b, c, d и e таквих да је $(4-a)(4-b)(4-c)(4-d)(4-e) = 12$. Одредити $a+b+c+d+e$.

Решење: Како је $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = (-2) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ јединa могућа комбинација пет различитих целих бројева чији је производ 12, то је $(4-a)+(4-b)+(4-c)+(4-d)+(4-e) = 3 = 20-(a+b+c+d+e)$, па је $a+b+c+d+e = 17$.

Задатак 847. Решити неједначину $||x|-1| \leq 20$ у скупу целих бројева.

Решење: Дата једначина је еквивалентна са $-20 \leq |x| - 1 \leq 20$, односно $-19 \leq |x| \leq 21$. Међутим, $|x| \geq 0$, па је одавде $0 \leq |x| \leq 21$, или $-21 \leq x \leq 21$. Целобројна решења су -21,-20....,0,1,2....21.

Задатак 848. Наћи све парове (x, y) целих бројева, таквих да је $2(x^2 + y^2) = 5(xy+1)$.

Решење: Трансформишемо дату једнакост: $2x^2 - 4xy - xy + 2y^2 = 5$, односно $2x(x-2y) - y(x-2y) = 5$. Одавде је $(x-2y)(2x-y) = 5 = 1 \cdot 5 = 5 \cdot 1 = (-1) \cdot (-5) = (-5) \cdot (-1)$. Решавањем ових система добијају се решења: $(3,1)$,$(-1,-3)$,$(-3,-1)$ и $(1,3)$.

Задатак 849. Колико има целих бројева за које важи неједнакост $\frac{x^2-x}{x^2+2x} \leq \frac{2}{5}$?

Решење: Дати израз трансформишемо на следећи начин:

$$\frac{x(x-1)}{x(x+2)} \leq \frac{2}{5}$$

$$\frac{5x-5}{x+2} \leq 2$$

$$\frac{3x-9}{x+2} \leq 0$$

па $-2 < x \leq 3$, а решења су -1,1,2,3.

Задатак 850. (Фибоначијев проблем) Неко је за 30 новчаница једнаке вредности купио 30 птица. За свака три врапца платио је једну новчаницу, за сваке две чавке платио је једну новчаницу и за сваког голуба по две новчанице. Колико је купио птица од сваке врсте?

Решење: Имамо систем једначина $x+y+z = 30$ и $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + 2z = 30$. Множењем прве једначине са 2 и друге са 6 добија се нови еквивалентан систем: $2x + 2y + 2z = 60$ и $2x + 3y + 12z = 180$. Одузимањем прве једначине од друге добија се: $y + 10z = 120$ па y мора бити дељиво са 10. Могућа решења су $y = 10$ и $y = 20$. За $y = 10$ добија се $z = 11$ и $x = 9$, а за $y = 20$ добија се $x = 0$ сто је немогуће. Дакле купљено је 9 врабаца, 10 чавки и 11 голубова.

Задатак 851. Колико има једноцифрених целих бројева који су решења неједначине: $\frac{(x-1)(x+2)(x-3)}{x+2+|x+2|} \geq 4$?

Решење: За $x \leq -2$ нема решења јер је тада именилац леве стране неједнакости нула. Дакле, $x > -2$. Имамо сада:

$$\frac{(x-1)(x+2)(x-3)}{2(x+2)} \geq 4$$

$$\frac{(x-1)(x-3)}{2} \geq 4$$

$$x^2 - 4x + 3 \geq 8$$

$$(x-2)^2 \geq 3^2$$

$$|x-2| \geq 3$$

Сада је за $x \geq 2$ решење $x \geq 5$, а за $x < 2$ решење је $x \leq 1$, па су целобројна једноцифрена решења -1,1,5,6,7,8,9 и има их 7.

Задатак 852. Наћи све правоугаонике којима су дужине страница изражене природним бројевима, а обими и површине им се изражавају истим бројевима.

Решење: Нека су a и b дужине страница правоугаоника. Сада имамо једначину:

$$ab = 2(a+b)$$

$$ab - 2a - 2b + 4 = 4$$

$$(a-2)(b-2) = 4$$

па су решења $a = 3, b = 6$ или $a = b = 4$.

Задатак 853. Једна породица полази ове године на летовање последњег дана у месецу, где проводи цео годишњи одмор. Производ њеног кућног броја, датума поласка на летовање, редног броја месеца повратка са летовања, броја деце у тој породици и броја дана које ће провести на летовању (рачунајући и дан поласка) је 1452784. Одредити датум завршетка њиховог летовања.

Решење: Бројеви који се помињу у задатку су чиниоци броја 1452784. Када се овај број растави на чиниоце добија се: $2^4 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 101$. Одавде се види да је датум поласка 31. Редни број месеца повратка може бити једино 8 (лето је). Број деце је 2, а кућни број је 101. Породица остаје на летовању 29 дана. па се враћа 28. августа.

66.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 854. Решити неједначину: $|\frac{x^2-x+1}{x^2-1}| < 1$.

Задатак 855. Наћи производ свих решења једначине

$$\frac{x(x-\frac{3}{2})(x-2)(x-3)(x-4)}{x-2+|x-2|} = 0.$$

Задатак 856. Наћи број целобројних решења неједначине $\sqrt{9x^2-6x+1} - |4x+3| \geq 0$.

Задатак 857. Наћи скуп двоцифрених бројева који су за 10 већи од троструког збира својих цифара.

Задатак 858. У селима A,B и C живи редом 300,200 и 100 ученика. Удаљеност села је $AB = 3km$, $BC = 2km$ и $AC = 4km$. Где треба изградити заједничку школу тако да укупан број километара који прелазе ђаци буде најмањи могући?

Литература

[1] Миодраг Петковић, Занимљиви математички проблеми, Научна књига 1985.

[2] Војислав Андрић, Математика $X = 1236$, Круг 2006.

[3] Владимир Стојановић, Математископ 2 - Стазама шампиона, Математископ 1999.

[4] Владимир Стојановић, Математископ 3 , Математископ 1999.

[5] Задаци са такмичења

Предавање 67

Задаци везани за кретање

Милован Мајсторовић, Математичка гимназија

67.1 Теоријски увод

Дефиниција 110. Код равномерномерног праволинијског кретања брзина једнака је количнику укупног пређеног пута и укупног времена које је потребно да се тај пут пређе.

67.2 Задаци за рад

Задатак 859. Са крајева писте дугачке $550m$ истовремено крену двојца бициклиста, један према другом. Брзина првог бициклисте је $10km/h$, а другог $12km/h$. После ког времена ће се они срести и колико ће бити удаљени од места са ког је кренуо први бициклиста.

Решење: Нека су s_1 и s_2 путеви које пређу бициклисти до сусрета. Тада је $s_1 + s_2 = s$, односно $v_1 t + v_2 t = s$. Одатле се добија $t = \frac{s}{v_1+v_2} = 0,025h = 1,5min$ и $s_1 = v_1 t = 0,25km = 250m$.

Задатак 860. Два аутомобила иду у истом смеру. У почетном тренутку растојање између њих је $15km$, а предњи аутомобил има брзину $60km/h$. Након $75min$ од тог тренутка аутомобили се сустигну. Колика је брзина другог аутомобила?

Решење: Имамо да важи $s = (v_2 - v_1)t$,а из тога следи $v_2 = v_1 + \frac{s}{t} = 72km/h$.

Задатак 861. Брзина светлости је $300000km/s$. За које време ће светлост са Сунца стићи на Земљу ако је растојање између Земље и

Сунца $1,5 \cdot 10^8 km$. За које време ће Сунчеви зраци стићи на Земљу са Сунца?

Решење: Како је $t = \frac{s}{v}$, следи $t = 8,33 min$.

Задатак 862. Из места A и B истовремено полазе једно другом у сусрет, два тела. Прво се креће брзином $7\frac{m}{s}$,а друго брзином $4\frac{m}{s}$. Тела се сретну после $0,5 min$. Колико је место A удаљено од места B?

Решење: $s = (v_1 + v_2)t = 330m$

Задатак 863. Поред тренера који стоји прође атлетичарка која трчи брзином $5\frac{m}{s}$. Након $2s$ поред тренера прође атлетичар који трчи брзином $7,5\frac{m}{s}$. Када ће атлетичар престићи атлетичарку? Колико ће они бити удаљени од тренера ако је стаза права?

Решење: Нека је t време од тренутка када атлетичар прође поред тренера до тренутка када сустигне атлетичарку. Од тренера до места сустизања обоје пређу исте путеве(s): атлетичар тај пут пређе за време t брзином v_2, а атлетичарка за време $t + \Delta t(\Delta t = 2s)$ брзином v_1. Следи да је $v_1(t + \Delta t) = v_2 t$, одакле је $t = \frac{v_1 \Delta t}{v_2 - v_1} = 4s$. Удаљеност од тренера у том тренутку престизања је $s = v_2 t = 30m$.

Задатак 864. Звук се кроз ваздух простире брзином $340\frac{m}{s}$, а кроз челик брзином $5\frac{km}{s}$. На једном крају моста се удари маљем. На другом крају моста звук кроз челик чује се $1,1s$ пре него кроз ваздух. Колика је дужина моста?

Решење: Нека је t_1 време за које звук прође кроз ваздух са једног краја моста на други, а t_2 време за које пређе исти пут кроз челик. Разлика та два времена је $t = 1,1s$. Следи $t = \frac{s}{v_2} - \frac{s}{v_1} = s(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}) = \frac{s(v_2 - v_1)}{v_1 v_2}$. Одатле је $s = \frac{v_1 v_2 t}{v_2 - v_1} = 401m$.

Задатак 865. Два тела крећу се равномерно дуж истог правца и у истом смеру. Брзина предњег тела(A)је $3\frac{m}{s}$,а задњег (B) $4,5\frac{m}{s}$. Колико је почетно растојање између њих ако је после $10s$ тело B $2,5m$ испред тела A.

Решење: Тело A пређе пут $s_1 = v_1 t$, а тело B пређе пут $s_2 = s' + s_1 + s_0 = v_1 t$($s_0$ је почетно растојање између тела, а $s' = 2,5m$), па $s_0 = s_2 - s_1 - s' = (v_2 - v_1)t - s' = 12,5m$.

Задатак 866. Метак пробија вагон који се креће брзином $54km/h$. Ширина вагона је $2,4m$, а рупице које метак пробија у наспрамним зидовима вагона померене су (у правцу дужине вагона) $6cm$ једна од друге.

Сматрајући да је правац брзине метка нормалан на правац брзине вагона, одредити брзину метка. Колико времена лети метак кроз вагон?

Решење: Нека је $v^{''}$, а $v^{'}$ брзина метка у односу на пругу. У односу на вагон метак има две компоненте брзине (слика): $-v^{''}$ и $v^{'}$. На основу сличности троуглова важи $\frac{l}{v''} = \frac{d}{v'}$, па је $v^{'} = v^{''}\frac{d}{l} = 2160km/h = 600\frac{m}{s}$. Тражено време је $t = \frac{l}{v''} = 0,004s$.

Задатак 867. Дати су графици зависности путева два тела од времена. Које тело има већу брзину и колико пута?

Решење: Посматрајући график добијамо да брзина тела A износи $20\frac{m}{s}$, а тела B износи $10\frac{m}{s}$, па је $v_A = 2v_B$.

Задатак 868. Ширина реке је $80m$. Чамац прелази са једне обале на другу држећи све време курс нормале на обалу. Брзина чамца у односу на воду је $40km/h$, а брзина речног тока је $4km/h$. За колико низводно ће приспети чамац на другу обалу?

Решење: На слици су приказане брзине: u - брзина реке,$v^{'}$ - брзина чамца у односу на воду, v - брзина чамца у односу на обалу. Троугао брзина сличан је троуглу ABC, па следи $\frac{s}{d} = \frac{u}{v'}$. Одатлр је $x = d\frac{u}{v'} = 8m$.

67.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 869. Два воза крећу се по паралелним колосецима један према другом брзинама $36km/h$ и $54km/h$ у односу на пругу. Путник у првом возу измерио је да је други воз прошао поред њега за $6s$. Колика је дужина другог воза?

Задатак 870. Аутомобил се креће брзином $72km/h$, а капи падају вертикално брзином $8\frac{m}{s}$. Колика је брзина капи у односу на возача?

Задатак 871. Чамац се креће брзином $7,2km/h$ у односу на воду, држећи све време курс у правцу нормале на обалу. Ширина реке је $500m$. Наћи брзину речног тока и време за које чамац пређе са једне обале на другу ако га река однесе $150m$ низводно.

Задатак 872. Из места A у место B у интервалима од по $10min$ одлази по један аутомобил. Растојање између A и B је $60km$, а брзина сваког аутомобила је $60km/h$. Након једног сата по поласку првог аутомобила из A, креће и аутомобил из B према A, такође брзином $60km/h$. Колико ће аутомобила, који иду из A, ће на свом путу срести аутомобил који иде из B у A?

Задатак 873. Дуж два паралелна колосека крећу се у истом смеру два воза - теретни дужине $630m$ брзином $48,6km/h$ и, иза њега, путнички дужине $120m$ брзином $102,6km/h$. За које време ће путнички воз целом својом дужином проћи поред теретног?

Литература

[1] Наташа Чалуковић, Физика - збирка задатака и тестова за први разред гимназије, Круг 2003.

[2] Наташа Чалуковић, Милан Распоповић, Физика 1М - Збирка ресхених задатака за први разред Математичке гимназије и припреме за такмичења , Круг Београд, 2001.

Предавање 68

Логичко-комбинаторни задаци(графови, логички)

Лазар Арсић, Математичка гимназија

68.1 Теријски увод

Дефиниција 111. Граф G је уређени пар (V, E). Елементи скупа V зову се *чворови,* а елементи скупа Е *гране* графа G. За дати граф G, скуп чворова се означава са $V(G)$, а скуп грана $E(G)$.

Дефиниција 112. За два чвора кажемо да су суседни ако постоји грана која их повезује. *Степен чвора u* представља број чворова са којим је чвор u суседан и облежава се са $d(a)$ где је a чвор.

Дефиниција 113. Граф је *неорјентисан или неусмерен* ако грана која повезује чвор u са чвором v повезује и чвор v са чвором u (кад је то иста грана). Граф је *орјентисан или усмерен* ако су његове гране такве да ако нека грана повезује u са v она не повезује и v са u.

Теорема 146. У неорјентисаном графу G, који има бар 2 чвора, постоје бар 2 чвора истог степена.

Теорема 147. У неорјентисаном графу збир свих степена чворова једнак је двоструком броју грана, тј. $d(a_1) + d(a_2) + d(a_3) + ... + d(a_n) = 2m$.

Теорема 148. У неорјентисаном графу број чворова непарних степена је паран.

Теорема 149. Ако граф има $2k$ чворова са непарним степенима онда се он може нацртати из не мање од k потеза.

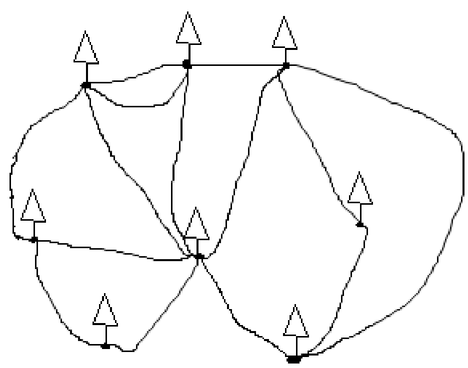
68.2 Задаци за рад

Графови

Задатак 874. Доказати горе дате 4 теореме.

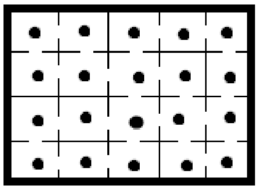
Решење: Доказ прве: Претпоставимо супротно, да не постоје два таква чвора. Тада, у графу од n чворова, једна чвор може имати степен $(0, 1, 2, ..., n-1)$, а како никоја 2 немају исти степен по претпоставци онда је сваки број из овог скупа степен тачно једног чвора. Међутим, одавде видимо да мора постојати чвор са степеном 0, тј. који није повезан ни са једним чвором, и чвор са степеном $n-1$, који је повезан са свима, што је контрадикција!
Доказ друге: Степени представљају гране које 'излазе' из чвора, па ако су u и v повезани грана између њих повећава степен и u и v за 1, тј. свака грана се рачуна дупло.
Доказ треће: Ако је број непарних степена непаран онда је збир свих степена непаран број, а то је у контрадикцији са другом теоремом.
Доказ четврте: Да би се исцртале све гране које излазе из чвора непарног степена, мора се почети или заврсити цртање у њему (завршити или почети из таквог графа је исти процес, обрнутог редоследа). Како је број грана непаран, ми можемо пролазити кроз њега,ући и изаћи, и тако се исртавају по две његове гране, па це на крају остати једна, кад се то деси из тог чвора се може или само кренути или само завршити у њему. Ако имамо $2k$ таквих чворова и у сваком цртању кренемо из једног непарног, а завршимо у другом, имаћемо k цртања.

Задатак 875. Зец се кретао од дрвета до дрвета и оставио трагове у снегу. Испод ког дрвета би могао бити сакривен сада?

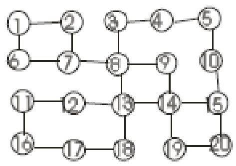


Решење: Најпре можемо закључити да дрвећа испод којих је зец само пролазио имају паран степен, па је она где се крио на почетку и где се сада крије имају непаран степен. Имамо два дрва са степеном 3 па је зец испод неког од њих.

Задатак 876. Дат је распоред соба у замку као на слици. Може ли се замак обићи тако да се у сваку собу уђе бар једном и кроз свака врата прође тачно једном, а можемо почети из било које собе?



Решење: Чворови 7 и 15 су са непарним степеном па се граф може обићи тако што се крене из 7 и заврши у 15 или обрнуто.



Задатак 877. На турниру је свако одиграо меч са сваким тачно једном. Ако је сваки тим бар једном победио, онда доказати да постоји тројка A, B, C таква да је A победио B, B победио C, C победио A.

Решење: Нека је n тимова на турниру. Сваки тим је победио између 1 и $n-1$ тимова, па постоје два тима A и B која су победила исти број мечева k. Претпоставимо да неко од њих није изгубио ниједан меч. То би значило да неко има $n-1$ победу па толико има и други а то је немогуће. Значи свако од њих је изгубио бар један меч. Без умањења општости рецимо да је A победио B. Тимова који су победили A има $n-1-k$, а које B победио има k па постоји бар један C такав да је победио A, а изгубио од B.

Задатак 878. На журци је n момака и n девојака. Ако се свакој девојци свиђа бар a момака, а сваком момку бар b девојака, одредити какви морају бити a и b (у функцији од n) да би сигурно постојали момак и девојка који се свиђају једно другом.

Решење: Претпоставимо супротно, да нема таквих парова. Могућих парова је n^2, а свиђања је $an+bn$ па ако је $an+bn \geq n^2$ тј. $a+b \geq n$ онда сигурно постоји пар. Докажимо сада да не мора постојати за $a+b < n$. Нумеришимо момке и девојке бројевима $1, 2, 3, .., n$. Нека се девојци i свиђају момци $i, i+1, i+2, ..., i+a-1$ (бројеве пишемо по модулу n), а момку j девојке $j+1, j+2, ..., j+b$. Ако би се i и j свиђали једно другом онда би морало да буде $j = i+t$ за неко $0 \leq t \leq a-1$. Момку j се на основу тога свиђају девојке $i+t+1, i+t+2, ..., i+t+b$. Како не постоји такво x, $1 \leq x \leq b$, да је $i+t+x \equiv i$ због $1 \leq t+x \leq a+b-1$ закључцхујемо да онда не мора постојати пар такав да се свиђају једно другом.

Задатак 879. У покрајини Доњи Нерадовац сваки пар градова је повезан једносмерним путем. Доказати да постоји град такав да се у њега може стићи из сваког града директно или преко највише једног града.

Решење: Нека је град p град у који води највише путева, нека је то d путева. Нека је M скуп градова који директно воде у p (тај скуп има d елемената), а E скуп осталих градова који не воде директно у p. Тада би требало да постоји за сваки град e, $e \in E$, град m, $m \in M$ такав да је $e \to m \to p$. Међутим, претпоставимо супротно, да из e ниједан пут не води у градове из скупа M. То даље значи да из сваког града из скупа M води пут у e, а у e води још и пут из p па у e води $d+1$ путева, а то је више путева него што воде у p, што је у супротности са нашом претпоставком, па је ово контрадикција, те бар неки пут из e води у неке од градова M.

Задатак 880. У Парламенту сваки политичар има највише 3 непријатеља. Доказати да се Парламент може поделити на два дома, Горњи и Доњи, тако да ниједан политичар нема више од једног непријатеља у свом Дому.

Решење: Посматрајмо све могуће поделе политичара. Нека је Z збир бројева који представљају колико непријатеља има сваки политичар у свом дому. Узмимо ону поделу где је Z најмање и докажимо да има тражено својство. Заиста, нека неки политичар има *бар 2 противника у свом дому,* тада ће у оном другом имати *највише једног,* па ако би га пребацили тамо добили би збир непријатељстава мањ од Z што је у контрадикцији са тим да је Z најмање.

Логички

Задатак 881. Дата је трансформација уређене тројке (a, b, c): $(a, b, c) \mapsto (2a-b, 2b-c, 2c-a)$. Може ли се из тројке (1, 7, 9) трансформацијама добити:
а) тројка (3, 7, 11)

б) тројка (3, 6, 8)?

Решење: Уочимо да је $(2a-b)+(2b-c)+(2c-a)=a+b+c$ одкле добијамо да се збир бројева тројки не мења трансформацијама. Под а) је немогуће јер $3+7+11\neq 1+7+9$ међутим $3+6+8=1+7+9$. Сада приметимо да ако су a,b,c непарни онда су и $(2a-b, 2b-c, 2c-a)$ непарни. У тројци под б) бројеви 6 и 8 су парни па се не може ни она добити трансформацијама.

Задатак 882. На тестирању ученика се пријавило 22 основаца из свих осам разреда. Сваки је урадио онолико задатака колико су били предвиђени до његовог разреда (прваци један, другаци два, ..., осмаци осам). Укупно су сви урадили 50 задатака. Колико је било првака?

Решење: Знамо да је из сваког разреда бар по један ученик па су они урадили $1+2+3+4+5+6+7+8=36$ задатака па је на преосталих $22-8=14$ ученика преостало $50-36=14$ задатака па су ових 14 ученика урадили тачно по један задатак. Уз јос овог једног укупно је 15 првака.

Задатак 883. Мића тврди: "Марко лаже!"Марко тврди: "Раде лаже!"Раде тврди: "Мића и Марко лажу!"Ко лаже?

Решење: Очигледно је да је Раде највећи лажов јер када би он говорио истину онда би бар Мићина изјава била нетачна тј. Марко би говорио истину, а то је контрадикторно томе да није Раде лажов. Значи Раде лаже, па Марко не лаже, те Мића лаже такође.

Задатак 884. Колико има позитивних целих бројева мањих од 1000 који нису дељиви ни са 5 ни са 7?

Решење: Сваки пети је дељив са 5 па оних који нису дељиви са 5 имамо $\lfloor\frac{1000}{5}\rfloor=200$. Они који су дељиви са 7 имамо $\lfloor\frac{1000}{7}\rfloor=142$ па остаје $1000-200-142=658$, међутим оне дељиве са 35 смо двапута одузели а њих има $\lfloor\frac{1000}{35}\rfloor=28$ па имамо $658+28=686$.

Задатак 885. Треба у низ распоредити 10 куглица од којих су 4 црвене, 3 плаве и 3 зелене. На колико начина се то може учинити?

Решење: Разне куглице можемо распоредити на 10! начина. Међутим, неке куглице су исте па је број начина мањи. Узмимо неку произвољну комбинацију и посматрајмо црвене куглице. Њих је 4 и како год да им мењамо међусобно места у тој комбинацији она ће остати иста, па смо што се тиче црвених сваку комбинацију рачунали $4!=24$

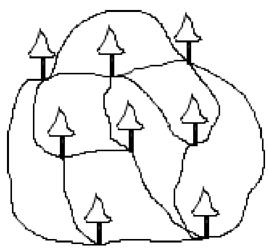
пута. Сличо важи и за зелене и плаве па је укупан број комбинација $\frac{10!}{4!\times3!\times3!} = 4200$

Задатак 886. За округлим столом краља Артура седи он са својих дванаест витезова. Сваки витез се заклео да или увек говори истину или увек лаже. Витез који седи са леве стране краља је Мерлин, краљев саветник. Један странац је упитао витезове шта мисле о свом суседу са десне стране и сваки је рекао за свог суседа да је лажов осим Мерлина који је рекао да краљ никада није слагао у животу. На питање колико има једних, а колико других Артур је рекао да лажова има мање, а Мерлин још и да је истинољубивих за 3 више. Колико има лажова и јесу ли међу њима Артур и Мерлин?

Решење: Ако би два лажова седели један до другог онда би један рекао за овог другог да не лаже. Такође, ако заједно седе двојица која не лажу онда ће један рећи да овај други не лаже. Одавде добијамо да витезови седе назименицно, лажов па иситинољубив па опет лажов итд. Онда мора да је једних 7, а других 6 па је Мерлин сигурно лажов. Сада је и Артур лажов, па закључујемо да је лажова 7, а истинољубивих 6.

68.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 887. Зечеви су се кретали од дрвета до дрвета и оставили трагове у снегу, а сада је сваки испод неког дрвета. Колико је најмање зечева?



Задатак 888. На турниру у обарању руке за играча A кажемо да је поразио играча B ако га је победио у директном дуелу или индиректно ако постоји такав играч C да је C победио B, а изгубио од A. За играча кажемо да је победник ако је поразио све играце на турниру, директно или индиректно. Доказати да ако је само један победник на турниру онда је он поразио све играче директно.

Задатак 889. Од шаховске табле одломљена су два поља на супротним ћошковима. Може ли се таква табла поплочати доминама 2×1?

Задатак 890. Колико речи (не морају имати смисла) се може саставити од слова речи ПОХИПОХОНДАРИТИ? Свако слово из речи користимо тачно једном.

Задатак 891. На столу је поређано 7 новчића окренутих "писмом"нагоре. У једном потезу је дозвољено окренути 5 ночића.
а) Може ли се тако добити да сви ночићи буду окренути "главом"навише?
б) Може ли се исто добити окретањем по 4 ночића у једном потезу?

Литература

[1] В. Стојановић, *MATHEMATISKOP*, Београд 1999.

[2] Д. Милијанчевић, *Разни проблеми из елементарне геометрије*, Шабац 2010.

[3] Ђ. Дугошија, *Комбинаторика геометријских објеката у ОШ*, Математички факултет Београд.

[4] А. Енгел, *Problem Solving Strategies*, Спрингер 1997.

Предавање 69

Рационални бројеви

Никола Марковић, Математичка гимназија

69.1 Теоријски увод

Дефиниција 114. Рационални бројеви су бројеви облика $\frac{p}{q}$ где је $q \neq 0$.

Дефиниција 115. Скуп рационалних бројева означавамо са $\mathbf{Q}$.

Дефиниција 116. Два рационална броја су једнака уколико се проширивањем, множењем и имениоца и броиоца истим бројем,такође различитим од нуле, једног може добити број идентичан другом.

Теорема 150. У скупу $\mathbf{Q}$ важе сва правила сабирања, одузимања, мозхења и дељења као и у скупу $\mathbf{Z}$.

69.2 Задаци за рад

Задатак 892. Који број треба додати имениоцу и одузети бројиоцу разломка $\frac{537}{463}$, да би се добио разломак једнак $\frac{1}{9}$?

Решење: Ако би то записали као $\frac{537-x}{463+x} = \frac{1}{9}$, решавање задатка се своди на просто решавање једначине $463 + x = 9 \cdot (537 - x)$ чије је крајње решење $x = 437$.

Задатак 893. У $1000kg$ свежих јагода има 99 процената воде. У току транспорта испарила је извесна количина воде. Нова тежина јогода износи $500kg$. Колико процената воде садрже јагоде?

Решење: Пре транспорта јагода, суве материје је било $\frac{1000}{100} = 10kg$. Иста та сува материја сачињава и тежину нових јагода и то износи

$\frac{10}{\frac{500}{100}} = 2$ процента укупне тежине, тако да јагоде после транспорта садрже укупно 98 процената воде.

Задатак 894. Влажност свеже, тек покошене траве је 60 процената, а сена 20 процената. Колико ће се добити сена од једне тоне свеже траве?

Решење: У једној тони свеже траве воде има $600kg$ а суве материје $400kg$. Истих тих $400kg$ износи 80 процената сена, тако да је укупна количина сена добијена од једне тоне свеже траве $500kg$.

Задатак 895. Ордедити најмањи позитиван рационалан број, који при дељењу са $\frac{35}{396}$ и $\frac{28}{297}$ даје целобројни колочник.

Решење: Тражени рационални број ћемо представити као $\frac{x}{y}$, а добијени целобројни количник z. Пошто имамо да $\frac{x}{y}$ при дељењу са датим рационалним бројевима даје z, ту једначину можемо написати на другачији начин. $\frac{x}{y} \cdot \frac{396}{35} = \frac{x}{y} \cdot \frac{297}{28} = z$. Из ове једначине видимо да x мора да буде дељив са 35 и 25, и да y мора да дели 396 и 297, да би количник био цео број. Даљим сређивањем долази се до решења где је x најмање за вредност 140 и y највеће за 99, јер коначни број мора да буде што мањи, и коначно решење износи $\frac{140}{99}$.

Задатак 896. Колико литара воде треба помешати са 120 литара 10-о процентниг раствора алкохола, да би се добио 4-о процентни раствор.

Решење: Пошто у раствору има 10 процената алкохола, његова количина је $\frac{120}{10} = 12l$, што касније треба да износи 4 процента новог раствора. Тако добијамо укупну количину новонасталог раствора, и она износи $\frac{12}{4} \cdot 100 = 300l$, сада пошто имамо укупну количину новог и старог раствора видимо да је додато $300l - 120l = 180l$ воде.

Задатак 897. Одредити a и b ако је

$$a + b = a \cdot b = \frac{a}{b}.$$

Решење: Узмимо само други део ове једнакости, $a \cdot b = \frac{a}{b}$, ако помножимо и леву и десну страну са b и поделимо са a добијамо $b^2 = 1$, из чега следи да је $b = 1$ или $b = -1$. Сада ако то употребимо у првом делу једнакости добија се да је $a+1 = a$ за $b = 1$ и $a-1 = -a$ за $b = -1$. Одмах можемо да одбацимо први случај јер се у њему добија да је $1 = 0$, тако да је решење овог задатка $a = \frac{1}{2}$ и $b = -1$.

Задатак 898. Аца је за три дана прочитао једну занимљиву књигу. Првог дана је прочитао $\frac{1}{5}$ целе књиге и још 16 страниц, другог дана 30 процената остатка и још 20 страница, и последњег дана $0,75$ новог остатка и преосталих 30 страница. Колико је страница имала та књига?

Решење: Овај задатак се најлакше решава радом од краја ка поцхетку. Ако погледамо да је последњег дана прочитао $0,75$ остатка и 30 страница видимо да му је за трећи дан остало да прочита 120 страница, на исти начин се ради и за други и први дан, да би се на крају добило коначно решење да књига има 270 страница.

Задатак 899. Цена злата на берзи свако пре подне порасте за 10 процената, а свако поподне опадне за 10 процената. Да ли ће после 50 дана бити више, мање или једнако половини цене?

Решење: Нека почетна цена злата износи x. Прво пре поодне цена износи $1,1x$, а после подне $0,99x$. Тако да је првог дана цена опала за $0,01x$. Другог дана цене износе $1,089x$ пре подне и $0,9801x$. Можемо приметити да цена злата више не опада за $0,01x$ тако да ће она после педесет дана опасти за мање од $0,5x$, што значи да ће цена бити већа од половине почетне цене злата.

Задатак 900. Један шах клуб имао је одређени број чланова. Једног дана одлучено је да направе малу журку за све чланове, међутим ту се нису појавили сви позвани, јер су због немогућности поједини чланови отказали долазак. Познато је да је број одсутних, једнак $\frac{1}{6}$ броја присутних. Када је још један члан одлучио да напусти скуп, број одсутних постао је $\frac{1}{5}$ броја присутних. Колико чланова има овај клуб?

Решење: Ако бисмо број одсутних чланова означили са x, број присутних би у почетку био $6x$. Када их је напустион још једна члан, број одсутних је био $x+1$ а присутних $6x-1$ или $5x+5$. Када средимо ове једначине добија се да укупан број чланова износи 42.

Задатак 901. Решити по x:

$$\frac{2010}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=2011$$

.

Решење: Именилац почетног разломка $1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ износи $\frac{2010}{2011}$, када одузмемо 1 добија се да је $\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=-\frac{1}{2011}$, даље имамо да је $1+\frac{1}{x}=-2011$, па је $\frac{1}{x}=-2012$ из чега следи да је $x=-\frac{1}{2012}$.

69.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 902. Израчунати вредност израза:

$$\frac{3+4,20:0,1}{(1:0,3-2\frac{1}{3})\cdot 0,3125}.$$

Задатак 903. Именилац једног разломка је за 3521 већи од бројиоца. После скараћивања тог разломка добијен је разломак $\frac{4}{11}$. Који је разломак био пре скраћивања?

Задатак 904. Одредити именилац, после свих скраћивања, разломка:

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 99\cdot 100}{6\cdot 6\cdot ...\cdot 6\cdot 6}$$

у имениоцу се налази 100 шестица.

Задатак 905. Неколико браће је поделило извесну количину дуката. Први је узео 100 и $\frac{1}{6}$ остатка, други 200 и $\frac{1}{6}$ новог остатка, трећи 300 и $\frac{1}{6}$ новог остатка, све до последњег који је узео све. Сваки брат је узео подједнаку суму. Колико је било браће.

Задатак 906. Израчунати збир:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{99\cdot 100}.$$

Литература

[1] С. Огњановић, *Математика 10.*

[2] Додатна настава из математике.

[3] Задаци са такмичења "КММ Аршимедес".

Предавање 70

Троугао

Никола Марковић, Математичка гимназија

70.1 Теоријски увод

Дефиниција 117. За два произвољна троугла можемо рећи да су подударни ако су им све странице и сви углови подударни.

За доказ подударности два троугла користимо четири основна става подударности.

Став I: Два троугла су подударна ако имају једнаке по две одговарајуће странице и њима захваћене углове (СУС).

Став II: Два троугла су подударна ако имају једнаке по једну страницу и на њима једнаке одговарајуће налегле углове (УСУ).

Став III: Два троугла су подударна ако су све три странице једног троугла једнаке одговарајућим страницама другог троугла (ССС).

Став IV: Два троугла су подударна ако су две странице и угао наспрам веће од њих једног троугла једнаке одговарајућим страницама и углу другог троугла (ССУ).

Дефиниција 118. Поред наведених правила о подударности троуглова напоменућемо и неколико значајних тачака троугла.

I: Центар описане кружнице налази се у пресеку симетрала страница датог троугла (O, R).

II: Центар уписане кружнице налази се у пресеку симетрала углова датог троугла (S, r).

III: Ортоцентар је пресечна тачка правих које садрже висине датог троугла (H).

IV: Тежиште је пресечна тачка тежишних дужи датог троугла (T).

70.2 Задаци за рад

Задатак 907. Нека је тачка D таква тачка, да припада страници AB троугла ABC, и да је $AC = CD = BD$, и нека је угао $\angle ACD$ једнак α. Израчунати угао $\angle ABC$.

Решење: Имамо да је троугао ACD једнакокрак, па је $\angle CAD = \angle ADC = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Такође имамо да је троугао DBC једнакокрак па је $\angle CDB = 180^\circ - 2\beta$. Ако саберемо све углове код D добија се да тражени угао β износи $45^\circ - \frac{\alpha}{4}$.

Задатак 908. Доказати да је троугао правоугли ако је тежишна дуж једнака половини одговарајуће странице.

Решење: Нека је подножје одговарајуће тежишне дужи из темена C тачка D. Пошто је у задатку дато да је $CD = AD = BD$ можемо закључити да је тачка D центар описане кружнице око троугла ABC. Даље пошто је познато да се само код правоуглог троугла центар описаног круга налази на страници и то баш на средини хипотенузе закључујемо да је троугао ABC правоугли са правим углом у темену C.

Задатак 909. Ако је у троуглу тежишна дуж која одговара основици AB, једнака њеној половини, одредити угао при врху (угао наспрам странице AB) .

Решење: Тежишна дуж CC_1 дели дуж AB на два подударна дела, а како је CC_1 једнако половини AB следи да је $CC_1 = AC_1 = BC_1$, из тога закључујемо да је тачка C_1 уствари центар описане кружнице троугла ABC, даље пошто знамо да се центер описане кружнице једино код правоуглог троугла налази на једној од страница, и то баш на средини хипотенузе, закључујемо да угао наспрам странице AB износи 90° .

Задатак 910. Над сваком страницом троугла ABC конструисани су исте ширине. Праве којима припадају спољашње странице тих правоугаоника одређују нови троугао $A_1B_1C_1$. Доказати да се праве AA_1,BB_1 и CC_1 секу у једној тачки.

Решење: Не умањујући општост, узећемо за пример праву AA_1. Нека су тачке D и E подножја нормала из тачке A на странице A_1B_1 и A_1C_1. Троуглови A_1AD и A_1AC по ставу ССУ, из чега следи да је права AA_1 симетрала угла $\angle C_1A_1B_1$, па се тако наведене праве секу у једној тачки која представља центар уписане кружнице.

Задатак 911. Дат је паралелограм $ABCD$, $\angle ABC$ је туп. Странице AB и BC продужене су преко темена B. На продужетцима се налазе тачке E и F, тако да су BE и BF основице једнакокрако правоуглих троуглова BCE и ABF. Доказати да је троугао FED једнакокраки.

Решење: Углови $\angle CBE$ и $\angle ABF$ су једнаки као унакрсни углови, и једнаки су α, из тога даље следи да је $\angle BCE = \angle FAB = 180° - 2\alpha$. $\angle DAF = \angle DCE = 180° - \alpha$, па су троуглови AFD и DEC подударни по ставу СУС, пошто имамо ову подударност доказану, следи да су странице DF и DE такође једнаке, па је троугао FED једнакокрак.

Задатак 912. Над страницама паралелограма $ABCD$, конструсани су са средиштима M, N, P, Q. Доказати да је $MNPQ$ квадрат.

Решење: Да би доказали да је $MNPQ$ квадрат треба доказати да су све странице једнаке као и сви углови. За почетак, докажимо да су странице једнаке. Ако погледамо троуглове QAM, MNB, NCP и DPQ можемо видети да су сви подударни по ставу СУС, и то $QA \cong BN \cong CN \cong DQ$ као половине дијагонала једнаких квадрата, $AM \cong MB \cong CP \cong PD$ такође као половине дијагонала једнаких квадрата, и $\angle QAM = \angle MBN = \angle NCP = \angle PDQ = 90° + \alpha$, па следи да је $MN = NP = PQ = QM$. Сада на умањујући општост, доказаћемо да је један од углова једнак $90°$, што се аналогно доказује и за остале. $\angle QMN = 90° - \angle AMQ + \angle BMN$, а пошто је $\angle AMQ = \angle BMN$ следи $\angle QMN = 90°$. Овиме је завршен доказ да је $MNPQ$ квадрат. .

Задатак 913. Један оштар угао правоуглог троугла износи $\frac{1}{2}$ другог угла. Тачка M је средиште хипотенузе, а N се налази на страници AC тако да је $MN \perp AB$. Доказати да је $|AC| = 3 \cdot |MN|$.

Решење: За почетак овде можемо имати два случаја, посто није прецизно одређено коју угао је већи, тако да можемо имати да је $\alpha = 60°$ или да је $\alpha = 30°$. За први случај ћемо изабрати да је $\alpha = 30°$, а касније ћемо доказати да други случај није могућ. Продужићемо страницу BC преко темена C, и на продужетку изабрати тачку D тако да је троугао DAB једнакокрак. Видимо да је у новом троуглу AC тезхишна дуж, а такође и висина троугла, такође и DM је тежишна дуж и висина, па посто је $DM \perp AB$, следи да DM садржи N, и како је тачка N пресек тежишних дужи, она је тежиште тог троугла и дели тежишне дужи у односу $2:1$, па је $|DM| = 3 \cdot |MN|$ а познато је да су све тежишне дужи у једнакокраком троуглу једнаке, имамо да је $|AC| = 3 \cdot |MN|$. Сада ако би узели други случај, тј. да је $\alpha = 60°$, имамо да се тачка N не налази на страници AC већ на њеном продузхетку, тако да овај случај отпада.

Задатак 914. Дата је тачка A и праве m и n које се секу. Конструисати троугао ABCкоме је права m симетрала унутрашњег угла код темена B, а права n симетрала унутрашњег угла код темена C.

Решење: У овом решењу ћемо само приказати дискусију, тј. образложити начин на који би овај троугао требало конструисати. Пошто је права m симетрала унутрашњег угла код B, ако би нашли симетричну тачку A_1 тачки A у односу на m, она би се налазила на правој BC јер је троугао ABA_1 једнакокраки. Исто тако би се тачка A_2, симетрична тачки A у односу на n, налазила на правој BC. Из предходног закључујемо да права A_1A_2 од тако консруисаних тачака, сече праве m и n у тачкама B и C.

Задатак 915. Дат је једнакостранични троугао ABC и његово тежиште T. Доказати да симетрале дужи AT и BT деле страницу AB на три једнака дела.

Решење: Нека је тачка D подножје нормале из T на AB. Ако нађемо тачку E симетричну тачки T у односу на AB имамо да је $TE = AT = BT$ а лако се доказује да су троуглови ADT, TDB, ADE и DEB подударни ставом СУС, па су троуглови AET и EBT једнакостранични, и симетрале AT и BT су им тежишне дужи, као и AD и BD, па следи $|AM| = 2|MD|$ и $|BN| = 2|ND|$ из чега се добија да је $AM = MN = NB$, што је и требало доказати.

Задатак 916. Доказати да у троуглу ABC чије су странице a, b и c и t_c дужина тежишне дужи из темена C važи

$$\frac{a+b-c}{2} < t_c < \frac{a+b}{2}$$

.

Решење: За почетак ћемо доказати један део тражене неједнакости. Нека је C_1 подножје тежишне дужи t_c, из троуглова CAC_1 и CC_1B имамо да је $t_c > a - \frac{c}{2}$ и $t_c > b - \frac{c}{2}$, па ако саберемо ове две неједначине и поделимо са 2, добија се $\frac{a+b-c}{2} < t_c$. Сада други део, ако продужимо тежишну дуж t_c преко C_1 за исту дужину, тако да је $CC_1 = C_1C_2$ имамо из троугла AC_2C да је $a + b > 2 \cdot t_c$, па ако би и ту неједнакост поделили са 2 добија се други део тражене неједнакости $t_c < \frac{a+b}{2}$. Тиме је доказно да је

$$\frac{a+b-c}{2} < t_c < \frac{a+b}{2}$$

.

70.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 917. Доказати да је у правоуглом троуглу ABC где је страница AB хипотенуза, $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Задатак 918. Дат је $\angle xOy$ чији је врх ван папира, и тачка A у унутрашњој области угла. Конструисати праву OA.

Задатак 919. Конструисати троугао ABC, ако су дате три тачке, подножје тежишне дужи из темена C, подножје тежишне дужи из темеа A, и подножје висине из темена C.

Задатак 920. У равни троугла ABC дата је права p. Ако су A_1, B_1, C_1 и T_1 подножја нормала из A, B, C и T на праву p, тим редом, доказати да је $3TT_1 = AA_1 + BB_1 + CC_1$.

Задатак 921. Доказати да је тежишна дуж троугла мања од полузбира страница које полазе из истог темена као и тежишна дуж.

Литература

[1] Задаци са такмичења КММ "Архимедес".

[2] Додатна настава из математике.

Предавање 71

Апсолутне вредности

Стефан Бауа, Математичка гимназија

71.1 Теоријски увод

Дефиниција 119. Апсолутна вредност реалног броја x, ознака $|x|$, је $|x| = x$, за $x \geq 0$ и $|x| = -x$, ако је $x < 0$

Теорема 151. $|x| \leq a$ ако и само ако је $-a \leq x \leq a$

71.2 Задаци за рад

Задатак 922. Доказ теореме 1.

Решење: За свако $x \geq 0$ је $|x| = x$, па из $|x| \leq a$ следи $x \leq a$. Како је $-a < 0$, очигледно је тада $-a < x \leq a$, одакле следи $-a \leq x \leq a$. За свако $x < 0$ је $|x| = -x$, па из $|x| \leq a$ следи $-x \leq a$, однсно $-a \leq x$. Како је $x < 0$, оцигледно је $-a \leq x < a$ одакле следи $-a \leq x \leq a$. С друге стране, ако је $-a \leq x \leq a$, онда је $-a \leq -x \leq a$, одакле следи наше тврђење.

Задатак 923. Доказати тврђење $-|x| \leq x \leq |x|$.

Решење: За $x > 0$ је $|x| = x$, па важи $-x < x = |x|$, одакле следи $-|x| \leq x \leq |x|$. За $x < 0$ је $|x| = -x$, па важи $-|x| = x < |x|$, одакле опте следи $-|x| \leq x \leq |x|$.

Задатак 924. Доказати тврђење $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Решење: На основу 2. задатка имамо да важи $-|x| \leq x \leq |x|$ и $-|y| \leq y \leq |y|$. Сабирањем ових неједнакости налазимо$-(|x| + |y|) \leq$

$x+y \leq |x|+|y|$, што је према теореми 1 еквивалентно са $|x+y| \leq |x|+|y|$.

Задатак 925. Доказати тврђење $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

Решење: Ако је $x \geq 0, y \geq 0$, онда је $x \cdot y \geq 0$, па је $|x| = x, |y| = y, |x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$. Ако је $x \geq 0, y < 0$, онда је $x \cdot y \leq 0, |x| = x, |y| = -y, |x \cdot y| = -(x \cdot y) = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$. Ако је $x < 0, y \geq 0$, онда је $x \cdot y \leq 0$, па је тада $|x| = -x, |y| = -y, |x \cdot y| = (-x) \cdot y = |x| \cdot |y|$. Ако је $x < 0, y < 0$, онда је $x \cdot y > 0$, $|x| = -x, |y| = -y, |x \cdot y| = x \cdot y = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$.

Задатак 926. Нека је ш реалн број. Израчунати $\frac{x+|x|}{2}$.

Решење: x за $x \geq 0$, 0 за $x < 0$.

Задатак 927. Наћи све реалне бројеве такве да је $\frac{1}{3} < |x| \leq 3$.

Решење: $-3 \leq x < -\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{3} < x \leq 3$.

Задатак 928. Рсшити једначине $|x-3| = 5$ и $|2x+1| = 4$.

Решење: $|x-3| = 5$ ако и само ако $x-3 = -5$ или $x-3 = 5$ следи да је $x = -2$ или $x = 8$. слично као прва једначина $x = -\frac{5}{2}$ или $x = \frac{3}{2}$

Задатак 929. Решити неједначине : $|6+2 \cdot x| \leq 8$ и $|2 \cdot x - 1| > 3$.

Решење: $-8 \leq 6+2 \cdot x \leq 8 \leftrightarrow -14 \leq 2 \cdot x \leq 2 \leftrightarrow -7 \leq x \leq 1$. Слично као прва $x < -1$ или $x > 2$.

Задатак 930. Доказати да је $\frac{1}{2} \cdot (|x-y| + x + y) = max(x, y)$.

Решење: Нека је $x \geq y$. Тада је $|x-y| = x-y$, па је $\frac{1}{2} \cdot (|x-y|+x+y) = \frac{1}{2} \cdot (x-y+x+y) = x$.

Задатак 931. Проверити једнакост $|2 \cdot (-7)| = |2| \cdot |-7|$

Решење: $|2 \cdot (-7) = |-14| = 14$, $|2| = 2$, $|-7| = 7$ па је $|2||-7 = 2 \cdot 7 = 14 = |2 \cdot (-7)|$.

71.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 932. Користећи дефиницију апослутне вредности доказати $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$

Задатак 933. Израчунати $\frac{x-|x|}{2}$.

Задатак 934. Наћи све реалне бројеве x такве да је $|x| \geq 2$

Задатак 935. Решити неједначину $||x|-1| \leq 2$.

Задатак 936. Доказати да је $\frac{1}{2} \cdot (-|x-y|-(x+y)) = min(x,y)$

Литература

[1] З. Каделбург, В. Мићић, С.Огњаовић *Анализа са Алгебром 3*, Круг 2008.

[2] Ж. Ивановић, С. Огњановић *Математика 1*, Круг 2007.

Предавање 72

Примена Диофантових једначина

Љубомир Радаковић, Електротехнички факултет

72.1 Теоријски увод

Теорема 152. Ако једначина $ax + by = c$ има једно цело решење x_0, y_0, тада су сва цела решења ове једначине $x = x_0 + bt$ и $y = y_0 - at$, где је t цео број.

Теорема 153. Једначина $ax+by = c$ има решења у скупу целих бројева ако и само ако је највећи заједнички делилац бројева a и b уједно и делилац броја c.

Последица 1. Ако је $D(a, b) = 1$, једначина $ax + by = c$ има решења у скупу целих бројева.

72.2 Задаци за рад

Задатак 937. Одредити све уређене парове (p, q) простих бројева p и q, тако да је $p^2 + q = 101$.

Решење: Разликујемо два случаја: 1) Ако је $p = 2$, тада је $q = 101 - 4 = 97$, а то је прост број. 2) Ако је $p \geq 3$, тада је $q = 101 - p^2$. Пошто је p прост број већи од 3, самим тим је и непаран, па је q онда паран прост број, дакле $q = 2$. Тада је $p^2 = 99$, што нема решења у скупу простих бројева. Дакле, једино решење је $(2, 97)$.

Задатак 938. Наћи бар по 4 решења у скупу целих бројева датих једначина :

$$15x + 25y = 14,$$

$$15x + 25y = 10.$$

Решење: Прва једначина нема решења у скупу целих бројева на основу теореме, јер $D(15,25) = 5$ не дели 14. Друга једначина има решење, јер $D(15,25) = 5|10$. Можемо поделити обе стране једначине са 5 и добијамо $3x + 5y = 2$. Једно решење је приметно и то $x_0 = -1$, а $y_0 = 1$. По теореми, остала решења су облика $x = x_0 + 5k = 5k - 1$, $y = y_0 - 3k = 1 - 3k$, где је $k \in Z$.

Задатак 939. Решити у скупу природних бројева једначине:

$$1) x! + 2y = 25,$$

$$2) p^2 - x! = 2,$$

где је p прост број.

Решење: У првој једначини: $x! = 25 - 2y$, одакле закључујемо да $x!$ мора бити непаран број. Једино решење је $x = 1$, јер уколико је $x > 1$, онда је x паран број. Даље је $2y = 25 - 1 = 24 \Rightarrow y = 12$. У другој једначини, ако је $x = 1$, онда је $p^2 = 3$, стога нема решења. Ако је $x = 2$, онда је и $p = 2$. Ако је $x > 2$, онда је $p^2 > 4$, односно $p > 2$, па је лева страна једнакости непарана, а десна паран број, па нема више решења.

Задатак 940. Решити једначину у скупу природних бројева:

$$1! + 2! + \ldots + x! = y^2.$$

Решење: Ако је $x = 1$, имамо једначину $1! = y^2$, тј. $y^2 = 1$, па је и $y = 1$. Ако је $x = 2$, из $1! + 2! = y^2$, тј. из $3 = y^2$, видимо да нема решења за y. Ако је $x = 3$, имамо $1! + 2! + 3! = y^2$, односно $1 + 2 + 6 = y^2$, па је $y = 3$. Ако је $x = 4$, имамо да је $1! + 2! + 3! + 4! = y^2$, тј. $33 = y^2$, где видимо да ни за $x = 4$ y нема решења. Како је $5! = 120$, то за $x > 4$ имамо $1! + 2! + 3! + 4! + 10k = y^2$, односно $33 + 10k = y^2$, а она нема решења, јер се број $10k + 33$ завршава цифром 3, а такво y^2 не постоји.

Задатак 941. Неко је за 30 новчаница једнаке вредности купио 30 птица. За свака три врапца платио је једну новчаницу, за сваке две чавке једну новчаницу и за сваког голуба по две новчанице. Колико је купио птица од сваке врсте?

Решење: Напишимо најпре систем једначина: $x + y + z = 30$ и $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + 2z = 30$. Решавањем овог система, добија се да има $x = 9$ врабаца, $y = 10$ чавки и $z = 11$ голубова.

Задатак 942. Доказати да једначина $x^2 - 3y = 17$ нема решења у скупу целих бројева.

Решење: Број x не може бити дељив са 3, јер ни 17 није дељиво са 3. Дакле, $x = 3k \pm 1$. Тада једначина прелази у $9k^2 \pm 6k + 1 - 3y = 17$, односно $3(3k^2 \pm 2k - y) = 16$. Како је лева страна дељива са 3, а десна није, ова једначина нема решења за цео број k.

Задатак 943. Наћи збир решења једначине $x^2 + 5y = 1234567$.

Решење: Број x^2 се увек завршава цифрама $0, 1, 4, 5, 6, 9$, а број $5y$ се завршава цифром 0 или 5. Тада се збир $x^2 + 5y$ увек завршава једном од цифара $0, 1, 4, 5, 6, 9$. Једначина нема решења јер се збир завршава цифром 7.

Задатак 944. Број 2001 може се представити као збир два узастопна природна броја: $1000 + 1001 = 2001$. Утврдити на колико још различитих начина можемо број 2001 изразити као збир неколико узастопних природних бројева.

Решење: За $k \geq 3$ имамо једнакост: $(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+k) = 2001$. Одавде добијамо $(n+1+n+k)+(n+2+n+k-1)+\ldots = 2001$, односно $(2n+k+1) + (2n+k+1) + \ldots = 2001$. Збир на левој страни једнакости нам је познат: $\frac{k}{2}(2n+k+1) = 3 \cdot 23 \cdot 29$ и коначно добијамо диофанцку једначину $k(2n+k+1) = 2 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 29$. Мора бити $2n+k+1 > k$, па k узима вредности из скупа $\{2, 3, 6, 23, 29, 46, 58\}$. Из $2n + k + 1 \in \{1334, 667, 174, 138, 87, 69\}$, добија се да је $n \in \{665, 330, 75, 54, 20, 5\}$. Има укупно седам разлагања броја 2001 на збир узастопних природних бројева.

Задатак 945. Одредити природне бтојеве x, y, z такве да је:

$$x > y + 1, y > z + 1, \frac{1}{x+1} + \frac{2}{y+2} + \frac{3}{z+3} = 1.$$

Решење: Из услова следи: $x + 1 > y + 2 > z + 3$, па је $1 = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{y+2} + \frac{3}{z+3} < \frac{1}{z+3} + \frac{2}{z+3} + \frac{3}{z+3} = \frac{6}{z+3}$. Одавде је $z + 3 < 6$, тј $z < 3$. Дакле $z = 1$ или $z = 2$. Нека је $z = 2$. Дата једнакост постаје: $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{y+2} = \frac{2}{5}$. Слично претходном расуђивању закључујемо да $\frac{3}{y+2} > \frac{2}{5}$, па је $y + 2 < \frac{15}{2} = 7,5$. Како је $y + 2 > z + 3 = 5$, то је $6 \leq y + 2 \leq 7$, односно $y = 4$ или $y = 5$. Сада лако израчунамо: за $y = 4$ је $x = 14$, а за $y = 5$ за x добијамо да није природан број. Дакле решење је $x = 14, y = 4, z = 2$. Слично, за $z = 1$ добијамо још два решења: $x = 30, y = 7, z = 1$ и $x = 19, y = 8, z = 1$.

Задатак 946. Бројеви 12 и 60 имају интересантно својство: њихов производ је тачно десет пута већи од њиховог збира. Има ли још таквих парова природних бројева?

Решење: Траже се природни бројеви m и n, такви да је $mn = 10(m+n)$. Одавде имамо $mn - 10m - 10n + 100 = 100$, односно $(m-10)(n-10) = 100$. Тражени парови (m, n) су: $(11, 110), (14, 35), (15, 30)$ и $(20, 20)$.

72.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 947. Наћи број k који има особину да постаје квадрат целог броја, ако се увећа за 2 или умањи за 7.

Задатак 948. Колико решења има једначина $p^3 + 3^p = q$, ако су p и q прости бројеви?

Задатак 949. У скупу целих бројева решити једначину $xy+x-3y = 10$.

Задатак 950. Одредити све уређене парове (x, y) целих бројева x и y тако да је $7x^2 - 3y^2 = 17$.

Задатак 951. Доказати да се коцка ивице 13 може исећи на 1995 мањих коцки са ивицама дужине $1, 2$ или 3. Колико се при том добија коцки чија ивица има дужину 3?

Литература

[1] В. Стојановић, *Матхематископ 1* , Београд 2000.

[2] Друштво Математичара Србије, *Збирка решених конкурсних задатака за ученике 4-8. разреда* , Београд 1990.

[3] Друштво Математичара Србије, *1000 задатака (1988-1997. године)* , Београд 1998.

Предавање 73

Задаци везани за часовник

Љубомир Радаковић, Електротехнички факултет

73.1 Задаци за рад

Задатак 952. Четири радника треба да ураде један посао. Ако би први, други и трећи радили заједно, завршили би за 6 сати, а ако би радили први, други и четврти, завршили би за $7,5$ сати. Међутим, ако раде само трећи и четврти, за тај посао им треба 10 сати. За колико сати ће завршити ако цео посао раде сви истовремено?

Решење: Нека први, други, трећи и четврти радник раде посао редом a, b, c и d сати. То значи, да ће за 1 сат урадити редом $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ део посла. Из датих услова добијамо једначине: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{6}$, a $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{d}=\frac{1}{7{,}5}$ и $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{10}$. Ако саберемо ове једначине добијамо: $2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d})=\frac{2}{5}$, односно $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{5}$, што значи да ће сви заједно овај посао урадити за 5 сати.

Задатак 953. Два часовника су навијена 5.08.2010. године у 9 часова. Један од тих часовника је тачан, а други "жури"минут ипо (сваког часа). Када ће оба часовника опет показивати исто време (ког датума и у колико часова)?

Решење: Оба часовника ће опет показивати исто време у тренутку када други часовник (онај што жури) буде "отишао"напред за 12 часова. Пошто сваког часа други часовник жури по минут ипо, да би "отишао"напред за 12 часова (720 минута) у односу на тачан часовник, биће му потребно $720 : 1,5 = 480$ часова, одосно 20 дана. Оба часовника ће први пут опет показати исто време кроз 20 дана у 9 часова,односно 25.08.2010.

Задатак 954. Један часовничар навије 1. јануара неке године, тачно у подне, три часовника. Када их је идућег дана у подне контролисао, констатовао је да један од њих иде тачно, да је један отишао напред за 1 минут и да је један закаснио 1 минут. Ког дана и у колико часова ће ови часовници први пут поново показивати исто време? Претпоставља се да се часовници уредно навијају и све време раде истом брзином као и првог дана.

Решење: Сва три часовника показиваће исто време онда када други часовник буде отишао напред за 12 часова, а трећи заостао за исто толико. Као у претходном задатку добија се да ће сва три часовника поново показивати исто време после 720 дана, а то је тачно у подне 21. децембра идуће године, односно 20. децембра идуће године, ако је једна од ових година преступна.

Задатак 955. Један часовник заостаје две секунде за 6 дана. Колико сати ће показивати тај часовник 8.03.2010. у подне, ако је ђотеран”01.01.2010. у подне?

Решење: Од 8.03.2010. у подне до 01.01.2010. у подне има 66 дана. У 66 дана има 11 пута по 6 дана. Пошто за 6 дана часовник заостаје две секунде, за 66 дана заостаће 22 секунде. Тај часовник ће 8.03.2010. у подне показивати 11 часова 59 минута и 38 секунди.

Задатак 956. Да би се испржила једна прженица, потребно је два минута (Свака страна се пржи по један минут). Колико је најмање времена потребно да се исрже по 3 прженице, ако је у тигању могуће пржити одједном највише две прженице?

Решење: Ставимо две прженице да се прже 1 минут. Једну скинемо, додамо трећу и другу окренемо. После 2 минута друга прженица ће бити готова, њу скинемо, окренемо трећу и додамо прву. Крање, укупно нам треба 3 минута.

Задатак 957. Миша је погледао на сат и у календар и записао да је тај дан био 5.04.1997. и тачно 9 сати и 15 минута. Који је датум био и колико је сати било пре 1997 минута?

Решење: Како је 1997минута= 33сата и 17минута, то је од 5-ог априла у 0сати и 0минута протекло 9сати и 15минута и треба се вратити уназад 24сата и 2минута. До 4-ог априла у 0сати и 0 минут протекло је још 24сата и остала су још 2минута. Дакле пре 1997минута је био 03.04.1997. и било је 23сата и 58минута.

Задатак 958. Сада је тачно 9 сати. После колико времена ће казаљке први пут заклапати угао од 50°?

Решење: У 9 сати мала казаљка ”бежи”великој за 270°. Угао између казаљки се полсе 9 сати смањује да би у једном тренутку био 50°. Нека се то деси x минута после 9 сати. Док велика казаљка ”пређе”60 минута, мала ”пређе”само 5 минута, тј. велика прелази 6° у минуту, а мала само 0,5°. Тада је $270° + 0,5°x = 6°x + 50°$. Дакле $x = 40$ минута.

Задатак 959. Колико минута током једног дана можемо видети бројеве $2, 0, 0, 6$ у неком редоследу на дигиталном сату, од $00:00$ до $23:59$?

Решење: Сат може да показује следећа времена: $00:26, 02:06, 06:02, 06:20$ и $20:06$. Свако време можемо видети тачно један минут, што је укупно 5 минута.

Задатак 960. Бакин ручни часовник током једног сата жури један минут. Дедин џепни часовник, насупрот бакином, током једног сата касни пола минута. Јуче увече сам их посетио и наместио сам оба сата. Рекао сам им да ћу их следећи пут најраније посетити кад дедин сат буде показивао један сат мање од бакиног. Колико ће сати проћи између моје две посете?

Решење: Нако сваког сата разлика времена са два часовника повећаваће се за $1,5$ минут. Разлика ће бити тачно један сат након $60 : 1,5 = 40$ сати.

Задатак 961. Милан је кренуо у Шабац на "Летњу школу"неколико минута пре 9 часова, а када је стигао, у неколико минута пре 12 часова, мала и велика казаљка су замениле места. Колико је времена Милан провео на путу и када је кренуо?

Решење: Велика казаљка обиђе пун круг док мала пређе $\frac{1}{12}$ круга (5мин). Ако са x означимо број минута које је Милан провео у путу, закључујемо да је за то време мала казаљка прешла $\frac{x}{12}$ минутних подеока, па је $x - 120 + \frac{x}{12} = 60$. Одавде је $x = \frac{12}{13} \cdot 180 = 2^h 46\frac{2}{13}$мин. Ако је Милан кренуо у y минута до 9, тада ће до 9^h велика казаљка прећи y минутних подеока, а мала $\frac{y}{12}$ минутних подеока. Како је растојање између казаљки $\frac{180}{13}$ минутних подеока, то је $\frac{180}{13} - \frac{y}{12} + y = 15$, одакле је $y = \frac{12}{11} \cdot \frac{15}{13}$.

73.2 Задаци за домаћи рад

Задатак 962. Ако је данас 14.08.2010. и тачно 9 сати и 30 минута, који ће датум бити кроз 2010сати и 2010минута?

Задатак 963. Три радника треба да ураде један посао. Ако би први и други радили заједно, завршили би за 6 сати, а ако би радили први и трећи, завршили би за $7,5$ сати. Међутим, ако раде трећи и други, за тај посао им треба 10 сати. За колико сати ће завршити ако цео посао раде сви истовремено?

Задатак 964. Колико пута мала и велика казаљка направе угао од 90° у периоду од 6 сати изјутра до 12 сати поподне?

Задатак 965. Сада је тачно 12 сати. После колико времена ће казаљке први пут заклапати угао од 120°?

Задатак 966. Шесторка цифара $abcdef$ представља време на дигиталном часовнику. При томе цифре ab одређују број сати од 00 до 23, цифре cd одређују број минута од 00 до 59 и цифре ef одређују број секунди ок 00 до 59. Колико има оваквих шесторки за које и шесторка цифара $fedcba$ представља време које се може прочитати на дигиталном часовнику?

Литература

[1] В. Стојановић, *Матхематископ 1* , Београд 2000.

[2] Друштво Математичара Србије, *Збирка решених конкурсних задатака за ученике 4-8. разреда* , Београд 1990.

[3] Друштво Математичара Србије, *1000 задатака (1988-1997. године)* , Београд 1998.

Предавање 74

Дељивост и прости бројеви

Невена Николић, Математичка гимназија

74.1 Теоријски увод

Дефиниција 120. Цео број a дељив је целим бројем b, различитим од нуле, ако постоји цео број c такав да је $a = bc$. Ако је a дељив бројем b, писаћемо $b|a$ ("b дели a").

Дефиниција 121. Цео број $p > 1$ је прост ако p нема ниједан делилац d $1 < d < p$. Цео број $m > 1$ је сложен ако није прост.

Теорема 154. 1° Ако $b|a$ онда $b|ac$ за свако $c \in \mathbf{Z}$.
2° Ако $a|b$ и $b|c$, онда $a|c$.
3° Ако $a|b$ и $a|c$, онда $a|bx + cy$ за све $x, y \in \mathbf{Z}$
4° Ако $a|b$ и $b|a$, онда је $a = b$ или $a = -b$.
5° Ако за позитивне бројеве a, b важи $a|b$, онда је $a \leq b$.

Теорема 155. Ако се у једнакости облика $a_1 + a_2 + ... + a_k = 0$ за све сабирке осим једног зна да су дељиви простим бројем p, тада је и тај сабирак дељив са p.

Теорема 156. Сваки цео број a може се представити на јединствен начин помоћу датог броја b у облику $a = bq + r$, $0 \leqslant r < b$, где су q и r цели бројеви. Притом се r назива остатком при дељењу броја a бројем b.

Дефиниција 122. Цео број d је заједнички делилац бројева a и b ако $d|a$ и $d|b$.Највећи међу заједничким делиоцима бројева a и b је највећи заједнички делилац бројева a и b. Обележавамо га са (a, b). a и b су узајамно прости када је $(a, b) = 1$.

Дефиниција 123. Ако бројеви x, y, z задовољавају једначину $x^2 + y^2 = z^2$, тада они представљају Питагорину тројку.

Теорема 157. Све Питагорине тројке су облика

$$(x, y, z) = (2mnd, (m^2 - n^2)d, (m^2 + n^2)d)$$

или

$$(x, y, z) = ((m^2 - n^2)d, 2mnd, (m^2 + n^2)d),$$

где је $(m, n) = 1$.

Теорема 158. Сваки прост број већи од 3 има облик $6k - 1$ или $6k + 1$.

Теорема 159. (Мала Фермаова теорема) За прост број p и природан број n важи да n^{p-1} при дељењу са p даје остатак 1, ако је $(n, p) = 1$.

74.2 Задаци за рад

Задатак 967. посматрајмо бројеве 49, 4489, 444889..., који се добијају ако се између цифара броја 49 упише број 48, а затим настави са уписивањем броја 48. Доказати да су сви добијени бројеви тачни квадрати.

Решење: Уочимо правилност; сваки број зе записан помоћу n четворки, $n-1$ осмице и деветке на крају. Дакле, сваки број је облика $\frac{10^n-1}{9} \cdot 4 \cdot 1^n + \frac{10^{n-1}-1}{9} \cdot 8 \cdot 10 + 9 = \frac{1}{9} \cdot (10^{2n} \cdot 4 + 4 \cdot 10^n + 1) = (\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3})^2$. Како је $2 \cdot 10^n + 1$ дељиво са 3, овим је доказ завршен.

Задатак 968. . Доказати да за сваки природан број n постоји природан број m и бројеви $c_1, c_2, ...c_m \in 1, -1$, такви да важи $n = c_1 \cdot 1^2 + c_2 \cdot 2^2 ... c_m \cdot m^2$.

Решење: Решићемо проблем методом математичке индукције са кораком 4. 1° база: $n = 1$, $1 = 1 \cdot 1^2$; $n = 2$, $2 = (-1) \cdot 1^2 + (-1) \cdot 2^2 + (-1) \cdot 3^2 + 1 \cdot 4^2$;$n = 3$, $3 = (-1) \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2$; $n = 4$,$4 = 1 \cdot 1^2 + (-1) \cdot 2^2 + (-1) \cdot 3^2 + 1 \cdot 4^2$
2° индуктивна претпостака за n, постоји природан број m и бројеви $c_1, c_2, ...c_m \in 1, -1$, такви да важи $n = c_1 \cdot 1^2 + c_2 \cdot 2^2 ... c_m \cdot m^2$
3° индуктивни корак за $n + 4$,

$$n + 4 = c_1 \cdot 1^2 + c_2 \cdot 2^2 ... c_m \cdot m^2 + 4 = c_1 \cdot 1^2 + c_2 \cdot 2^2 ... c_m \cdot m^2$$

$$+1 \cdot (m+1)^2 + (-1) \cdot (m+2)^2 + (-1) \cdot (m+3)^2 + 1 \cdot (m+4)^2.$$

Овим је доказ завршен.

Задатак 969. Доказати да број $M = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ (n је природан број), не може бити цео број.

Решење: Нека је k највећи цео број за који је $2^k \leqslant n$ и P производ свих непарних бројева који нису већи од n. Претпоставимо супротно, да је M цео број. Тада је $2^{k-1}PM$ цео. Међтим, он представља суму чији су сви сабирци цели осим $2^{k-1}P\frac{1}{2^k} = \frac{P}{2}$. Контрадикција.

Задатак 970. Нека су $a, b, c \in \mathbf{N}$ такви да је $\frac{ab}{a-b} = c$ и $(a, b, c) = 1$. Доказати да је $a - b$ потпун квадрат.

Решење: Претпоставимо да $a - b$ није потпун квадрат. Тада постоји прост број p и природан број k, такви да $p^{2k-1} || a - b$. Из $a - b | ab$ следи $p^{2k-1} | ab$, па је бар један од бројева a, b дељив са p^k. Међутим из $p^{2k-1} | a - b$ следи да исто важи и за други од тих бројева, па $p^{2k} | ab$. Али тада $p | c$ па бројеви нису узајамно прости. Контрадикција.

Задатак 971. Решити једначину $(p - 1)! + 1 = p^m$, при чему је p прост, а m природан број.

Решење: За прва три проста броја добијамо следећа решења: $(p, m) \in \{(2, 1), (3, 1), (5, 2)\}$. Покажимо да једначина нема решења за $p > 5$. $(p - 1)! = p^m - 1$, тј. $(p - 2)! \cdot (p - 1) = (p - 1) \cdot (p^{m-1} + ... + p + 1)$. Како је p прост и $p > 5$ имамо да је $p - 1$ сложен, па га можемо представити као производ $p - 1 = d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_k$. Сваки од чинилаца је мањи од $p - 1$, па се мора налазити у $(p - 2)!$ бар једанпут, па следи $p - 1 | p^{m-1} + ... + p + 1$. Како је остатак при дељењу p^i са $p - 1$ једнак 1, добијамо да $p - 1 | 1 + 1 + ... + 1$ (m пута), тј. $p - 1 | m$, па је $m \geq p - 1$. Одатле је $p^m \geq p^{p-1} > (p - 1)! + 1$ за $p > 5$, па једначина у овом случају нема решења. Неједнакост $n^{n-1} > (n - 1)! + 1$, за $n \geq 3$ се доказује математичком индукцијом.

Задатак 972. Наћи сва решења једначине $x^2 + y^2 + z^2 = 2004 \cdot x \cdot y \cdot z \cdot$ у скупу $\mathbf{Z}$.

Решење: Једначина има тривијално решење $x = y = z = 0$, у супротном ни један од x, y, z није једнак нули. Израз са десне стране дељив је са 4. ако потпун квадрат дај остатке 0 и 1 при дељењу са 4 добијамо да сва три броја, x, y, z, морају бити парни. Дакле: $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$. Уврстимо ово у полазну једнакост и добијамо $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4008 \cdot x_1 \cdot y_1 \cdot z_1 \cdot$. Сада аналогно добијамо да су сви x_1, y_1, z_1 парни. Нека је k највећи степен броја 2 који дели x. Понављајући овај поступак $k + 1$ пута добијамо да $2^{k+1} | x$. Контрадикција.

Задатак 973. Дата је кружница k која садржи темена квадрата странице 7. Једно теме квадрата налази се у координатним почетку, а две странице леже на x и y координати, редом. Одредити све целобројне тачке координатног система које садржи k.

Решење: Нека су x и y координате тачке са ђесне" полукружнице.(када добијемо њихов број, решење ће бити два пута већи број, јер је "лева" поукружница симетрична) За њих важи $(x - \frac{7}{2})^2 + (y - \frac{7}{2})^2 = r^2 = \frac{7^2}{2}$. Када обе стране помножимо са 4, добијамо израз типа $a^2 + b^2 = 2c^2$, нека је $a_1 = \frac{a+b}{2}$ и $b_1 = \frac{a-b}{2}$, сада је $a_1^2 + b_1^2 = c^2$. Последњи израз представља Питагорину тројку. Када извршимо ову трансфомацију, наш добијени израз изгледа овако: $(x + y - 7)^2 + (x - y)^2 = 7^2$. Дакле, проверавамо два

случаја:
1° $7=(m^2+n^2)d$, $x+y-7=(m^2-n^2)d$, $x-y=2mnd$ важи $(m,n)=1$,, како m^2+n^2 не може бити 7, следи да је $d=7, m=1, n=0$, $x=7, y=7$.
2° $7=(m^2+n^2)d$, $x+y-7=2mnd$, $x-y=(m^2-n^2)d$ важи $(m,n)=1$, решавањем добијамо $x=7, y=0$.
овим смо добили све целобројне тачке које припадају ђесној" плукружници, њима симетричне на "левој" полукружници су $(0,0)$ и $(0,7)$. Дакле, укупно их има само 4.

Задатак 974. Одредити n тако да важи $n|2^n-1$

*Решење:*Нека је p најмањи прост број, тд. $p|n$, тада важи и $p|2^n-1$. Знамо да $p|2^{p-1}-1$ (Мала Фермаова теорема). Из ове две дељивости следи да $p|NZD(2^n-1, 2^{p-1}-1)$. За наставак нам је потребна следећа лема:

Лема 16. За природне бројеве a,l,k важи $(a^k-1, a^l-1)=a^{(k,l)}-1$

Доказ: за $k=l$ тривијално. Без умањења општости можемо узети да је $k>l$. Следи

$$(a^k-1, a^l-1)=(a^k-a^l, a^l-1)=(a^{k-l}-1, a^l-1)=...=a^{(k,l)}-1$$

по Еуклидовом алгоритму. Дакле, уз помоћ леме добијамо $p|2^{(p-1,n)}-1$. Како је $(p-1,n)=1$ следи $p|2-1=1$. Овим је доказано да не постоји n које задовољава услов.

Задатак 975. Доказати да има бесконачно много простих бројева облика $6k+5$.

Решење: Претпоставимо супротно тврђењу задатка, да постоји само коначно много простих бројева датог облика. Нека су то бројеви $p_1, p_2, ..., p_n$. Тада је број $6P-1$ сложен, где је $P=p_1\cdot p_2\cdot ...\cdot p_n$. Број $6P-1$ има прост делилац облика $6l-1$ (у супротном сви би били облика $6l+1$, али тада би и сам број био тог облика)

Задатак 976. Доказати да број $(n+2)^4-n^4$ ни за један природан број n није куб природног броја.

Решење: $(n+2)^4-n^4=((n+2)^2-n^2)((n+2)^2+n^2)=8(n+1)(n^2+2n+1)=8((n+1)^3+(n+1))=8(k^3+k)$, где је $k=n+1$. Број k^3+k не може бити потпун куб јер се налази између два узастопна потпуна куба, тј. $k^3<k^3+k<(k+1)^3$.

74.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 977. Наћи све природне бројеве b за које постоји a тако да $b|a^2+1$ и $b|a^3-1$.

Задатак 978. Ако је p прост број већи од 3, доказати да се број $4p^2+1$ може представити као збир квадрата три различита природна броја.

Задатак 979. Нека је a природан број већи од 1. Доказати да је број $n(2n+1)(3n+1)...(an+1)$ дељив свим простим бројевима мањим од a, за сваки природан број n.

Задатак 980. Доказати да има бесконачно много простих бројева облика $4k+3$.

Задатак 981. Ако су $p_1, p_2, ..., p_n$ различити прости бројеви, доказати да $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_n}$ није цео број.

Литература

[1] В. Драговић, Ђ. Дугошија, П. Младеновић *Републичка и савезна такмичења из математике*, Материјали за младе математичаре свеска 39, Београд 2002.

[2] В.В. Прасолов, *Problems in plane and solid geometry*, електронско издање.

[3] Додатна настава у Математичкој гимназији

[4] Сајт *http://srb.imomath.com/*

[5] Редовна настава у Математичкој гимназији

Предавање 75

Дирихлеов принцип

Невена Николић, Математичка гимназија

75.1 Теоријски увод

Дефиниција 124. Нека је $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ разбијање $(nk+1)$-скупа C на k блокова. Тада бар један од скупова $A_1, A_2, ..., A_k$ садржи не мање од $n+1$ елемената.

75.2 Задаци за рад

Задатак 982. Природни бројеви од 1 до $2n$ написани су у произвољном поретку, а затим је испод сваког од њих написан његов редни број у том низу. Сваки је члан притом сабран са својим редним бројем. Доказати да међу тако добијеним бројевима (збировима) постоје два чија је разлика дељива са $2n$.

Решење: Нека су добијени збирови $s_1, s_2, ..., s_{2n}$. Претпоставимо да они при дељењу са $2n$ дају различите остатке. Ти остаци би тада били $0, 1, 2, ..., 2n-1$ (укупно $2n$ различитих остатака) и њихов збир би износио $S = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$. С друге стране имамо: $T = s_1 + s_2 + ... + s_{2n} = 2\frac{2n(2n+1)}{2} = 2n(2n+1)$. Разлика сваког од бројева $s_1, s_2, ..., s_{2n}$ и његовог остатка при дељењу са $2n$ дељива је са $2n$. Зато је и разлика $T - S$ дељива са $2n$. Како је $T - S = n(2n+3)$ и $n(2n+3)$ је број који није дељив са $2n$, не могу сви остаци бити различити, већ постоје бар два међусобно једнака. Разлика та два дељива је са $2n$ и тиме је доказано тврђење задатка.

Задатак 983. Дат је квадрат странице 2 и унутар њега 2005 тачака тако да никоје три нису колинеарне. квадрат је подељен на троуглове чија су темена све дате тачке и сва темена квадрата. Странице троуглова се међусобно не секу. Доказати да постоји троугао чија поврсхина није већа од $\frac{1}{1003}$.

Решење: Одредимо најпре колико има троуглова на које је квадрат подељен. Свака тачка унутар квадрата доприноси са $360°$, а свако теме квадрата са $90°$. Како је збир углова у сваком роуглу $180°$, тражени број троуглова је $\frac{2005\cdot 360°+4\cdot 90°}{180°} = 4012$. Претпоставимо сада супротно тврђењу задатка, да је површина сваког од датих троуглова већа од $\frac{1}{1003}$. Тада би збир свих површина био већи од $4012 \cdot \frac{1}{1003} = 4$. дакле постоји троугао чија површина није већа од $\frac{1}{1003}$.

Задатак 984. Доказати да постоји степен броја 3 чији се десетични запис завршава са 0001.

Решење: Посматрајмо низ четвороцифрених бројева 0003, 0009, 0027, 0081..., који представља последње четири цифре бројева (редом): $3, 3^2, 3^3$... Како постоји 10^4 могућности за бројеве у низу, онда засигурно постоје члана низа који су међусобно једнаки. Нека су то 3^k и 3^m, $(k > m)$. Тада је $3^k - 3^m = 10000n$, где је n ненегативан цео број. Лева страна једнакости дељива је са 3^m. Према томе, n мора бити дељиво са 3^m. Након дељења обе стране једнакости са 3^m добијамо следећи израз: $3^{k-m} - 1 = 10000s$, где је $s = \frac{n}{3^m}$. Дакле, $k-m$ је тражени степен броја 3 чији се десетични запис завршава са 0001. Овим је доказано тврђење задатка.

Задатак 985. У правоугаонику 3×4 уочено је 6 тачака. Доказати да се међу њима могу наћи две тачке са међусобним растојањем не већим од $\sqrt{5}$.

Решење: Правоугаоник се издели на 5 делова од којих су три петоуглови са страницама $1, 2, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}$ а два дела су половине тог петоугла. Дијаметар сваког од делова је $\sqrt{5}$. По Дирихлеовом принципу најмање две тачке припадају истом делу. Тиме је тврђење задатка доказано.

Задатак 986. Шахиста игра сваког дана бар једну партију шаха, али не више од 12 недељно. Доказати да је могуће наћи неколико узастопних дана у току којих је шахиста одиграо тачно 20 партија.

Решење: Нека бројеви $a_1, a_2, ..., a_{77}$ представљају број одиграних партија током првог дана, прва 2 дана,..., првих 77 дана (11 недеља) редом. Посматрајмо бројеве следећа два низа: $a_1, a_2, ..., a_{77}; a_1 + 20, a_2 + 20, ..., a_{77} + 20$, овде имамо 154 природна броја. Како a_{77} није веће од 132, ниједан од напред написаних бројева није већи од 152. Како их има $154 > 152$, бар два су иста (Дирихлеов принцип). Како бројеви у сваком низу морају бити међусобно различити (јер шахиста сваког дана одигра бар једну партију) следи да је неки члан првог низа једнак неком члану другог низа. Дакле, постоје природни бројеви k и l тд. $a_k = a_l + 20$ па је $a_k - a_l = 20$ што значи да је шахиста у току року од $k-l$ дана (од $(l+1)$-ог до k-ог) одиграо тачно 20 партија.

Задатак 987. Имамо $2k+1$ картица, нумерисаних природним бројевима од 1 до $2k+1$. Колико се највише картица може изабрати тако да ниједан од бројева, написаних на извученим картицама, не буде једнак збиру друга два броја са изабраних картица?

Решење: Лако се уочи да тражену особину имају картице с бројевима: $k+1, k+2, ..., 2k+1$ (свега $k+1$ картица). Претпоставимо да је могуће изабрати $k+r$ картица тако да је $r > 1$ које задовољавају услов задатка. Нека је n највећи број са изабраних картица. Посматрајмо разлике између броја n и преосталих бројева са изабраних картица. Разлика има $k+r-1$ и оне морају бити написане на преосталих $2k+1-(k+r)$ картица, тј. мора бити $k+r-1 <= 2k+1-(k+r)$, одакле је $r \leq 1$. Ово је противуречно нашој претпоставци. Дакле, највише се може изабрати $k+1$ картица које задовољавају услове задатка.

Задатак 988. У равни је дато 15 тачака, таквих да међу било које три постоје две чије је растојање мање од 1. Доказати да можемо натји осам тачака садржаних у кругу полупечника 1.

Решење: Нека су дате тачке $A_1, A_2, ..., A_{15}$. Како 15 тачака одређују 105 дужи (коначан број), то постоји дуж која је највећа од њих. Нека је то дуж A_kA_j. Ако је дуж A_kA_j мања од или једнака 1,онда су 14 тачака у кругу чији је центар тачке A_k, а полупречник 1. Ако је A_kA_j веће од 1, онда се конструишу кругови k_1 и k_2 са центрима у A_k и A_j, редом, и полупречницима дужине 1.Свака од преосталих 13 тачака се налази бар у једном од ова два круга, па се (према Дирихлеовом принципу) бар осам налазе у једном од њих. Овим је доказ завршен.

Задатак 989. На првенству града из кошарке свака екипа са сваком игра по једну утакмицу. Сваки пут када гледалац погледа на сат испостави се да бар две екипе имају исти број одиграних утакмица. Да ли је то случајност?

*Решење:*Нека је n број екипа. У сваком тренутку, свака екипа може имати најмање нула, а највише $n-1$ одиграних утакмица (дакле, n могућности). Ако нека екипа није одиграла ни једну утакмицу, не може постојати екипа која је одиграла $n-1$ утакмицу, и обратно. Тако да имамо $n-1$ могућности за број одиграних утакмица сваке екипе. Како екипа има $n > n-1$ (према Дирихлеовом принципу) бар две имају једнак број одиграних утакмица. Дакле, то није случајност.

Задатак 990. Квадрат површине P прелепљен је стикерима укупне површине веће од $2010P$. Број стикера је 2011. Доказати да постоји тачка квадрата преко које су залепљени сви стикери.

Решење: Претпоставимо супротно тврђењу задатка, да је свака тачка прелепљена са највише 2010 стикера. Укупна површина свих стикера била би највише $2010P$. Контрадикција.

Задатак 991. Дат је круг пречника $R = 3$ и у њему неколико мањих кругова. Збир пречника свих кругова је 25.Доказати да за сваку праву која припада равни кругова постоји њој паралелна тако да сече бар 9 малих кругова.

Решење: Уочимо произвољну праву p у равни кругова. Нека је p_1 права нормална на уочену. Извршимо пројекције великог и свих малих кругова на праву p_1. Сваки круг се пројектује у дуж дужине пречника круга исве пројекције се налазе на дужи дужине 3 (пречник великог круга).Како је $25 > 3 \cdot 8$ (према Дирихлеовом принципу) постоји тачка, назовимо је A, која је "покривена"са бар 9 пројекција. Тада је тражена права она која садржи тачку A и нормална је на p_1. Та права је паралелна са полазном p.

75.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 992. Ако је k природних бројева поређано на произвољан начин у низ, доказати да у том низу увек постоји неколико узастопних бројева чији је збир дељив са k.

Задатак 993. Имамо kn куглица у n различитих боја, при чему једнако од сваке боје. Ма како оне биле распоређене у n кутија по k куглица у свакој, увек је могуће из сваке кутије извући по једну куглицу, тако да буду заступљене све боје. Доказати.

Задатак 994. Шест тачака размештено је тако да никоје три нису колинеарне. Св тачке су спојене дужима које су притом обојене у једну од две различите боје. Доказати да постоји "једнакобојни"троугао.

Задатак 995. У квадрату странице 1 узета је произвољно 101 тачка (неке могу бити и на страницама), никоје три колинеарне. Доказати да постоји троугао с теменима у тим тачкама чија површина није већа од 0,01.

Задатак 996. Доказати да се у круг полупречника 9 не може сместити 400 тачака, тако да ратојање између сваке две тачке буде веће од 1.

Литература

[1] Б. Маринковић, ЂИРИХЛЕОВ ПРИНЦИП"Архимедесови материјали за младе математичаре свеска 30, Београд 1990 .

[2] ДМС, "1000 ЗАДАТАКА",Материјали за младе математичаре свеска 39, Београд 2006.

[3] Додатна настава у Математичкој гимназији

[4] Сајт *http://srb.imomath.com/*

[5] В. драговић, Ђ. Дугошија, П. Младеновић *Republichka i savezna takmichenja iz matematike*, Материјали за младе математичаре свеска 39, Београд 2002.

[6] Редовна настава у Математичкој гимназији

Део VII

Предавања за 5. разред

Предавање 76

Проблемски задаци са једначинама

Петар Радовановић, Математичка гимназија

76.1 Теоријски увод

Дефиниција 125. Једначина $ax = b$ има јединствено решење $x = \frac{b}{a}$, ако је $a \neq 0$,(одређена је).

Дефиниција 126. Једначина $0 \cdot x = b$, где је $b \neq 0$, нема решења (немогућа је, није сагласна).

Дефиниција 127. Једначина $0 \cdot x = 0$ је идентичност и задовољена је за сваки реалан број x (неодређена је).

При решавању једначина користимо, између осталих, и особину да су једнакости сагласне са основним операцијама. Могу се сабирати, одузимати, а такође се могу множити и делити бројевима или изразима који нису једнаки нули.

76.2 Задаци за рад

Задатак 997. Пет волова и два овна коштају 11 златника, а осам овнова и два вола коштају 8 златника. Колико кошта во, а колико ован?

Решење: Како 2 вола и осам овнова коштају 8 златника, то 1 во и 4 овна коштају 4 златника, а 5 волова и 20 овнова коштају 20 златника. Ако 5 волова и 20 овнова коштају 20 златника, а 5 волова и 2 овна коштају 11 златника, онда $20 - 2 = 18$ овнова кошта 9 златника, па један ован кошта пола златника, а један во $4 - 4 \cdot 0,5 = 2$ златника.

Задатак 998. Влада Нада и Јагода су зарадили заједно 6000 динара. Влада је зарадио $\frac{5}{7}$ суме коју су зарадиле Нада и Јагода, а Нада је зарадила за $\frac{1}{4}$ новца мање од Јагоде. Колико је свако од њих зарадио?

Решење: Ако је Јагода зарадила $4x$, тада је Нада зарадила $3x$ динара, а заједно су зарадиле $7x$. Како је Влада зарадио њихових $\frac{5}{7}$ он је зарадио $5x$ динара, а заједно су зарадили $12x = 6000$ динара. Одавде је $x = 500$, па је Нада зарадила 1500, Јагода 2000, а Влада 2500 динара.

Задатак 999. Неки посао Душко би завршио за 12 дана, Ташко за 15 дана, а Рашко за 20 дана. Радили су заједно 4 дана, а потом је остатак посла завршио Ташко. Колико дана је укупно радио Ташко?

Решење: За један дан Душко заврши $\frac{1}{12}$, Ташко $\frac{1}{15}$, а Рашко $\frac{1}{20}$ посла, а сви заједно $\frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$ посла. За 4 дана завршиће $\frac{4}{5}$ посла, а преосталу петину посла Ташко ће завршити за $\frac{1}{5} : \frac{1}{15} = 3$ дана, па ће укупно радити 7 дана.

Задатак 1000. За зимовање се пријавило $\frac{2}{9}$ ученика више него што је планирано. Пред полазак, због болести, $\frac{3}{11}$ пријављених је морало да одустане од пута, тако да је на зимовање отишло 8 ученика мање него што је планирано. Колико је планирано, а колико је ученика отишло на зимовање?

Решење: Нека је број планираних ученика x. Тада је број пријављених ученика $\frac{11}{9}x$, а на зимовање је отишло $\frac{8}{11} \cdot \frac{11}{9}x = \frac{8}{9}x$ ученика. Решење једначине $x - 8 = \frac{8}{9}x$ је $x = 72$. Дакле, број планираних ученика је 72, а на зимовање је отишло 64 ученика.

Задатак 1001. Ђорђе је купио пун џеп чоколадица. Најпре је срео Ану и дао јој половину свих чоколадица и још пола од једне чоколадице. Затим је срео Бану и дао јој половину преосталих чоколадица и још пола од једне. На крају, када је срео Цану и дао јој половину чоколадица које су му преостале и још пола од једне и џеп му је остао празан. Колико чоколадица је купио Ђорђе?

Решење: Ако се крене од краја, након сусрета са Цаном, Ђорђе је остао без чоколаде. Цани је дао половину свих које је имао у џепу и још пола од једне: $x - (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) = 0$. Следи да је $x = 1$. Из овога се јасно види да је након сусрета са Баном имао једну чоколадицу. Ако је пре сусрета са Баном имао y чоколадица, онда је $y - (\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}) = 1$, па је $y = 3$, па су након сусрета са Аном Ђорђу преостале 3 чоколадице. Ако је укупан број чоколадица n, јасно је да је $n - (\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}) = 3$, па је $n = 7$.

Задатак 1002. Лопта која слободно пада сваки пут одскочи од земље до висине за $\frac{3}{5}$ мање од висине са које пада. Ако је у трећем одскоку достигла висину од $32cm$, наћи дужину пута Који ће лоптица прећи до момента када четврти пут падне на земљу.

Решење: Да би у трећем одскоку лоптица достигла $32cm$, она у другом одскоку мора да достигне висину x која задовољава услов $\frac{2}{5}x = 32cm$. Одавде је $x = 80cm$. Слично, за други одскок од $80cm$ потребно је да је висина првог одскока $200cm$, а за први одскок од $200cm$ потребно је да лоптица падне са $500cm$. Пут који лоптица превали док није четврти пут додирнула земљу је $s = 500+2\cdot200+2\cdot80+2\cdot32 = 1124cm$.

Задатак 1003. На две гомиле се налазе кликери тако да се број кликера на првој гомили према броју кликера који се налазе на другој гомили односи као 4 према 3. Ако се два кликера са једне гомиле преместе на другу гомилу нови однос је 3 према 2. Колико је кликера било на свакој од гомила?

Решење: Како је $\frac{4}{3} < \frac{3}{2}$, то се та два кликера премештају са мање на већу гомилу. Ако са x означимо укупан број кликера, онда се на већој гомили налази $\frac{4}{7}x = \frac{20}{35}x$ кликера. Премештањем два кликера на већој гомили ће бити $\frac{3}{5}x = \frac{21}{35}x$ кликера. Дакле, два кликера представљају $\frac{1}{35}x$ па има 70 кликера.

Задатак 1004. Велики миксер у фабрици еурокрема напуни се славином за течну црну чоколаду за 23 минута, а славином за течну белу чоколаду за 17 минута. После колико времена од отварања славине за црну треба отворити славину за белу чоколаду, тако да у миксеру који је на почетку био празан, на крају буде 2,5 пута више црне него беле чоколаде?

Решење: У пуном миксеру укупна количина чоколаде је 3,5 пута већа од количине беле чоколаде. Због тога ће црне чоколаде бити $\frac{5}{7}$, а беле $\frac{2}{7}$ од пуног миксера. Зато је потребно да славина за црну чоколаду буде отворена $\frac{5}{7}\cdot 23$ минута, а за белу $\frac{2}{7}\cdot 17$ минута. Пошто је $\frac{5}{7}\cdot 23 - \frac{2}{7}\cdot 17 = \frac{81}{7}$, славину за белу чоколаду треба отворити$11\frac{4}{7}$ минута након отварања славине за црну чоколаду.

Задатак 1005. На столу су три свеће једнаких дужина, али неједнаких дебљина. Јагода је у $8h$ упалила прву свећу, а после једног сата и друге две. Сат после тога су се изједначиле по дужини прва и трећа свећа. Када ће се изједначити по дужини прва и друга свећа ако трећа цела изгори за 8 сати, а друга цела изгори за 12 сати?

Решење: Прва и трећа свећа су се изједначиле по дужини пошто је прва горела 2 сата, а трећа 1 сат. Прва свећа, дакле, гори два пута спорије од треће, па ће изгорети за 16 сати. Прва свећа ће за 4 сата изгорети четвртину своје дужине. За то време друга ће горети три сата и такође изгорети четвртину своје дужине. Тада, у $12h$, ће се ове две свеће изједначити по дужини.

Задатак 1006. У свакој клупи у разреду седе највише два ученика. Познато је да $\frac{2}{3}$ укупног броја дечака седи у клупама са $\frac{3}{5}$ укупног броја девојчица. Који део ученика седи у пару дечак-девојчица?

Решење: Нека је p број парова дечак-девојчица који седе заједно. Значи, број ученика у паровима је $2p$. Нека су m и n бројеви дечака, односно девојчица. Тада је $p = \frac{2}{3}m$ и $p = \frac{3}{5}n$, одакле је $m = \frac{3}{2}p$ и $n = \frac{5}{3}p$. Укупан број ученика у одељењу је $m+n = \frac{19}{6}p$. Сада је $\frac{2p}{\frac{19}{6}p} = \frac{12}{19}$. Дакле, $\frac{12}{19}$ од укупног броја ученика седи у мешовитим паровима.

76.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 1007. После очеве смрти синови поделе наследство на следећи начин: најстарији узме 100 милиона и шестину остатка, други узме 200 милиона и шестину остатка, трећи 300 милиона и шестину остатка... На крају се испоставило да је сваки од синова добио исту суму. Колико је браће било и колико је наследство сваки од њех добио?

Задатак 1008. Трговачки путник је на пословни састанак кренуо аутомобилом. У току првог сата превезао је $60km$. Тада је израчунао да ће за 30 минута закаснити на састанак ако пут настави истом брзином. Због тога је брзину повећао на $80km/h$ и стигао је 40 минута раније на циљ. Колико је далеко путовао?

Задатак 1009. Комад легуре цинка и бакра, масе $40kg$, кад се сасвим потопи у воду, изгуби у маси $5kg$. Наћи колико у њему има цинка, а колико бакра, ако је познато да у води цинк губи $14\frac{2}{7}\%$, а бакар $11\frac{1}{9}\%$ своје масе.

Задатак 1010. Посуда је напуњена стопроцентним алкохолом. Одлијемо 2 литра алкохола и долијемо исто толико дестиловане воде. Овај поступак поновимо још једном, тј. одлијемо 2 литра мешавине и додамо 2 литра дестиловане воде. На тај начин у посуди добијемо 36 процентни раствор алкохола. Колико литара раствора садржи ова посуда?

Задатак 1011. Предња гума мотоцикла се истроши после пређених $25000km$, а задња после $15000km$. После колико километара треба променити гуме да би се обе истовремено истрошиле? Када мора узети нове гуме?

Литература

[1] Миодраг Петковић, Занимљиви математички проблеми, Научна књига 1985.

[2] Војислав Андрић, Математика $X = 1236$, Круг 2006.

[3] Владимир Стојановић, Математископ 2 - Стазама шампиона, Математископ 1999.

[4] Владимир Стојановић, Математископ 3 , Математископ 1999.

[5] Задаци са такмичења

Предавање 77

Дељивост

Милош Милосављевић, Математичка Гимназија

77.1 Теоријски увод

Теорема 160. Број је дељив са 3 ако му је збир цифара дељив са 3.

Теорема 161. Број је дељив са 9 ако му је збир цифара дељив са 9.

Теорема 162. Број је дељив са 4 ако му је двоцифрени завршетак дељив са 4.

Теорема 163. Број је дељив са 5 ако му је последња цифра 0 или 5.

Теорема 164. Број је дељив са 10 ако му је последња цифра 0.

Теорема 165. Број је дељив са 8 ако му је троцифрени завршетак дељив са 8.

Теорема 166. Број је дељив са 11 ако му је разлика збира цифара на непарним и збира зифара на парним местима дељива са 11.

Теорема 167. Број је дељив са 25 ако му је двоцифрени завршетак дељив са 25.

77.2 Задаци за рад

Задатак 1012. Доказати да је збир три узастопна природна броја од којих је само један паран увек дељив са 6.

Решење: Нека су то бројеви $n, n+1, n+2$. Сабирањем ових бројева добијемо $3n+3$. Дакле збир је дељив са три. Такође он мора бити паран, јер имамо два непарна броја, која у збиру дају паран број, и кад им додамо још један паран број опет добијемо паран број. Тада је овај збир дељив са 2 и са 3, па мора бити дељив и са 6.

Задатак 1013. Доказати да је производ четири узастопна природна броја увек дељив са 24.

Решење: Међу њима морају бити два парна броја. Међутим кад имамо два узастопна парна броја један од њих је увек дељив са 4. Знаци да је производ ова четири броја сигурно дељив са 8. Такође један од ова 4 броја мора бити дељив са три, међу 3 узастопна природан броја један мора бити дељив са 3.Заиста остаци који добијамо при дељењу са 3 су 1 или 2, то значи од броја с којим год остатком да кренемо један од следећих бројева ће бити дељив са 3.. Дакле производ мора бити дељив са 24.

Задатак 1014. Одреди цифру a тако да израз $17 \cdot 16a + 2010 \cdot 2012$ буде дељив са 12.

Решење: Број је дељив са 12 ако је дељив са 3 и са 4. Број 2010 је дељив са 3, а 2012 је дељив са 4, па је производ $2010 \cdot 2012$ дељив са 12. То значи да израз $17 \cdot 16a$ мора такође бити дељив са 12.ДА би овај број био дељив са 4, имамо следеће могућности за a, $a \in 0, 4, 8$. За $a = 0$ је $1 + 6 + 0 = 7$, није дељиво са 3. За $a = 4$ је $1 + 6 + 4 = 11$, није дељиво са 3. За $a = 8$ је $1 + 6 + 8 = 15$, дељиво са 3, па је овај израз дељив са 12. Значи $a = 8$.

Задатак 1015. Наћи количник и остатак при дељењу израза $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 75$ са бројем 35.

Решење: Овај израз можемо записати као $35 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 2 \cdot 35 + 5 = 35 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 2) + 5$. Одавде видимо да је тражени остатак 5, а количник $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 2 = 13685762$.

Задатак 1016. Природни број n при дељењу са 6 даје остатак 4, а при дељењу са 15 даје остатак 7. Колики је остатак при дељењу броја n са 30?

Решење: Из услова задатка имамо $n = 6a + 4, n = 15b + 7a, b \in N_0$.. Требамо одредити $r \in N_0$, тако да важи $n = 30z + r, z \in N_0$. Помножимо први израз са 5, други са 2 и онда их одузмимо . Одавде имамо $3n = 30(a - b) + 6$,одакле је $n = 10(a - b) + 2$. Дакле последња цифра r је 2, и $r < 30$, па $r = 2$ или $r = 12$ или $r = 22$. Нека је $r = 2$. Тада из $30z + 2 = 15b + 7$, односно $5 = 30z - 15b$. Десна страна ове једнакости је дељива са 15, а лева не. Дакле ова могућност отпада.Ако је $r = 12$, тада имамо $n = 30z + 12$, одавде је н дељиво са 6, контрадикција са условом задатка. Остаје нам јос опција $r = 22$. Да такав број n постоји, ставимо $z = 1$, имамо $n = 52$, и он задовољава све услове.

Задатак 1017. Одредити најмањи природан број који је дељив са 72, и збир цифара му је 72.

Решење: Да би број био дељив са 72 мора бити дељив са 8 и са 9. Дељивост са 9 је задовољена, с обзиром да му је збир цифара 72, а то је дељиво са 9. Значи остаје нам дељивост са 8. Желимо да имамо што мање цифара, тиме ће број бити мањи,онда разматрајмо троцифрене завршетке са највецим цифрама, а да су дељиви са 8. Задња цифра је очигледно парна, и наш највећи избор је 8. Највећи избор за претпоследњу цифру је 9, међутим онда је двоцифрени завршетак тог броја 98,па тај број не би био дељив са 4, а самим тим ни са 8. Овим добијемо да је двоцифрени завршетак 88, па како 988 није дељиво са 8, остаје да је троцифрени завршетак 888. Остале цифре онда у збиру носе 48, а како је $48 = 9 \cdot 5 + 3$, тражени број је 399999888.

Задатак 1018. Одреди најмањи четвороцифрени број са производом цифара 180.

Решење: Растављањем 180 на просте чиниоце видимо $180 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Избор цифара за најмањи број мора бити из скупа $1, 4, 5, 9$ или $1, 5, 6, 6$. Број 1459 није дељив са 9 (збир цифара му је 19), дакле тражени број је 1566.

Задатак 1019. Дат је седмоцифрени број 9835412.
а) У запису тог броја изоставити једну цифру тако да се добије шестоцифрени број дељив са 11.
б) У запису новодобијеног шестоцифреног броја замени места цифрама тако да се добије најмањи могући број дељив са 25.

Решење: а)Збир цифара на непарним местима овог броја је $9 + 3 + 4 + 2 = 18$, а на парним је $8 + 5 + 1 = 14$. Требамо да изоставимо једну цифру тако да разлика буде дељива са 11. Та разлика може бити само 11 или 0. Ако би разлика била 11, тада би збир цифара на парним местима морао бити 7, дакле требало би да смањимо збир за 7, односно избацимо цифру 7, а то је немогуће. Ако би разлика била 0, тада бисмо морали да умањимо збир цифара на непарним местима за 4, дакле избацићемо цифру 4. Новодобијени број је 983512.
б) Двоцифрени завршетак тог броја мора бити 25. Тражени број тада је 138925.

Задатак 1020. NZD (највећи заједнички делилац) два природна броја је 12, а њихов NZS (најмањи заједнички садржалац) је 672. Нађи те бројеве ако се зна да је мањи од њих дељив са 7, а већи не.

Решење: Нека су a и b тражени бројеви. Како је $NZD(a, b) = 12$ имамо да је $a = 12x, b = 12y$, при чему је $NZD(x, y) = 1$, и нека је $x < y$. Искористимо да је $NZD(a, b) \cdot NZS(a, b) = ab$, па је $12 \cdot 672 = 12x \cdot 12y$. Одавде је $xy = 56$. Како је 56= $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$, то имамо следеће могућности: $(x, y) = (1, 56), (2, 28), (4, 14), (7, 8)$
Од ових једино пар (7,8) испуњава услов да је мањи дељив са 7, и да је $NZD(x, y) = 1$. Према томе $x = 7, y = 8$, па је $a = 84$ и $b = 96$.

Задатак 1021. Пет природних бројева је написано у круг тако да никоја два или три суседна броја не дају збир дељив са 3. Међу тих 5 бројева, колико њих је дељиво са 3?

Решење: Бројеви при дељењу са три дају остатак 0,1 или 2. Ако би било 3 или више бројева на кругу који су дељиви са три, два би морала бити суседна, па би и збир та два суседна броја био дељив са 3. Значи има их 0, 1 или два. Када би их било 0, не можемо ставити заједно бројеве које дају остатак 1 и 2, јер би та два броја као суседи у збиру дали број дељив са 3. Значи сви дају исти остатак. Међутим три везана броја која дају исти остатак у збиру дају број дељив са 3. Ако би био 1 број дељив са 3, опет не можемо ставити заједно бројеве које дају остатак 1 и 2, јер би они у збиру дали број дељив са 3. А ако би сви давали исти остатак при дељењу са 3, опет би имали три суседна са истим остатком, који би у збиру били дељиви са 3. Дакле одовор је 2, и заиста можемо направити круг, пример је $3-2-2-3-2$, само повежите први и последњи и направите круг.

77.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 1022. Доказати да је производ 3 узастопна парна броја већих од 2 увек дељив са 16.

Задатак 1023. Одреди највећи природан број чији је збир цифара 18 и дељив је са 18.

Задатак 1024. Дат је седмоцифрени број 9835412.
а) У запису тог броја изоставити једну цифру тако да се добије шестоцифрени број дељив са 9.
б) У запису новодобијеног шестоцифреног броја замени места цифрама тако да се добије најмањи могући број дељив са 15.

Задатак 1025. Одреди највећи четвороцифрени број са производом цифара 120.

Задатак 1026. Наћи количник и остатак при дељењу израза $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9+136$ са бројем 75.

Литература

[1] $http://dms.org.rs/$

[2] $http://www.matematika.hr/$

Предавање 78

Прости бројеви

Милош Милосављевић, Математичка Гимназија

78.1 Теоријски увод

Дефиниција 128. Прости бројеви су сви они бројеви тачо 2 делиоца, односно они који су дељиви само са 1 и са самим собом.

Дефиниција 129. Бројеви који имају више од два делиоца називају се сложени. Број 1 није ни прост ни сложен.

78.2 Задаци за рад

Задатак 1027. За које све просте бројеве p и природне бројеве n вреди $\frac{1}{p} = \frac{n}{2010}$?

Решење: Како је $pn = 2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, број$p$ може бити 2,3,5 или 67. За $p = 2$ је $n = 1005$, за $p = 3$ је $n = 670$, за $p = 5$ је $n = 402$, а за $p = 67$ је $n = 30$.

Задатак 1028. Доказати да се сваки прости број већи од 5 може записати у облику $6k + 1$ или $6k + 5$, где је к природан број.

Решење: Најмањи број датог облика је 7. Посматрајмо остатке које број даје при дељењу са 6. Сваки природан број већи од 5 моземо записати у једном од следећих облика: $6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5$. Сви бројеви облика $6k$ су дељиви са 6 па су самим тим и сложени. Сви бројеви облика $6k+2$ су парни, и већи од 2 па су слозени. Сви бројеви облика $6k+3$ су дељиви са 3, па су сложени. Сви бројеви облика $6k+4$ су парни, и већи од 2 па су слозени. Дакле, све просте бројеве веће од 5 можемо записати у облику $6k + 1$ или $6k + 5$.

Задатак 1029. Наћи све просте бројеве p за које је $3p+1$ такође прост број.

Решење: Ако јеp прост и непаран број, онда је $3p+1$ паран, већи од 2, па је самим тим сложен. Дакле p је паран и прост,па мора бити $p=2$.

Задатак 1030. Марко има две картице са простим бројевима A и B. Задња цифра од збира A^2+B^2 једнака је 9. Можеш ли открити колики су A и B ?

Решење:

Ако збир A^2+B^2 двају бројева заврЋава са 9, онда је један од сабирака паран, а други непаран. Квадрат било којег непарног броја је непаран, а парног броја паран, па закључујемо да је паран квадрат заправо квадрат броја 2 (јер не постоје други парни прости бројеви). Дакле, или је $A=2$ или $B=2$. Претпоставимо да је $A=2$. Тада је $A^2=4$, па задња цифра од B^2 мора бити 5. Стога B^2 мора бити дељив с 5, а онда и B мора бити дељив с 5. Пошто је B прости број, закључујемо да је $B=5$. Дакле, $A=2, B=5$. Тада је $A^2+B^2=29$.

Задатак 1031. Ана има три картице са различитим цифрама. Закључцхила је да од њих може сложити 6 разлиЋитих троцифрених простих бројева. Докажи да је то немогуће!

Решење: Ако је задња цифра троцифреног броја парна, онда је тај број дељив с 2, па не моЋе бити прост. Отуда закључујемо да су све Анине цифре непарне. Такође закључујемо да на њеним картицама не може бити број 5, јер је троцифрени број који завршава с 5, дељив с 5, па не може бити прост. Дакле, на Аниним картицама су цифре 1, 3, 7 или 9. Међутим, које год од те три цифре она имала, од њих не можемо сложити 6 простих бројева јер: Ако има 1,3,7, тада је $371=53\cdot 7$; Ако има 1,3,9, тада је $319=29\cdot 11$; Ако има 1,7,9, тада је $791=113\cdot 7$; Ако има 3,7,9, тада је $793=61\cdot 13$.

Задатак 1032. Можеш ли наћи прост број A такав да су бројеви $(A+10)$ и $(A+14)$ такође прости бројеви? Нађи сва моguЋа решења.

Решење: Очигледно А није 2, јер би онда ови бројеви били парни. Ако је $A=3,(A+10)=13$, и $(A+14)=17$, па је то једно решење. Ако је $A=5$, тада је $(A+10)=15$, ово решење отпада. Ако је $A>5$ искористимо први задатак и имамо. Ако је $A=6k+1$, тада је $A+14=6k+15$, а тај је број дељив с 3, па не може бити прост. Ако је $A=6k+5$, тада је $A+10=6k+15$, па је у овом случају тај број дељив са 3 и не може бити прост. Дакле, једино решење је $A=3$.

Задатак 1033. Бројеви 3, 5 и 7 су узастопни непарни бројеви, а уз то су и прости. Постоје ли још која три узастопна непарна броја која су проста?

Решење: Не постоје! Докажимо то: Претпоставимо да имамо три узастопна непарна броја. Означимо их са $A, A+2$ и $A+4$. Број A није дељив са 3 јер је прост. Стога он при дељењу с 3 има или остатак 1 или остатак 2, па га можемо написати или као $A = 3k+1$ или $A = 3k+2$, при чему је k неки природни број. Ако је $A = 3k+1$, тада је $A+2$ дељив са 3, па он није прост број. А ако је $A = 3k+2$, тада је $A+4$ дељив са 3, па он није прост број. Дакле, не постоје такви бројеви (осим 3, 5 и 7).

Задатак 1034. Нађи све просте бројеве за које важи $p(264q+4r) = 2008$

Решење: $4p(66q+r) = 2008, p(66q+r) = 502 = 2\cdot 251$. Како је $66q+r > 2$ то је $p = 2$, Имамо и да је $66q < 251$, односно $q < 4$. Дакле $q = 3$, или$q = 2$. Ако је $q = 2, r = 119 = 7\cdot 17$, па ово не може бити решење. Ако је $q = 3$, тад је $r = 53$, шо је и решење овог задатка.

Задатак 1035. Ако су a и b прости бројеви већи од 3 и $a > b$, доказати да је производ $(a-b)(a+b)$ дељив са 12.

Решење: Како су прости бројеви већи од 3 непарни, то су њихова разлика и збир парни, па је $(a-b)(a+b)$ дељив са 4.Бројеви a и b могу при дељењу са 3 дати остатке 1 и 2. Ако при дељењу са 3 a и b дају исте остатке, онда је њихова разлика дељива са 3, а ако дају различите остатке онда је њихов збир дељив са 3. Онда је $(a-b)(a+b)$ дељив са 3, па је овим задатак доказан.

Задатак 1036. Постоје ли прости бројеви p и q такви да је $3p+5q = 67$?

Решење: Када би и p и q били парни бројеви, онда би и $3p$ и $5q$ били парни бројеви па би и $3p+5q$ био паран број. С обзиром да је 67 непаран број, то значи да су п и ч различите парности. За $p = 2$ вреди $6+5q = 67$, односно $5q = 61$, па једначина нема решења. За $q = 2$ вреди $3p+10 = 67$, односно $3p+57$ па је $p = 19$. Тражени прости бројеви су$p = 19$и $q = 2$.

78.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 1037. Доказати да се сваки прости број већи од 3 може записати у облику $4k+1$ или $4k+3$, где је к природан број.

Задатак 1038. Доказати да ако је p прост број већи од 5, тада p^2-1 дељиво са 12.

Задатак 1039. Нађи сва целобројна решења $\frac{p}{2010}+\frac{q}{2}=1$ ако је p прост број, n природан број.

Задатак 1040. Ако је p прост број, наћи све остатке које p^2 даје при дељењу са 9.

Задатак 1041. Наћи све просте бројеве p за које је $p^3 - p + 1$ потпун квадрат.

Литература

[1] $http://dms.org.rs/$

[2] $http://www.matematika.hr/$

Предавање 79

Скупови

Љубомир Радаковић, Електротехнички факултет

79.1 Теоријски увод

Дефиниција 130. Унија два скупа A и B јесте скуп свих елемената који се налазе у скупу A или у скупу B и означава се са $A \cup B$.

Дефиниција 131. Пресек два скупа A и B јесте скуп свих елемената који се налазе у скупу A и у скупу B и означава се са $A \cap B$.

Дефиниција 132. Разлика скупова A и B јесте скуп свих елемената који се налазе у скупу A а не налазе се у скупу B и означава се са $A \setminus B$.

Дефиниција 133. Ако је сваки члан скупа A такође члан скупа B, тада се за A каже да је подскуп од B, пише се $A \subseteq B$.

Дефиниција 134. Укупан број елемената датог скупа A означава се са $|A|$.

Теорема 168. Нека су A и B два непразна скупа. Тада важи:

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|.$$

Теорема 169. Број свих различитих подскупова датог скупа A је $2^{|A|}$.

79.2 Задаци за рад

Задатак 1042. Одредити елементе скупа B, ако је: $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, m, n, p, q\}$, $A \setminus B = \{e, m\}$, $A \cap C = \emptyset$, $C \setminus B = \{c, p\}$.

Решење: Из услова $A \cap C = \emptyset$ може се уочити да је $(A \setminus B) \cap (C \setminus B) = \emptyset$. Затим је и $(A \setminus B) \cup (C \setminus B) \cup B = A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, m, n, p, q\}$, па је и коначно $B = \{a, b, d, n, q\}$.

Задатак 1043. На правој су дате редом тачке A, B, C и D. Одредити:

$$(AC \setminus BD) \cap (AC \cap AB).$$

Решење: Како је $AC \cap AB = AB$ и $AC \setminus BD = AB \setminus \{B\}$ имамо да је и $(AC \setminus BD) \cap (AC \cap AB) = (AB \setminus \{B\}) \cap AB = AB \setminus \{B\}$, односно дуж AB без тачке B.

Задатак 1044. Дати су скупови: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 6\}$, $C = \{2, 5, 6, 7\}$ и $D = \{1, 6, 7, 8\}$. Одредити скуп S ако је $S \subset A$, $S \cap (B \cup D) = \emptyset$ и $\{3\} \setminus S = \{3\}$.

Решење: Најпре се одреди $B \cup D = \{1, 4, 6, 7, 8\}$. Како је $S \subset A$ и S нема заједничких елемената са $B \cup D$, тада закључујемо да $S \subset \{2, 3, 5\}$. Пошто се у скупу S не налази елемент $\{3\}$, тада је тражени скуп $S = \{2, 5\}$.

Задатак 1045. Дати су скупови: $A = \{x \in N_0 | \frac{15}{2x+1} \in N\}$, $B = \{y \in N | y^2 < 16\}$. Одредити елементе скупова: $A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ и $B \setminus A$.

Решење: Одредимо најпре елементе скупа A. Како $\frac{15}{2x+1} \in N$, тада важи да је $2x + 1 \in \{1, 3, 5, 15\}$, односно $x \in \{0, 1, 2, 7\}$, па су елементи скупа $A = \{0, 1, 2, 7\}$. Провером за првих неколико природних бројева добија се да само бројеви $1, 2, 3$ задовољавају неједнакост $y^2 < 16$, односно елементи скупа $B = \{1, 2, 3\}$. Елементи следећих скупова су $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 7\}$ и $A \cap B = \{1, 2\}$.

Задатак 1046. Познати дечји писац *Lewis Caroll*(Луис Керол), чије је право име *Dodgsn*(Досџн), по занимању математичар, у једној књизи даје овакав задатак: *"У жестокој борби* 70 *од* 100 *гусара је изгубило једно око,* 75 *једно ухо,* 80 *једну руку и* 85 *једну ногу. Колико је најмање гусара изгубило и око, и ухо, и руку, и ногу истовремено? "* Шта ви мислите?

Решење: Нека је O скуп свих гусара који су изгубили једно око, U скуп свих гусара који су изгубили јендо ухо, R скуп свих гусара који су изгубили једну руку и N скуп свих гусара који су изгубили једну ногу. Најпре одредимо колико је најмање гусара који су изгубили једно око и једно ухо, а то је $|O \cap U| = 70 + 75 - 100 = 45$. Најмање гусара који су изгубили једно око и једно ухо и једну руку је $|(O \cap U) \cap R| = 45 + 80 - 100 = 25$ и на крају најмање гусара који су изгубили и једно око и једно ухо и једну руку и једну ногу је $|(O \cap U \cap R) \cap N| = 25 + 85 - 100 = 10$.

Задатак 1047. Дати су скупови $A = \{a | a \in N, 14 \leq 3a + 2 \leq 32\}$, $B = \{b | b \in N, 4 \leq b < 9\}$. Одредити број елемената скупа C ако је $C = \{c | c \in N, c = a - b, a \in A, b \in B\}$.

Решење: Налажењем свих природних бројева који задовољавају неједначину $14 \leq 3a+2 \leq 32$ добијамо да су елементи скупа $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, док су елементи скупа $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Приметимо да је $B \subset A$, односно скуп $C = \{c | c \in N, c = a - b, a, b \in A\}$. Број елемената скупа C је $|A| - 1$, јер је разлика $r = |x - y|$, где су $x, y \in A$, у интервалу $1 \leq r \leq 6$.

Задатак 1048. Нека су дати скупови $A = \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\}$ и $B = \{1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n\}$, где је n произвољан природан број. Наћи број елемената скупова $A, B, A \cap B$ и $A \cup B$, као и број подскупова.

Решење: Скуп A представља скуп свих непарних природних бројева мањих од $2n$. Дакле, број елемената скупа A је $|A| = n$. Сваки елемент $b \in B$ може се написати у облику 2^k, где је $1 \leq k \leq n$. Број k може узети n различитих вредности, па је $|B| = n+1$, јер и $\{1\} \in B$. Лако се уочава да је $|A \cap B| = \{1\}$, јер скуп A чине непарни природни бројеви, а скуп B парни бројеви укључујући и елемент -1№. Тада је $|A \cap B| = 1$, а према теореми налази се да је $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = n + n + 1 - 1 = 2n$. Број подскупова скупа A је 2^n, скупа B је 2^{n+1}, скупа $A \cap B$ је 2 и скупа $A \cup B$ је $2^{2n} = 4^n$.

Задатак 1049. Написано је првих 1200 природних бројева. Прво су избрисани сви који се завршавају нулом. Затим су избрисани сви бројеви који су дељиви са 6, а на крају су избрисани сви бројеви који су дељиви са 9. Колико је бројева остало неизбрисано?

Решење: Нека је A скуп свих бројева који се завршавају цифром 0, односно скуп свих бројева дељивих бројем 10. Нека је B скуп свих бројева дељивих бројем 6, а C скуп свих бројева дељивим бројем 9. Бројева дељивих и са 10 и са 6 и са 9 има $1200 : 90 = 13$, јер је $NZS(6, 9, 10) = 90$. Бројева дељивих са 6 и 9 има $1200 : 18 = 66$, јер $NZS(6, 9) = 18$, а оних који су дељиви са 6 и 9, а не и са 10 има $66 - 13 = 53$. На сличан начин се добија да је број бројева дељивих са 6 и 10, а не и са 9 једнак 27, док бројева дељивих са 9 и 10, а не и са 6 има 0. Бројева дељивих са 6 има $1200 : 6 = 200$, а бројева дељивих са 6, а не и са 9 и 10 има $200 - 13 - 53 - 27 = 107$. На сличан начин се добија и да је број бројева дељивих са 9, а не и са 6 и 10 једнак 67, а да бројева дељивих са 10, а не и са 9 и 6 има 80. Коначно добијамо да је избрисано $67 + 53 + 13 + 0 + 27 + 53 + 107 + 80 = 347$ бројева, па је онда остало $1200 - 347 = 853$ броја.

Задатак 1050. Одредити елементе скупова A, B и C, а затим број елемената сваког од скупа, ако је: $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset$, $A \backslash B = \{x | x = 2k-1 \land x < n, k \in N\}$, $C \backslash B = \{y | y = 2k \land y < n, k \in N\}$ и $(A \cap B) \setminus C = \{n\}$.

Решење: Запис $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset$, користећи да су операције $\cap$ и $\cup$ дистрибутивне једна према другој, можемо записати и као $(A \cup B) \cup C = \emptyset$. Елементи скупа $A \setminus B$ су сви непарни природни бројеви мањи од n, дакле $A \setminus B = \{1, 3, 5, \ldots\}$, а елементи скупа $C \setminus B$ су сви парни природни бројеви мањи од n, дакле $C \setminus B = \{2, 4, 6, \ldots\}$. Како је $(A \cap B) \setminus C = \{n\}$, закључујемо да $n \in A \cap B$, односно $n \in A$ и $n \in B$. Приметимо да су скупови $A \cup B$ и C дисјунктни, а самим тим су и скупови A и C дисјунктни и B и C су дисјунктни скупови. Како скуп A чине сви непарни природни бројеви мањи од n, а скуп C сви парни природни бројеви мањи од n, закључујемо да се у скупу B налази само елемент n, док су елементи скупа $A = \{x|x = 2k-1 \wedge x \leq n, k \in N\}$, тј. сви непарни бројеви мањи од n укључујући и n, а елементи скупа $C = \{y|y = 2k \wedge y < n, k \in N\}$, тј. сви парни бројеви мањи од n. Нашли смо тражене елементе сваког скупа. Посматрајмо случај када је n паран број. Тада је $|A| = \frac{n}{2} + 1$, $|C| = \frac{n}{2} - 1$ и $|B| = 1$. Ако је n непаран број, тада је: $|A| = \frac{n-1}{2} + 1$, $|C| = \frac{n-1}{2}$ и $|B| = 1$.

Задатак 1051. Колико је непразних подскупова скупа $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ у којима је збир најмањег и највећег елемента 13?

Решење: Сви могући збирови два броја који дају 13 су:

$$1 + 12, 2 + 11, 3 + 10, 4 + 9, 5 + 8, 6 + 7.$$

Сваки пар бројева који чине збир 13 уједно су и најмањи и највећи елемент траженог подскупа, док су остали елементи подскупа сви бројеви који се налазе између та два броја. Скуп који садржи бројеве 1 и 12 може да има максимално још 10 елемената, а то значи да може да има укупно 2^{10} подскупова. Затим, укупан број подскупова који садржи елементе 2 и 11 је 2^8, итд. Укупан број свих подскупова је $2^{10} + 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 1 = 1365$.

79.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 1052. Нека је $M \cup N \cup P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M \cap N \cap P = \{1, 4\}$, $N \setminus P = \{2, 5\}$ и $P \setminus M \neq \emptyset$. Одредити скуп P.

Задатак 1053. Да ли за сваке скупове A, B и C важи $((A \cup B) \setminus C) \cap (A \setminus (B \cup C)) = (A \setminus (B \cup C))$ и зашто?

Задатак 1054. Колико има природних бројева мањих од 3000 који нису дељиви ни са 5 ни са 4, а јесу са 6?

Задатак 1055. Упоредити број елемената скупа A и број елемената скупа B, ако је:

$$A = \{(a + b)|a + b = c\},$$

$$B = \{(x + y)|x + y = c\},$$

где су a, b и c парни природни бројеви, а x, y непарни природни бројеви. Да ли добијени закључак важи и за било који паран природан број c?

Задатак 1056. Дат је скуп $S = \{1, 2, 3, \ldots, 99\}$. Одредити скупове A и B тако да је $A \cup B = S$, $A \cap B = \emptyset$ и да је збир бројева који припадају скупу A једнак збиру бројева који припадају скупу B.

Литература

[1] В. Стојановић, *Матхематископ 1* , Београд 2000.

[2] В. Стојановић, *Матхематископ 2* , Београд 1999.

[3] Друштво Математичара Србије, *Збирка решених конкурсних задатака за ученике 4-8. разреда* , Београд 1990.

[4] Величко Н. Илић, *Одабрани задаци са математичких такмичења 5.и 6. разред* , Београд 1991.

[5] Друштво Математичара Србије, *1000 задатака (1988-1997. године)* , Београд 1998.

Предавање 80

Задаци везани за кретање

Марко Ракић, Математичка гимназија

80.1 Теоријски увод

Дефиниција 135. Пут који неко тело пређе за одређено време константном брзином једнак је производу брзине и времена.

80.2 Задаци за рад

Задатак 1057. Камионџија је од места A до места B путовао три сата. Првог сата прешао је четвртину пута, другог трећину, а трећег $50km$. Колико је растојање између места A и B?

Решење: Ако је растојање између A и B x, имамо да је: $\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}x+50 = x$, одакле је $x = 120km$.

Задатак 1058. Бициклиста је за 4 сата прешао $100km$. Првог сата прешао је четвртину пута, другог $\frac{4}{5}$ пута који је прешао првог сата, а трећег $\frac{3}{5}$ пута који је прешао за прва 2 сата. Колико је километара прешао у току четвртог сата?

Решење: Први сат: $100 * \frac{1}{4} = 25$. Други сат: $25 * \frac{4}{5} = 20$. Трећи сат: $(25 + 20) * \frac{3}{5} = 27$ Четврти сат: $100 - (25 + 20 + 27) = 28km$.

Задатак 1059. Тркач се такмичи у трчању на $3000m$. Прву трећину пута прешао је брзином $5\frac{m}{s}$, другу за петину мањом, а последњу за половину већом брзином него претходну. Колико му је времена требало?

Решење: Ако је првих $1000m$ трчао брзином $5\frac{m}{s}$, требало му је $1000 : 5 = 200s$ да тих $1000m$ пређе. За других $1000m$ му је требало $1000 : 4 = 250s$ и за последњи део $1000 : 6 = 166\frac{4}{6}s$. Укупно $616\frac{4}{6}s$

Задатак 1060. Глиста треба да пређе ливаду дугу $50m$. Преко дана она пређе 5м, али се ноћу врати 2м. Колико ће јој дана требати да пређе ливаду?

Решење: Све укупно, за дан глиста напредује 3м. После 15 дана, глуста ће бити на четрдесет петом метру. Следећег дана ће прећи још 5м и стићи ће до краја. Дакле, треба јој 16 дана.

Задатак 1061. Два аутомобила крећу се један другом у сусрет, први брзином $50\frac{km}{h}$, а други $15\frac{km}{h}$ брже. Мимоишли су се после 2 сата. На којем растојању су били на почетку?

Решење: После 2 сата, први је прешао $50 * 2 = 100km$, а други $(50 + 15) * 2 = 130km$. Значи, укупно су растојање између њих је било $100 + 130 = 230km$.

Задатак 1062. Из места A у место B креће аутомобилиста брзином $60\frac{km}{h}$. Сат времена касније, из B у A креће мотоциклиста брзином $80\frac{km}{h}$. После колико времена, од поласка аутомобилисте, су се њих двојица мимоишли, ако је удаљеност између градова A и B $270km$?

Решење: Пре него што мотоциклиста крене, аутомобилиста већ пређе $60km$. Значи, остаје још $210km$. Они се један другом приближавају брзином $60 + 80 = 140\frac{km}{h}$, што ће рећи да ће се срести $210 : 140 = 2.5h$ по поласку мотоциклисте, тј. $3.5h$ по поласку аутомобилисте.

Задатак 1063. Пљачкаш банке бежи брзином $80\frac{km}{h}$. Осмину сата потом креће у потеру полицајац, брзином $100\frac{km}{h}$. После колико времена ће полицајац стићи лопова?

Решење: Пре него што полицајац крене, лопов пређе $\frac{1}{8} * 80 = 10\frac{km}{h}$. Полицајац стиже лопова брзином $100 - 80 = 20\frac{km}{h}$, што значи да ће ових $10km$ надокнадити за $10 : 20 = 0.5h$.

Задатак 1064. Глисер креће да заобилази брод дугачак $150m$. Брод се креће брзином $15\frac{m}{s}$, а глисер $20\frac{m}{s}$. Колико ће времена требати глисеру да обиђе брод?

Решење: Брзина којом глисер претиче брод је $20 - 15 = 5\frac{m}{s}$. Време које је за то потребно је $150 : 5 = 30s$.

Задатак 1065. Перица је, шутирајући лопту, случајно разбио прозор. Човек је изашао и, угледавши Перицу $100m$ даље, кренуо да га јури брзином $5\frac{m}{s}$. Перица је истог тренутка кренуо да бежи ка кући, 135м удаљеној од њега, брзином $3\frac{m}{s}$. Да ли ће Перица успети да побегне?

Решење: Перица до куће стиже за $135 : 3 = 45s$, а човек стиже Перицу за $100 : (5 - 3) = 50s$. Значи да ће Перица ипак успети да умакне.

Задатак 1066. Аутомобилиста је $120m$ испред себе угледао аутобус. Обим точка аутомобила је $2m$, и окрене се 7 пута за $1s$, док је обим гуме аутобуса $5m$ и обрне се 2 пута у року од $1s$. Колико ће метара прећи ауто док не стигне аутобус?

Решење: Брзина аутомобила је $7 * 2 = 14\frac{m}{s}$, а аутобуса $5 * 2 = 10\frac{m}{s}$, што ће рећи да аутомобил стиже аутобус брзином $4\frac{m}{s}$. Дакле, требаће му $120 : 4 = 30s$, па ће прећи $30 * 14 = 420m$.

80.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 1067. Када је бициклиста прешао $10km$ и трећину остатка, остало му је $10km$ и још четвртина укупног пута. Колико је бициклиста километара прешао?

Задатак 1068. Пуж се пење уза зид висок 10м. Дању се попне $3m$, а ноћу спусти за $2m$. Колико дана треба пужу да се попне?

Задатак 1069. Аутобус из Новог Сада креће брзином $60\frac{km}{h}$, а истовремено из Београда креће аутомобил брзином $100\frac{km}{h}$. На ком растојању од Новог Сада ће се аутомобил и аутобус мимоићи? Растојање између Београда и Новог сада је $120km$.

Задатак 1070. Аутомобил, дуг $2m$, брзином $25\frac{m}{s}$ пролази поред воза, дугог $100m$, брзином $7\frac{m}{s}$. После колико времена ће аутомобил заобићи воз, ако се заобилажење рачуна од тренутка кад се предњи део аута и задњи део воза поклапају, до тренутка кад се предњи део воза и задњи део аута поклапају?

Задатак 1071. Ред војника, дуг $20m$, који се креће брзином $2\frac{m}{s}$, облеће мува, тако што се креће од задњег краја ка предњем и назад брзином $5\frac{m}{s}$. Колики ће мува прећи пут, крећући се тако, за $60s$?

Литература

Предавање 81

Дирихлеов принцип

Миломир Драговић, Математичка гимназија

81.1 Теоријски увод

Дирихлеов принцип изражава једно од основних својстава коначних скупова. Овај принцип се користи у решавању разних проблема, највише се користи за доказивање да одређени објекти имају нека одређена (тражена) својства.

Када треба доказати да сви објекти неког скупа поседују неко одређено својство потребно је да то својство поседује сваки објекат тог скупа. Када бисмо хтели да ту тврдњу оповргнемо довољно би било наћи контрапример, тј. неки објекат који то својство не задовољава.

Када је тешко пронаћи контрапример тада је често лакше користити Дирихлеов принцип јер је лакше доказати да одговарајући пример постоји него га пронаћи.

Пример 1. Ако је пет дечака добило шест лопти, при чему је сваки од њих добио по бар једну лопту закључујемо да је један од њих добио две лопте. Нама је битно да је неко добио две лопте, а не интересује нас који је то дечак био.

Пример 2. Ако је у n кутија смештено више од n предмета онда ће у једној кутији бити више од једног предмета.

81.2 Задаци за рад

Задатак 1. На летњем математичком кампу учествује 375 ученика. Доказати да међу њима постоје бар два која славе рођендан истог дана.

Решење: Како у години има мање дана него ученика онда ће морати некоме да се поклопе рођендани.

Задатак 2. У хотелском комплексу је за време летовања одсело 932 госта из Србије. Доказати да међу њима постоје два госта са истим иницијалима.

Решење: Број различитих иницијала је $30 \cdot 30 = 900$, а како имамо више људи од тог броја онда сигурно постоје двоје од њих са истим иницијалима.

Задатак 3. Дати су бројеви $0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2$ и 2. Да ли је могуће разместити ове бројеве у поља квадрата $3 \cdot 3$ тако да у свакој колони, врсти и дијагоналама буде различит збир?

Решење: Користећи дате бројеве можемо направити 7 различитих збирова. Имамо три колоне, три врсте и две дијагонале, дакле није могуће разместити бројеве на тражени начин.

Задатак 4. Бела раван је на произвољан начин попрскана плавом бојом. Доказати да у плаво белој равни постији једнакостранични троугао чија су сва три темена исте боје.

Решење: Нацртати правилан шестоугао и поделити га на шест једнакостраничних троуглова, затим бојењем темена долазимо до решења.

Задатак 5. У кавезу за лопте се налази 10 кошаркашких, 5 фудбалских и 7 рукометних лопти. Колико најмање лопти треба да извучемо без гледања да би били сигурни да смо извукли рукометну лопту?

Решење: У најгорем случају ћемо прво извући све кошаркашке и фудбалске лопте, дакле морамо извући $10 + 5 + 1 = 16$ лопти.

Задатак 6. Дато је 5 произвољних природних бројева. Доказати да међу њима постоје два чија је разлика дељива са 4.

Решење: Разлика два броја је дељива неким бројем ако ти бројеви дају исти остатак при дељењу истим. Постоје четири различита остатка при дељењу са 4, то су $0, 1, 2$ и 3. Како ми имамо 5 бројева закључујемо да бар два морају имати исти остатак при дељењу са 4 па је тиме њихова разлика дељива са 4.

Задатак 7. Уколико је $nk + 1$ лоптица распоређено у k кутија, тада се у једном од тих скупова мора налазити барем $n + 1$ лоптица.

Решење: Уколико у сваку кутију убацимо по n лоптица искористићемо $n \cdot k$ лоптица, дакле преостаје нам једна коју морамо убацити у неку од постојећих кутију.

Задатак 8. Колико најмање природних бројева треба изабрати да би међу њима постојала два чија је разлика дељива са 32?

Решење: Потребно је узети најмање 33 броја да би били сигурни да бар два од њих имају исти остатак при дељењу са 32.

Задатак 9. На ликовној изложби присуствује 32 људи. Доказати да међу њима постоје двоје који међу присутнима имају једнак број познаника.

Решење: Свако од њих може имати $0, 1, 2, ..., 31$ познаника. Ако неко има 0 познаника онда нико нема 31 познаника па је максималан број различитих познанстава 31. А ако неко има 31 познаника онда нико нема нула познаника.

Задатак 10. Јасмина је набрала 21 гајбу јабука. У свакој гајби су јабуке исте сорте, при чему су заступљене 4 сорте јабука. Доказати да је Јасмина набрала бар 6 гајби јабука исте сорте.

Решење: Да је од сваке сорте набрала по тачно 5 гајби, укупно би набрала 20 гајби јабука. Међутим, она је набрала једну гајбу више тако да ће та гајба бити шеста гајбе неке од одговарајућих сорти.

81.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 11. Ако 33 пилета треба ставити у два кокошињца, доказати да постоји кокошињац у коме се налази бар 17 пилади.

Задатак 12. Разредни старешина је на крају године купио 200 бомбона да подели својим ученицима којих има 21 у одељењу. Доказати да како год поделио бомбоне увек ће се наћи два ученика који су добили исти број бомбона.

Задатак 13. Дато је 6 произвољних природних бројева. Доказати да међу њима постоје два чија је разлика дељива са 5.

Задатак 14. У великој врећи се налази се налази 7 парова белих и 7 парова црних ципела. Колико најмање ципела треба узети из вреће без гледања да би били сигурни да имамо један цео пар ципела (лева и десна ципела исте боје)?

Задатак 15. На турниру у баскету учествује 8 екипа. Ако свако са сваким игра по јену утакмицу доказати да у сваком тренутку турнира постоје бар две екипе које су одиграле исти број утакмица.

Литература

Предавање 82

Елементарне Диофантове једначине

Љубомир Радаковић, Електротехнички факултет

82.1 Теоријски увод

Пример 7. (1001 ноћ) Причајући своје приче 1001 ноћ, Шехерезада је поставила и древни математички проблем. Наиме, поставља се питање колико би ноћи Шехерезада причала 1001 бајку, ако би у току неких ноћи причала по 5 бајки, а у току осталих ноћи по 3 бајке? Шта мислите, колико је највише, а колико најмање ноћи је било потребно Шехерезади да исприча бајке?

Решење: Овај проблем се може моделирати једначином $5x + 3y = 1001$, где је x број ноћи у којима је Шехерезада причала по 5 бајки, а y број ноћи у којима је Шехерезада причала по 3 бајке. Циљ нам је да решимо ову једначину, али овога пута она има две непознате. Све вредности које узимају x и y морају наравно бити природни бројеви. Поставља се питање да ли је уопште могуће наћи такве природне бројеве који задовољавају задату једначину, а ако није, зашто није? Са друге стране, ако јесте, поставља се опет питање колико има решења ова једначина, да ли једно или пак много више?

Пример 8. Колико има природних бројева x, y и z који у збиру дају број 10?

Решење: Метода решавање овакве врсте једначина јесте "пешачки".

Теорема 170. Ако једначина $ax + by = c$ има једно цело решење x_0, y_0, тада су сва цела решења ове једначине $x = x_0 + bt$ и $y = y_0 - at$, где је t цео број.

Теорема 171. Једначина $ax+by=c$ има решења у скупу целих бројева ако и само ако је највећи заједнички делилац бројева a и b уједно и делилац броја c.

Последица 2. Ако је $D(a,b)=1$, једначина $ax+by=c$ има решења у скупу целих бројева.

82.2 Задаци за рад

Задатак 1072. Дешифровати следеће множење:

$$*4*\cdot 15 = 3*9*.$$

Решење: Очигледно је да производ мора бити дељив са 15, односно са 3 и са 5. Знамо да је број дељив са 3 ако му је збир цифара дељив са 3, и да је дељив са 5 ако се завршава цифром 0 или 5. Зато, морамо разликовати два случаја. Први случај када је последња цифра прозивода 0, односно $3*90$. Овај број мора бити дељив са 3, па $3|3+9+0+*$. Вредности које може имати $*$ су $0,3,6,9$, односно могуће вредности за производ су: $3090, 3390, 3690$ и 3990. При дељењу са 15 дају следеће количнике: $206, 226, 246, 266$. Због услова да је друга цифра у првом чиниоцу једнака 4 једино решење је 246. Други случај када је последња цифра прозивода једнака 5 ради се слично. Производ је облика $3*95$, па због услова да је производ дељив са 3, $*$ може имати вредности: $1,4,7$, тј. могуће вредности производа су: $3195, 3495, 3795$. Ови бројеви при дељењу са 15 дају редом количнике: $213, 233, 253$. Ниједан од ових бројева не задовољава услов задатака, тј. да друга цифра буде 4. На крају, једино решење је $246\cdot 15 = 3690$.

Задатак 1073. Одредити цифре a, b и c, тако да важи једнакост:

$$\overline{aa}+\overline{bb}=(\overline{cc})^2$$

Решење: Број $\overline{aa}$ можемо записати и као $\overline{aa}=10a+a=11a$. Такође и $\overline{bb}=11b$ и $\overline{cc}=11c$. Из ових трансформација имамо да је $11a+11b=121c^2$. Видимо да су обе стране дељиве са 11, зато можемо скратити и леву и десну страну бројем 11. Добијамо $a+b=11c^2$. Како су a и b цифре, њихов збир може највише бити 18, па је $11c^2\le 18$, што значи да је $11c^2=11$, па је $c=1$. Тада је $a+b=11$, па задатак има више решења, и то: $22+99=33+88=44+77=55+66=66+55=\ldots=99+22=121$.

Задатак 1074. Решити једначину $2x+3y=20$ у скупу природних бројева.

Решење: Овај задатак се може решити на више начина. Један од начина јесте да приметимо да је десна страна паран број, а самим тим и лева страна мора бити паран број. Број $2x$ је увек паран, зато и $3y$ мора бити паран број, односно y је паран број. Очигледно мора да важи $3y \leq 20$, тј. $y \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Пошто је y паран број, закључујемо да $y \in \{2,4,6\}$. Пошто смо нашли могуће вредности за y, једначину ресхавамо по x, односно $x = \frac{20-3y}{2}$. Заменом бројних вредности у y добијамо да је $x \in \{1,4,7\}$. Коначно, решења су: $(x,y) \in \{(1,6),(4,4),(7,2)\}$.

Задатак 1075. Одредити све уређене парове (p,q) простих бројева, тако да је:

$$a)2p + 3q = 200,$$

$$b)2p + 3q = 201.$$

Решење: Ако је $2p + 3q = 200$, онда је $3q = 200 - 2p$, па је са десне стране једнакости паран број, што значи да и $3q$ мора бити паран број. Једини паран прост број је 2, дакле $q = 2$, а $2p = 200 - 6 \Rightarrow p = 97$. Број 97 јесте прост, па је једино решење $(97,2)$. Ако је $2p + 3q = 201$, онда је $2p = 201 - 3q$. Видимо да је десна страна дељива са 3, што значи да и $2p$ мора бити дељив са 3, односно $3|p$. Једини прост број p који задовољава услов је 3. Па је и $3q = 201 - 6 \Rightarrow q = 65$, што није прост број, одакле закључујемо да не постоји уређен пар у скупу простих бројева.

Задатак 1076. Одредити све уређене парове (p,q) простих бројева p и q, тако да је $p^2 + q = 101$.

Решење: Разликујемо два случаја: 1) Ако је $p = 2$, тада је $q = 101 - 4 = 97$, а то је прост број. 2) Ако је $p \geq 3$, тада је $q = 101 - p^2$. Пошто је p прост број већи од 3, самим тим је и непаран, па је q онда паран прост број, дакле $q = 2$. Тада је $p^2 = 99$, што нема решења у скупу простих бројева. Дакле, једино решење је $(2,97)$.

Задатак 1077. Графитна оловка стаје пола евра, хемијска оловка један евро, а налив перо пет евра. Како ћемо за 20 евра купити 20 артикала?

Решење: Услове задатка можемо записати као: $\frac{x}{2} + y + 5z = 20$ и $x+y+z = 20$. Изједначавањем левих страна ове две једначине добијамо $x = 8z$, па заменом у другу добија се $y + 9z = 20$. Очигледно је да је $z = 1$ или $z = 2$. Ако је $z = 1$, тада је $y = 11$ и $x = 8$, а ако је $z = 2$, онда је $y = 2$ и $x = 16$. Видимо да имамо два различита решења.

Задатак 1078. Група дечака и девојчица је сакупила 170 динара за рођендански поклон другу. Девојчице су давале по 20 динара, а дечаци по 30. Колико је било дечака и девојчица, ако је цела група имала непаран број чланова?

Решење: Обе стране једначине $20x + 30y = 170$ могу се поделити са 10, и добијамо $2x + 3y = 17$. Једино решење која задовољавају услов да је $x + y$ непаран број је $x = 4$, $y = 3$.

Задатак 1079. (Проширивање на скуп целих бројева) Наћи бар по 4 решења у скупу целих бројева датих једначина :

$$15x + 25y = 14,$$

$$15x + 25y = 10.$$

Решење: Прва једначина нема решења у скупу целих бројева на основу теореме, јер $D(15, 25) = 5$ не дели 14. Друга једначина има решење, јер $D(15, 25) = 5|10$. Можемо поделити обе стране једначине са 5 и добијамо $3x + 5y = 2$. Једно решење је приметно и то $x_0 = -1$, а $y_0 = 1$. По теореми, остала решења су облика $x = x_0 + 5k = 5k - 1$, $y = y_0 - 3k = 1 - 3k$, где је $k \in Z$.

Задатак 1080. Решити у скупу природних бројева једначине:

$$1)x! + 2y = 25,$$

$$2)p^2 - x! = 2,$$

где је p прост број.

Решење: У првој једначини: $x! = 25 - 2y$, одакле закључујемо да $x!$ мора бити непаран број. Једино решење је $x = 1$, јер уколико је $x > 1$, онда је x паран број. Даље је $2y = 25 - 1 = 24 \Rightarrow y = 12$. У другој једначини, ако је $x = 1$, онда је $p^2 = 3$, стога нема решења. Ако је $x = 2$, онда је и $p = 2$. Ако је $x > 2$, онда је $p^2 > 4$, односно $p > 2$, па је лева страна једнакости непарана, а десна паран број, па нема више решења.

Задатак 1081. Које године XX века је рођен Бошко ако он 1999. године пуни онилико година колико износи збир цифара године његовог рођења?

Решење: Година рођења Бошка је $\overline{19xy}$, па имамо једначину: $1999 - (1900 + \overline{xy}) = 1 + 9 + x + y$.Стављајући $\overline{xy} = 10x + y$, добијамо једначину $11x + 2y = 89$, где су x и y цифре. Очигледно је x непарна цифра. Будући да је $y \leq 9$, јасно је да не може бити $x = 1$, ни $x = 3$, ни $x = 5$. Не може ни 9, јер је $9 \cdot 11 = 99$. Дакле $x = 7$, па је $y = 6$. Бошко је рођен 1976. године.

82.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 1082. Дешифровати множење:

$$*8 * * \cdot 45 = 26 * 17 * .$$

Задатак 1083. Решити у скупу природних бројева једначину $9x+10y = 1999$.

Задатак 1084. Разломак $\frac{59}{42}$ изразити као збир два разломка са једноцифреним имениоцима.

Задатак 1085. Дешифруј множење:

$$\overline{abcd} \cdot 9 = \overline{dcba}.$$

Задатак 1086. На колико начина можемо за 50 динара купити 30 поштанских марака, тако да узмемо само три врсте: од динар, од два динара и од шест динара, и то обавезно све три врсте?

Литература

[1] В. Стојановић, *Матхематископ 1* , Београд 2000.

[2] Друштво Математичара Србије, *Збирка решених конкурсних задатака за ученике 4-8. разреда* , Београд 1990.

[3] Друштво Математичара Србије, *1000 задатака (1988-1997. године)* , Београд 1998.

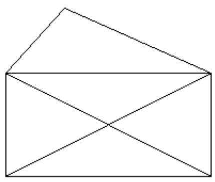
Предавање 83

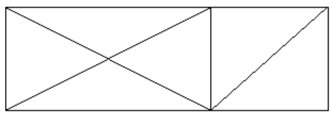
Графови

Миломир Драговић, Математичка гимназија

83.1 Задаци за рад

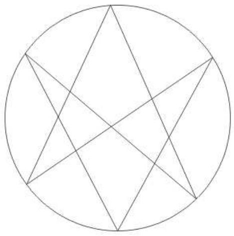
Задатак 16. Које од следећих фигура се могу, а које не могу нацртати једним потезом?





Решење: Нека фигура се може нацртати једним потезом ако су сва њена темена парна (паран број линија полази из тог темена) или су само два темена непарна.

Задатак 17. Да ли се следећа фигура може нацртати у једном потезу?



Решење: Може.

Задатак 18. Дат је многоугао са n страна и конструисане су све његове дијагонале. За које вредности n се фигура може нацртати једним потезом?

Решење: Многоуглови са непарним бројем страна се могу нацртати једним потезом укључујући све дијагонале (свако теме је тада парно), а многоуглови са парним бројем страница не могу јер је свако теме тада непарно.

Задатак 19. Доказати да у сваком друштву постоје две особе са истим бројем пријатеља у том друштву.

Решење: Нека их има n. Ако постоји особа која познаје све преостале, онда свака особа у том друштву познаје бар једног човека што значи да n особа има број познанстава између 1 и $n-1$, па морају бар две познавати исти број особа. Ако не постоји особа која познаје све преостале, онда је највећи број познанстава $n-2$, а најмањи 0. Како њих има n онда бар две опет морају познавати исти број особа.

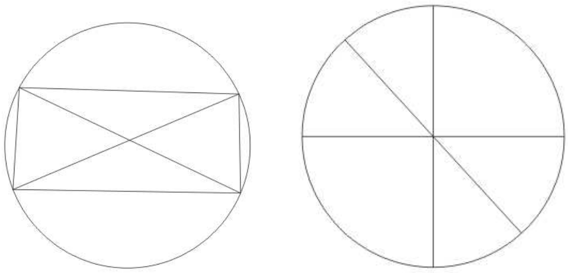
Задатак 20. Доказати да у сваком друштву паран број људи има непаран број пријатеља међу датим људима.

Решење: Како је пријатељство симетрична релација, тј. ако је A пријатељ са B онда је и B пријатељ са A то је укупан број познанстава паран. Укупан број познанстава једнак је збиру броја познаника сваке од особе, па самим тим мора бити паран број њих који имају непаран број познаника.

Задатак 21. Доказати да се међу сваких 6 људи могу изабрати 3 тако да се свих три познају међусобно или се никоји од тих 3 не познају.

Решење: Изаберимо једну особу A из тог скупа. Онда она познаје бар 3 преостале особе или не познаје бар 3. Без умањења општости можемо узети да познаје бар три особе, рецимо B, C и D. Ако се неке две од тих три особа познају међусобно онда они са A чине тражени скуп од три особе које се познају међусобно. Ако се никоје две од B, C и D не познају међусобно, оне чине тражени скуп од 3 особе које се не познају међусобно.

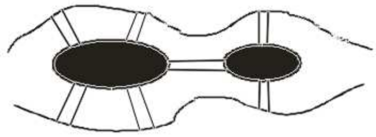
Задатак 22. Која се од фигура на слици може нацртати једним потезом оловке полазећи из: а) једне утврђене тачке; б)било које тачке



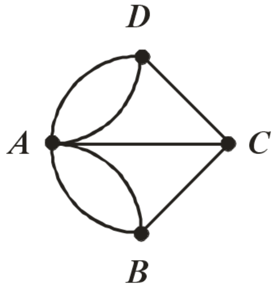
фигуре?

Решење: Посматрати парност темена.

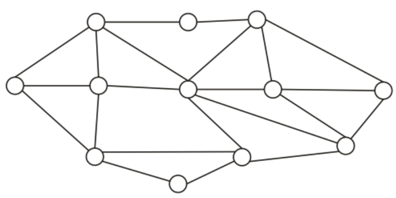
Задатак 23. У парку P налази се језеро и три острва A, B и C и 7 мостова. Може ли се поћи из неког места у парку и прећи свих 7 мостова, а да се при том преко сваког од њих пређе само једанпут? Овај проблем је решио $L.Euler$, 26. Августа 1735. године на Петроградској Академији Наука; по њему се и зову Ојлерови графови.



Решење: Овај проблем можемо свести на једноставнији облик као на слици, а затим посматрањем парности закључујемо да је то не могуће.



Задатак 24. Туристички водич је означио на карти значајна места које је група туриста желела да обиђе. Да ли је могуће да обиђу сва места, а да сваком улицом прођу једанпут? Са које раскрснице треба да крену?



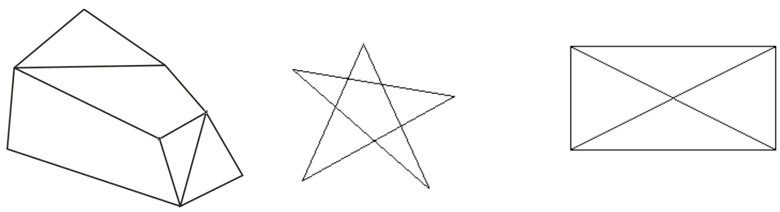
Решење: Посматрати парност сваког места. Видимо да су тачно два места непарна, дакле, могуће је направити такав план пута.

Задатак 25. Шест градова повезано је тако да сваки пар градова има директну саобраћајну везу и то или железничку или аутобуску (али не обе). Може ли се тврдити да постоје три града који су међусобно повезани саобраћајним везама исте врсте?

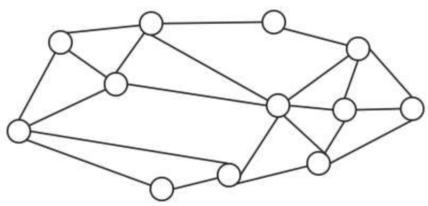
Решење: Означимо градове са A, B, C, D, E и F. Из града A мора сигурно поћи три линије исте врсте (на пример аутобуске) и нека то буду AF, AD и AB. Покушајмо да докажемо да таква три града не постоје. Закључујемо да су линије BD и DF железничке јер када неби биле онда би градови A, B, D или A, F, D били повезани линијама исте врсте. Посматрајмо сада линију BF, ако је аутобуска онда су градови A, B и F повезани линијама исте врсте, а ако је железничка онда су градови B, D и F повезани линијама исте врсте. Дакле, може се тврдити да таква три града постоје.

83.2 Задаци за домаћи рад

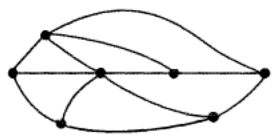
Задатак 26. Које од следећих фигура се могу, а које не могу нацртати једним потезом?



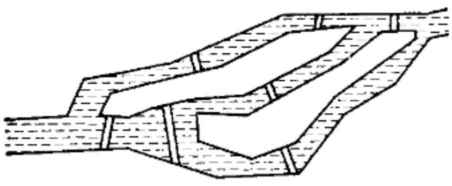
Задатак 27. На слици су нацртане пешачке стазе у парку. Одакле треба започети шетњу такву да се ниједном од њих не пређе двапут?



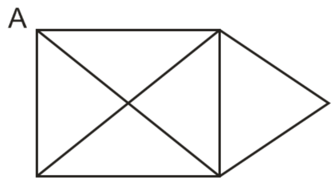
Задатак 28. Перица је залутао кроз шуму. Приметио је да је пролазио поред истих места јер је оставио траг да је био ту. Можемо ли тврдити да Перица никада није ишао истим путем?



Задатак 29. На слици је нацртана река са свим својим мостовима кроз одређено место. Да ли је могуће обићи све обале тако да се преко сваког моста пређе једанпут?



Задатак 30. Разносач новина креће из тачке A и треба да разнесе новине кроз све улице у свом комшилуку. Да ли може то да уради тако да не мора да пролази једном истом улицом два пута?



Предавање 84

Пребројавања

Никола Мркшић, Математичка гимназија

84.1 Задаци за рад

Задатак 1087. Колико постоји троцифрених бројева таквих да им је прва цифра већа од 6, а друга цифра већа од прве, а трећа парна? .

Решење: Најлакше је редом исписати те бројеве. То су бројеви $78X, 79X, 89X$. X може имати пет различитих вредности, те је укупан број одговарајућих бројева једнак 15.

Задатак 1088. Одредити број троцифрених бројева чији је збир цифара мањи од шест, али већи од два.

Решење: Одредимо број троцифрених бројева којима је збир цифара редом $3, 4, 5$. Они којима је збир цифара три су $111, 201, 210, 300$, четири $400, 310, 301, 220, 202, 211, 103, 130, 121, 112$, пет 500, 401, 410, 302, 320 311, 203, 230, 221, 212, 104, 140, 131, 113, 122. Дакле, постоји укупно 29 бројева који задовољавају дати услов.

Задатак 1089. а) Одредити број четвороцифрених бројева таквих да им је збир цифара паран. б) Одредити број таквих бројева између 1244 и 1389.

Решење: Четвороцифрених бројева има 9000. Они се могу поделити на серије по десет узастопних бројева - таквих серија у овом случају има 900. Уколико је први број паран, други је непаран, трећи паран, итд. Уколико је први непаран, други је паран, трећи непаран.. У оба случаја свака десеторка садржи по пет парних и пет непарних. Дакле, има 4500 непарних(парних) четвороцифрених бројева. Дату серију можемо поделити на два дела: 1244-1249, 1250-1389. У првом делу, ручном провером добијамо да има три парна, док у другој, слично као у првом делу задатка, добијамо да постоји $(1389 - 1250 + 1)/2 = 70$ парних. Дакле, укупно их је 73.

Задатак 1090. *Одредити број четвороцифрених бројева таквих да је збир прве две цифре паран, а друге две непаран.*

Решење: По тврђењу из другог задатка, лако је закључити да бројева са парним(или непарним) збиром цифара између 10 и 99 има 45, а између 0 и 99 тачно 50. Како прва цифра мора бити већа од 0, одговарајућих комбинација за прве две цифре има 45. Таквих ограничења за друге две цифре нема, те постоји 50 ваљаних комбинација за њих. Дакле, укупан број оваквих четвороцифрених бројева је $45 \cdot 50 = 2250$.

Задатак 1091. *Одредити број четвороцифрених бројева таквих да се завршавају са парним бројем, да им је прва цифра* 1 *или* 2*, и да им је збир цифара паран.*

Решење: Четвороцифрених бројева има укупно 9000. Оних који поцхињу са 1 или 2, дакле, има тачно 2000. Из тврђења прошлог задатка, знамо да је код тачно 1000 од ових бројева збир цифара паран. Остаје нам да обратимо пажњу на први услов, тј. да се завршавају парним бројем. Дакле, има 5 могућности за задњу цифру. Зависно од тога да ли је први број 1 или 2, занима нас број двоцифрених бројева са парним, тј. непарним бројем цифара. По прошлом задатку, и једних и других је 50(могу почињати и са нулом у овом случају). Дакле, укупан број је $5 \cdot 2 * 50 = 500$. Исти резултат могли смо добити и на лакши начин. Од бројке од 1000 коју смо добили одмах, могли смо резоновати да се, пошто су у питању узастопни бројеви, сваки други завршава парном цифром, те да их је укупно $1000/2 = 500$.

Задатак 1092. Никола је мали штребер који мора да научи напамет књигу из хемије, пошто је превише глуп да би је разумео. Књига има 1389 страна. Међутим, мали штребер какав јесте, Никола нас је преварио и унапред научио сваку десету страну напамет, а прочитао је овлаш сваку другу страну. Ако је Николи потребно да прочита страну два пута да би је научио напамет, а ако му је потребно 7 минута да прочита једну страну, колико ће му сати и минута требати да заврши са штребањем?

Решење: Израчунајмо број страна које ће Никола морати да процхита. Да ништа није учио унапред, морао би да прочита $1389 \cdot 2 = 2778$

страна. Међутим, он је већ научио напамет 138 страна, што це му уштедети 276 читања. Такође, пошто је прочитао овлаш сваку другу страну, то ће му уштедети 694 читања. Међутим, ова два скупа се преклапају, тј. Никола није уштедео 694 читања прегледањем књиге, пошто је неке странице већ знао напамет. Тих страница је 138. Дакле, Никола мора да прочита $2778 - 276 - 694 + 138$ страна, за које ће му требати 13622 минута, тј. 227 сати и 2 минута.

Задатак 1093. *Дато је десет непаралелних дужи у равни. Никоје три праве се не секу у истој тачки. У колико се тачака међусобно секу ове дужи?*

Решење: Сваке две праве се секу. Прву праву можемо изабрати на 10 начина. Другу праву можемо изабрати на 9 начина. Дакле, постоји 90 различитих парова. Међутим, овде смо сваки пар рачунали два пута - ако је прва права A, а друга B, овде смо урачунали и комбинацију AB и BA. Међутим, којим год редом да их узимамо, пресечна тачка је иста, те добијени број треба поделити са два. Дакле, тражени број тачака је 45.

Задатак 1094. *Дато је* 220 *различитих тачака у равни. Од тих* 220, *тачно* 55 *су колинеарне. Колико је различитих дужи одређено са овим тачкама? А колико правих?*

Решење: Колинеарне тачке неће утицати на број дужи, јер иако су две дужи на истој правој, а ако се не поклапају, у питању су две различите дужи. Дакле, ових дужи има $220 \cdot 219/2 = 24090$. С друге стране, колинеарност ће смањити укупан број различитих правих. Њих ће бити $220 \cdot 219/2 - 55 \cdot 54/2 + 1 = 24090 - 1485 + 1 = 22606$.

Задатак 1095. *Одредити број троуглова које формира* 300 *тачака у равни, ако су а) тачно 4 тачке колинеарне; б) 102 тачке колинеарне.*

Решење: Број троуглова био би $300 \cdot 299 \cdot 298/6$, да дате четири(102) тачке нису колинеарне. Те четири тачке спречиле су формирање тачно четири нова троугла, те је укупан број троуглова а) 4455096. б) $4455100 - 102 \cdot 101 \cdot 100/6 = 4283400$. Уочимо да овде не треба додати један троугао, као у случају формирања правих, јер колинеарне дужи не могу формирати недегенерисани троугао.

Задатак 1096. *Одредити број: а) правоугаоника; б) квадрата у јединичном правоугаонику димензија* 1244×1389, *таквих да им се горња лева ивица увек налази у ивици правоугаоника.*

Решење: Горња десна и доња лева тачка одређене су једнозначно помоћу горње леве и доње десне тачке. Како је горња лева ивица фиксирана, остаје нам само да одредимо број могућих положаја за доњу десну тачку. а) Она се може налазити било где осим на левој или горњој ивици, те је можемо изабрати на $1243 \cdot 1388 = 1725284$ начина. б) Како су квадрату обе ивице једнаке, доња десна тачка се мора налазити на једнаком растојању од горње и од леве ивице, тј. на некој од 1243 тачке које задовољавају тај услов а нису горњи леви угао.

84.2 Задаци за домаћи рад

Задатак 1097. Одредити број парних бројева са парном сумом цифара мањих од 200.

Задатак 1098. Одредити број правоугаоника која одређује квадратна мрежа димензија 5×5.

Задатак 1099. Одредити производ броја A и B, ако је A разлика између броја бројева са парним и непарним збиром цифара мањих од 2000000, а B број преступних година између 3700 године пре нове ере и 1389 године нове ере.

Задатак 1100. Дато је 1000 тачака у равни. Ако су тачно 998 од њих колинеарне, одредити број троуглова које у равни ове тачке формирају.

Задатак 1101. Ако је помоћу n тачака у равни одређено 153 дужи, колика је вредност n?

Литература

Предавање 85

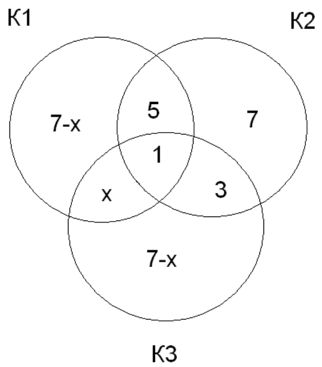
Скупови (Венови дијаграми, примена)

Тамара Шумарац, Математичка гимназија

85.1 Задаци за рад

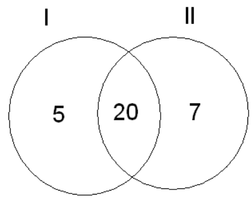
Задатак 1102. У сколи има 60 наставника од којих 39 пије кафу, 28 пије чај, а 16 пије и чај и кафу. Има ли и колико наставника који не пију кафу?

Решење: Како је $60 - (23 + 16 + 12) = 60 - 51 = 9$, то 9 наставника не пије ни чај ни кафу.



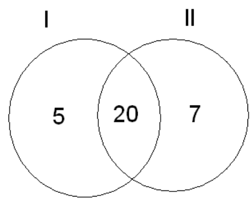
Задатак 1103. На писменој вежби из математике постављена су три задатка. Сваки ученик је решио бар један задатак, а нико није решио трећи задатак. Први задатак решило је 25 ученика, а други 27 ученика. Њих 20 је решило оба задатка. Колико ученика је радило вежбу? Колико ученика је решило само први задатак?

Решење: Како је $5+20+7=32$ то је 32 ученика радило вежбу. Само први задатак решило је $25-20=5$ ученика.



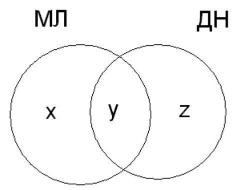
Задатак 1104. У једном одељењу од 29 ученика, њих 13 је прочитало Књигу1, 16 Књигу2, а 11 Књигу3. При томе 3 ученика нису прочитали ниједну од ове три књиге. Од оних који су прочитали Књигу2 њих 6 је прочитало Књигу1, а 4 Књигу3. Само 1 ученик је прочитао све три књиге. Колико ученика из тог одељења је прочитало само Књигу1 и Књигу3?

Решење: Са слике се види да укупан број људи који су прочитали било коју књигу износи $7-x+7-x+x+7+5+1+3=30-x$. По задатку 3 ученика није процитало ни једну књигу па укупан број људи који су прочитали било који књигу износи $29-3=26$. Сада $26=30-x$ тј. $x=4$. Дакле 3 ученика је прочитало само Књигу1, а 3 само Књигу3.



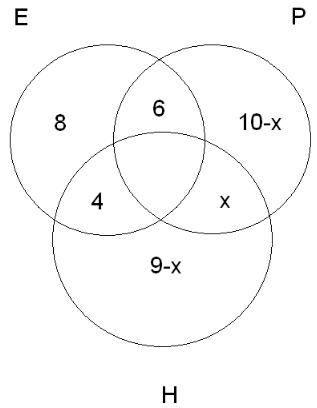
Задатак 1105. У једном одељењу 5. разреда $\frac{4}{5}$ ученика узима узима Дечије новине или Математички лист. Дечије новине узима два пута више ученика него Математички лист, а број ученика који узимају оба часописа је $\frac{1}{2}$ броја ученика који читају Математички лист. Колико ученика чита сваки од часописа, а колико оба, ако пет ученика не узима ниједан часопис?

Решење: По задатку $\frac{1}{5}$ одељења не чита ни једне новине а то је 5 људи . Дакле цело одељење има $5\cdot 5=25$ људи. Користећи слику и према задатку важи: $(y+z)=2(x+y)$ Слично $2y=x+y$ тј. $x=y$. Одатле важи $z=3y$. Укупан број људи који читају било које новине је $\frac{4}{5}\cdot 25=20$. Са друге стране то је једнако и $x+y+z=y+y+3y=5y$ тј. $5y=20$ тј. $y=4$. Дечије новине чита 16 ученика, а Математички лист 8.



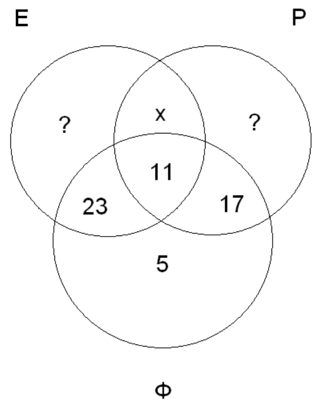
Задатак 1106. У једном одељењу које има 35 ученика сваки ученик обавезно учи један, али највише два страна језика: 18 ученика учи енглески, 16 руски, а 13 немачки језик. При томе 4 ученика учи енглески и немачки, 6 енглески и руски. Колико ученика учи само један језик, а колико учи и руски и немачки?

Решење: Са слике се види да само енглески учи 8+6+4 = 18 ученика. Укупан број ученика који учи било који језик износи 35. Са друге стране тај исти број је једнак $18+9-x+10-x+x = 37-x$ тј $37-x = 35$ тј. $x = 2$. Само један страни језик учи $8+8+7 = 23$ ученика а 2 ученика учи и руски и немачки.



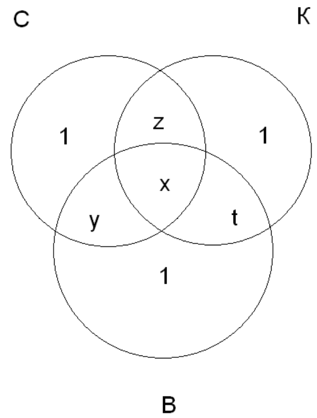
Задатак 1107. На балканском конгресу математичара сваки од 100 учесника говори бар један од три страна језика: руски говори 57 математичара, руски и француски 28, енглески и француски 34, а само француски 5; само два страна језика говори 49 учесника, а сва три језика говори 11 математичара. Колико учесника говори само енглески и руски језик?

Решење: Са слике $x + 34 - 11 + 28 - 11 = 40 + x$ људи говори тачно два страна језиак што по задатку је једнако броју 49 тј. $49 = 40 + x$ тј. $x = 9$. Само енглески говори $100 - 57 - (5 + 34 - 11) = 15$ математичара, а само руски $57 - (28 - 11) - 11 - 9 = 20$ математичара.



Задатак 1108. У насељу има 8 улица од којих свака има бар једну комуналну инсталацију. Струју има 6 улица, канализацију 4, а водовод 6 улица. Да ли постоји улица која има све инсталације ако тачно три улице имају само по једну и то различиту комуналну инсталацију?

Решење: Са слике се уочава $x + y + z = 5; x + y + t = 5$ тј. $z = t$ и $x + z + t = 3$. Сада из $x + y + 2t = 5$ и $x + y + t = 5$ следи да је $t = 0$. Дакле постоје 3 улице са све три комуналне инсталације.



Задатак 1109. На излет је кренуло 60 ученика од којих $\frac{2}{3}$ пије само кока-колу, а $\frac{4}{15}$ сок и кока-колу. Колико ученика пије само сок?

Решење: Ученика који пију само кока-колу има $\frac{2}{3} \cdot 60 = 40$. Ученици који пију и коко-колу и сок има $\frac{4}{15} \cdot 60 = 16$. Преосталих $60 - 40 - 16 = 4$ пије само сок.

Задатак 1110. У једној школи има 450 ученика. Спортом се не бави само њих 20. Остали играју кошарку,одбојку или фудбал, али само једним спортом се баве. Кошарку и одбојку заједно игра 215 ученика, а фудбал и одбојку 323 ученика. Колико ученика се бави сваким од ових спортова?

Решење: Ученика који се баве спортом има $450 - 30 = 420$. Они који се баве само фудбалом има $430 - 215 = 215$ ученика. Они који се баве само кошарком има $430 - 323 = 107$. Преосталих $430 - 215 - 107 = 108$ ученика се бави само одбојком.

Задатак 1111. На једном конгресу било је 2000 учесника од којих је сваки био филозоф или математичар, а један број учесника се бавио и филозофијом и математиком. Колико је било учесника у свакој категорији, ако је међу филозофима сваки осми био и математичар, а међу математичарима сваки тринаести и филозоф?

Решење: Нека је x број само филозофа, z само математичара, а y оних који су и филозофи и математичари. Ако је сваки осми филозоф био и математичар то је онда $(x + y) = 8y$ тј. $x = 7y$. Ако сваки 13 математичар је и филозоф анда важи $(y + z) = 13y$ тј. $z = 12y$. Сада укупан број математичара је $2000 = x + y + z = 7y + y + 12y = 20y$ тј. $y = 100$. Укупан број филозофа је 800, а математичара је 1300.

Задатак 1112. У жестоком обрачуну између гусара њих 70 од 100 изгубило је једно око, 75 једно уво, 80 једну руку и 85 једну ногу. Доказати да је бар 10 гусара изгубило истовремено око, уво, руку и ногу.

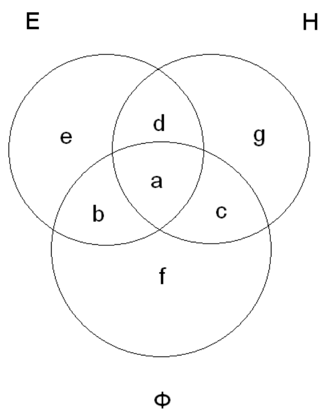
Решење: Око и уво изгубило је бар $(70 + 75) - 100 = 45$ гусара. Око, уво и руку изгубило је бар $(45 + 80) - 100 = 25$ гусара. Око, уво, руку и ногу изгубило је бар $(25 + 85) - 100 = 10$ гусара.

Задатак 1113. У једном скупу има 20 људи. Њих 16 говори енглески, 15 француски и 17 немачки језик. Доказати да најмање 8 од људи из тог скупа говори сва три језика.

Решење: Уз ознаке као са слике имамо: $a+b+c+d+e+f+g+h = 20$ $a + b + d + e = 16$ $a + b + c + f = 15$ $a + c + d + g = 17$

Ако прву једначину помножимо са 2 и одузмемо је од збира последње три једначине добијамо:

$a - (e + f + g + 2h) = 8$ тј.$a = e + f + g + 2h + 8$ тј. како су е, ф, г, х ненегативни бројеви, најмање 8 људи из тог скупа говори сва три страна језика. слика за зађ1вен



85.2 Задаци за домаћи рад

Задатак 1114. На туристичком скупу сваки од учесника говори бар један од три страна језика. Сва три говори 2 учесника; 9 говори само француски и енглески, 13 само француски и руски, 12 само руски и енглески, 29 само енглески, 6 само француски и 7 само руски језик. Колико укупно има учесника?

Задатак 1115. У петом разреду једне школе има 90 ученика. Познато је да 22 ученика учи енглески језик, 28 руски језик, а 35 француски језик. Енглески и руски учи 5, француски и енглески 7, а руски и француски 9, а само енглески 12 ученика. Колико ученика учи сва три језика, а колико не учи ни један језик?

Задатак 1116. У једном предузећу има 35 радника. Њих 20 говори стране језике, 11 зна стенографију, а 10 не зна ни једно ни друго. Колико радника зна и стенографију и стране језике?

Задатак 1117. Сви ученици једног одељења су чланови бар једне од секција: кошаркашке, рецитаторске или математичарске. У све три секције учлањено је 6 ученика; 6 ученика су чланови по две секције а по 6 ученика су чланови само по једне секције. Колико ученика има у том одељењу?

Задатак 1118. У једној школи су испитивали укус 600 ученијка. Јабуке воли 240 ученика, банане 180, а мандарине 360 ученика. Јабуке и мандарине воли 120 ученика, јабуке и банане 70 ученика. Одредити колико има ученика који воле све три врсте воћа.

Литература

[1] *1000 задатака*, Београд 2006.

[2] В. Андрић, Р. Ковачевић, И. Томић *Matematika V*, Београд, 2003.

Предавање 86

Углови

Милош Милосављевић, Математичка гимназија

86.1 Теоријски увод

Дефиниција 136. Углови су суплементни ако је њихов збир 180°.

Дефиниција 137. Углови су коплементни ако је њихов збир 90°.

86.2 Задаци за рад

Задатак 1119. Нађи меру угла ако је он једнак комплементном углу њему двоструког угла.

Решење: Нека је тај угао α. Из текста је $2\alpha + \beta = 90^\circ$, где је β угао комплементан углу 2α. Како је онда $\alpha = \beta$, то је $3\alpha = 90^\circ$, односно $\alpha = 30^\circ$.

Задатак 1120. Нађи меру угла ако је његова мера за 20° већи од мере њему суплементног угла.

Решење: Нека је тај угао α. Из текста је $\alpha + \beta = 180^\circ$, где је β угао суплементан углу α. Како је онда $\alpha = \beta + 20^\circ$, то је $2\beta + 20^\circ = 180^\circ$, одакле је $\beta = 80^\circ$. Угао $\alpha = 100^\circ$

Задатак 1121. Углови $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ су ,,суседни"(два угла су ,,суседна"кад имају заједничко теме и бар један заједнички крак) и заједно сачињавају опружен угао. Ако су свака два суседна угла једнака, одредити меру ових углова.

Решење: Имамо $\alpha = \beta, \beta = \gamma, \gamma = \delta$. Значи, сва четири угла су једнака међу собом. Одавде је $4\alpha = 180^\circ$, па је $\alpha = 45^\circ$. Дакле, $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 45^\circ$.

Задатак 1122. Углови α и β су комплементни. Наћи ове углове ако се зна $\alpha = \frac{3}{5}\beta$.

Решење: Имамо да је $\alpha+\beta = 90°$. Значи, $\frac{3}{5}\beta+\beta = 90°$. Ова једначина је еквивалентна са $3\beta + 5\beta = 450°$. Дакле, $8\beta = 450°$, па је $\beta = 56°15'$, а $\alpha = 43°45'$.

Задатак 1123. За колико је угао α већи од његовог комплементног угла, ако је за $42°18'26''$ мања од његовог суплементног угла ?

Решење: Нека је $\alpha + \beta = 180°$. Имамо $\beta = \alpha + 42°18'26''$. Одавде је $\alpha+\alpha+42°18'26'' = 180°$. Тада је $\alpha = 68°50'47''$. Комплементан угао углу α је онда $21°9'13''$. Угао α је већи од свог комплемента за $47°41'34''$.

Задатак 1124. Мера угла $\alpha+\beta$ је за $48°$ већа од мере угла $\alpha-\beta$. Наћи угао β.

Решење: Имамо да је $\alpha+\beta = \alpha-\beta+48°$. Одавде је $\beta = 48°-\beta$. Тада је $2\beta = 48°$, одакле имамо $\beta = 24°$.

Задатак 1125. Мера угла $3\alpha - \beta$ је за $60°$ мања од мере угла $3\alpha + 2\beta$, а за $42°$ већа од мере угла $\alpha - 2\beta$. Одреди углове α и β .

Решење: Из првог дела задатка закључујемо: $3\alpha - \beta + 60° = 3\alpha + 2\beta$. Одавде је $3\beta = 60°$, односно $\beta = 20°$. Из другог дела задатка је $3\alpha - 20° = \alpha - 40° + 42°$. Значи, $2\alpha = 22°$, дакле $\alpha = 11°$.

Задатак 1126. Углови α и β су суплементни, а $\frac{5}{6}\alpha$ и $\frac{1}{3}\beta$ су комплементни углови. Одредити углове α и β.

Решење: Имамо да је $\alpha+\beta = 180°$ и $\frac{5}{6}\alpha+\frac{1}{3}\beta = 90°$.Из прве једначине имамо $\beta = 180°-\alpha$. Друга једначина је еквивалентна са $5\alpha+2\beta = 540°$. Даље је $5\alpha + 2(180° - \alpha) = 540°$. Одавде је $3\alpha = 180°$, па је $\alpha = 60°$, а $\beta = 120°$.

Задатак 1127. Углови α, β, и γ су суплементни и $\alpha = \frac{1}{6}\beta$, $\beta = 2\gamma$. Нађи ове углове.

Решење: Како је $\alpha = \frac{2}{3}\beta$, и $\beta = 2\gamma$, то је $\alpha = \frac{1}{6} \cdot 2\gamma = \frac{1}{3}\gamma$. Сада имамо $\frac{1}{3}\gamma + 2\gamma + \gamma = 180°$. Ова једначина је еквивалентна са $\frac{1}{3}\gamma + 3\gamma = 180°$, односно $\gamma + 9\gamma = 540°$. Дакле $\gamma = 54°$, па је $\beta = 108°$, а $\alpha = 18°$.

Задатак 1128. Углови $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ су ,,суседни"и заједно сачињавају опрузхен угао. Ако су свака два несуседна угла комплементна, и $\gamma = \frac{3}{5}\beta$ одредити меру ових углова.

Решење: Имамо $\alpha + \gamma = 90°$, $\alpha + \delta = 90°$, $\beta + \delta = 90°$. Из прве две једнакости закључујемо $\gamma = \delta$, а из друге две $\alpha = \beta$. Сада имамо $2\beta + 2 \cdot \frac{3}{5}\beta = 180°$. Ова једначина је еквивалентна са $10\beta + 6\beta = 1800°$, па је $\beta = 56°15'$. Онда је $\delta = 33°45'$.

86.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 1129. За колико је угао α мањи од његовог суплементног угла, ако је за $25^\circ 52' 28''$ већи од његовог комплементног угла ?

Задатак 1130. Мера угла $3\alpha + 5\beta$ је за 70° већа од мере угла $3\alpha - 2\beta$, а за 50° мања од мере угла $5\alpha + 5\beta$. Одреди углове α и β .

Задатак 1131. Углови α и β су комплементни, а $\frac{6}{5}\alpha$ и $\frac{9}{4}\beta$ су суплементни углови. Одредити углове α и β.

Задатак 1132. Углови $\alpha, \beta,$ и γ су комплементни и $\alpha = \frac{1}{5}\beta$, $\beta = 5\gamma$. Нађи ове углове.

Задатак 1133. Углови $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ су ,,суседни"и заједно сачињавају опрузхен угао. Ако су свака два несуседна угла комплементна, и γ је за 20° већи од β одредити меру ових углова.

Литература

[1] Д. Аднађевић,В.Мићић,Г.Нешковић *Збирка задатака из математике за 5. разред основне сколе*, Завод за уџбенике и наставна средства 1994.

Предавање 87

Највећи заједнички делилац и најмањи заједнички садржалац

Стефан Станојевић, Математичка гимназија

87.1 Теоријски увод

Дефиниција 1. Највећи заједнички делилац природних бројева a и b је највећи природан број којим су и a и b дељиви.

Дефиниција 2. Најмањи заједнички садржалац природних бројева a и b је најмањи природан број који је дељив са a и b.

Дефиниција 3. Кажемо да су природни бројеви a и b узајамно прости ако је НЗД$(a, b) = 1$.

87.2 Задаци за рад

Задатак 1134. Одредити бројеве a и b, ако је НЗД$(a, b) = 5$ и НЗС$(a, b) = 50$.

Решење: Како је НЗД$(a, b) = 5$ имамо да је $a = 5k$, $b = 5l$, где су k и l узајамно прости природни бројеви.

Пошто је сада НЗС$(k, l) = \frac{50}{5} = 10$, и k и l су узајамно прости, закључујемо да је $kl = 10$. Сада имамо 2 могућности за ова 2 броја : $(5, 2)$ и $(10, 1)$, па имамо два коначна решења $(25, 10)$ и $(50, 5)$.

Задатак 1135. Производ два природна броја је 720, а НЗС 180. Који су то бројеви?

Решење: Како је НЗС ових бројева $180 = 2^2 3^2 5$, можемо закључити да ниједан од њих није дељив простим бројем различитим од 2,3,5, као и да је један од њих дељив са 2^2, један са 3^2 и један са 5. Како им је производ $720 = 2^4 3^2 5$, морају оба бити дељива са 2^2 док један од бројева не сме бити дељив са 3 и један од бројева не сме бити дељив са 5. Дакле, имамо 2 пара који задовољавају услове задатка :

$(2^2 3^2 5, 2^2)$ и $(2^2 3^2, 2^2 5)$, тј.

$(180, 4)$ и $(36, 20)$ су решења задатка

Задатак 1136. Збир два природна броја је 224, а НЗД 56. Нађи те бројеве.

Решење: Ове бројеве представљамо као $56k$ и $56l$.

$56k + 56l = 224$

$56(k + l) = 224$

$k + l = 4.$

Постоје два пара природних бројева који задовољавају ову једнакост - $(3, 1)$ и $(2, 2)$. Међутим, како k и l морају бии узајамно прости, одбацујемо другу могућност, па постоји само једно решење - 56 и 168.

Задатак 1137. Мирко је купио неколико оловки по 27 динара и неколико свески по 72 динара. Продавац му је за то наплатио 1234 динара. Како је Мирко знао да је продавац погрешио?

Решење: Из услова задатка можемо написати једначину $27x+72y = 1234$. Пошто је 9 НЗД за 27 и 72 важи :

$3 \cdot 9x + 8 \cdot 9y = 1234$

$9 \cdot (3x + 8y) = 1234$, па закључујемо да је 1234 дељиво са 9, што није тачно. Значи, једначина коју смо написали на почетку није тачна па је продавац погрешио.

Задатак 1138. Доказати да је НЗД$(a, b)\cdot$ НЗС$(a, b) = ab$.

Решење: Нека је $S =$НЗС(a, b). Тада је $S = ak$, за неки природан број k. Како је S дељиво са b, број $\frac{ak}{b}$ мора бити природан. Означимо НЗД$(a, b) = d$. Сада можемо написати $a = nd$ и $b = md$ за неке узајамно просте природне бројеве m и n. Ако заменимо ово у претходни израз добићемо

$\frac{nkd}{md} = \frac{nk}{m} \in N.$

Како су m и n узајамно прости, k мора бити дељиво са m, тј. $k = mt$, $t \in N$. Дакле,

$S = ak = amt = a\frac{b}{d}t = \frac{ab}{d}t.$

Са друге стране, сваки број облика $\frac{ab}{d}t$ садржи a и b. Најмањи заједнички садржалац се добија за $t = 1$ и једнак је $S = \frac{ab}{d}$.

Задатак 1139. Ако је d заједнички делилац бројева a и b, доказати да је d такође заједнички делилац бројева $a + b$ и $a - b$.

Решење: Пошто d дели и a и b можемо писати:

$a = kd$ и $b = ld$

$a + b = kd + ld = d(k + l)$
$a - b = kd - ld = d(k - l)$
Дакле, d такође дели и $a + b$ и $a - b$.

Задатак 1140. Ако је $a = bk + c$, доказати да је НЗД(a, b) =НЗД(b, c), тј. НЗД бројева a и b је једнак НЗД-у броја b и остатка при дељењу броја a бројем b.

Решење: Назовимо НЗД$(a, b) = d_1$ и НЗД$(b, c) = d_2$. Сада важи :
$kd_1 = ld_1 + c$
$c = d_1(k - l)$, d_1 дели c па је d_1 заједнички делилац за b и c. Одавде закључујемо да d_1 дели d_2 пошто сваки заједнички делилац два броја дели њихов највећи заједнички делилац.

Слично, написаћемо $a = pd_2 + qd_2 = d_2(p + q)$. Сада закључујемо да d_2 дели a, па је d_2 заједнички делилац за a и b, па d_2 дели њихов највећи заједнички делилац - d_1.

Пошто d_1 дели d_2 и d_2 дели d_1, они морају бити једнаки.

Задатак 1141. Доказати да се за природно n разломак $\frac{21n+4}{14n+3}$ не може скратити.

Решење: НЗД$(21n+4, 14n+3)$ =НЗД$(14n+3, 7n+1)$ =НЗД$(7n+1, 1) =$ 1 па се разломак не може скратити.

Задатак 1142. Наћи најмањи природан број x који даје остатак 2 при дељењу са 3,6 при дељењу са 7 и 3 при дељењу са 8.

Решење: Број $x + 1$ ће бити дељив са 3 и 7 и давати остатак 4 при дељењу са 8. Сваки број облика $8k + 4$ је дељив са 4, па је тражено x =НЗС$(3, 4, 7) = 84$.

Задатак 1143. Разлика два непарна броја једнака је 2^n. Доказати да су они узајамно прости.

Решење: НЗД ових бројева мора делити њихову разлику па дели 2^n. Међутим, како су ова два броја непарна и њихов НЗД мора бити непаран. Једини такав број који дели 2^n је 1 па су ови бројеви узајамно прости.

87.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 1144. Ако је НЗД$(x, 10) = 2$ и НЗД$(x, 21) = 7$, и $x < 50$, колико решења имамо за x?

Задатак 1145. Производ два природна броја је 300, а НЗД 10. Који су то бројеви?

Задатак 1146. Одредити све заједничке делиоце бројева $5k+6$ и $8k+7$, где је k цео број.

Задатак 1147. Ако је НЗД$(a, b) = 1$, доказати да је НЗД$(a + b, a - b)$ једнак 1 или 2.

Задатак 1148. Збир 49 природних бројева једнак је 999. Наћи највећу могућу вредност њиховог највећег заједничког делиоца.

Литература

[1] *1000 задатака*, Друштво математичара Србије 2003.

[2] Марија Станић и Небојша Икодиновић, *Теорија бројева, збирка задатака*, Завод за уџбенике и наставна средства 2004.

[3] Миољуб Исаиловић, *Збирка решених задатака за редовну и додатну наставу у 7. разреду основне школе*, Графика Шабац 2004.

Предавање 88

Разломци (операције и једначине)

Огњен Трипуновић, Математичка гимназија

88.1 Теоријски увод

Дефиниција 138. Разломак је количник два природна броја m и n, па пишемо: $m : n = \frac{m}{n}$.

Теорема 172. Разломци $\frac{a}{c}$ и $\frac{a \cdot n}{c \cdot n}$ су једнаки где је n природан број.

Дефиниција 139. Разломак чији су бројилац и именилац узајамно прости бројеви, назива се несводљив.

Теорема 173. За свака два разломка $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ важи:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, (a \geq b).$$

Теорема 174. За свака два разломка $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ важи:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}, (\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}).$$

Теорема 175. Размера два броја a и b показује колико пута је број a већи од броја b, што означавамо $a : b$.

88.2 Задаци за рад

Задатак 1149. Колики угао заклапају сатна и минутна казаљка у 8 часова и 10 минута?

Решење: У 8 часова угао између казаљки је $\frac{4}{12} \cdot 360^o = 120^o$. Угао се због минутне казаљке повећа за $x = \frac{2}{12} \cdot 360^o = 60^o$. Како се сатна казаљка креће 12 пута спорије, због ње се угао смањи за $\frac{1}{12}x$. Одатле је тражени угао једнак $120^o + x - \frac{1}{12}x = 120^o + 60^o - \frac{1}{12} \cdot 60^o = 175^o$.

Задатак 1150. У 6 сати казаљке сата образују опружен угао. За колико минута ће казаљке први пут образовати угао од 70^o?

Решење: Ако је x угао који пређе минутна казаљка до поклапања, онда важи:

$$180 - x + \frac{1}{12}x = 70,$$

$$180 - \frac{11}{12}x = 70,$$

$$\frac{11}{12}x = 110.$$

Следи $x = 120^o$, а том углу одговара 20 минута, што је и решење задатка.

Задатак 1151. Пеца поједе целу пицу за 15 минута, а Пеца и Неца заједно поједу целу пицу за 6 минута. Колико је времена потребно Неци да сам поједе целу пицу?

Решење: Пеца за један минут поједе петнаестину пице, а кад једу заједно, Пеца и Неца поједу шестину пице за један минут. Следи, за један минут Неца сам поједе $\frac{1}{6} - \frac{1}{15} = \frac{1}{10}$. Значи, Неци треба 10 минута да поједе пицу сам.

Задатак 1152. Углови α и β су суплементни, а $\frac{2}{5} \cdot \alpha$ и β комплементни. Израчунај разлику углова α и β.

Решење: Из $\alpha + \beta = 180$ и $\frac{2}{5}\alpha + \beta = 90$, одмах следи $\frac{3}{5}\alpha = 90$. Стога, $\alpha = 150^o$, $\beta = 30^o$, одакле је $\alpha - \beta = 120^o$.

Задатак 1153. Одредити све природне бројеве a и b такве да је $\frac{a}{10} + \frac{b}{15} = \frac{5}{6}$ и $\frac{1}{2} < \frac{a}{10} < \frac{3}{4}$.

Решење: Како је $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, а $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$, то је $\frac{5}{10} < \frac{a}{10} < \frac{15}{20}$, па је $a = 6$ или $a = 7$. Заменом ових вредности у једнакост $\frac{a}{10} + \frac{b}{15} = \frac{5}{6}$ добијамо да је једино решење задатка: $a = 7$, $b = 2$.

Задатак 1154. Одредити све парове природних бројева a и b таквих да је $a + b = 30$ и $\frac{2005}{2007} = \frac{198}{223} + \frac{a}{b}$.

Решење: Из друге једнакости добијамо да је $\frac{a}{b} = \frac{1}{9}$. Користећи прву једнакост добијамо да је $a = 3$, $b = 27$.

Задатак 1155. Славко и Марко су садили дрвеће. При томе $\frac{1}{3}$ садница су биле букве, $\frac{3}{8}$ орах, а остало багрем. Колико највише багрема су они засадили ако су садили мање од 360 дрвета?

Решење: $\frac{8}{24}$ укупног броја садница су букве, $\frac{9}{24}$ укупног броја су ораси, па следи да багрема има $\frac{24}{24} - \left(\frac{8}{24} + \frac{9}{24}\right) = \frac{24}{24} - \frac{17}{24} = \frac{7}{24}$ од укупног боја садница. Највећи број који је мањи од 360 и дељив је са 24 је 336. Како је $336 : 24 = 14$, следи да је број багремова $14 \cdot 7 = 98$.

Задатак 1156. Бројилац и именилац разломка $\frac{p}{q}$ су прости бројеви. Одреди просте бројеве p и q ако је збир разломка и њему реципрочног разломка једнак $\frac{130}{33}$.

Решење: Како је $\frac{p}{q} + \frac{q}{p} = \frac{130}{33}$, то је НЗС$(p, q) = 33 = 3 \cdot 11$. Значи да су тражени прости бројеви $p = 3$ и $q = 11$. Провером једнакости се потврђује истинитост.

Задатак 1157. Одредити природан број n и прост број p тако да важи $\frac{n}{1990} = \frac{1}{p}$. Колико различитих решења има проблем?

Решење: Како је $\frac{n}{1990} = \frac{1}{p}$ то је $\frac{n}{2 \cdot 5 \cdot 199} = \frac{1}{p}$. Значи да су решења проблема $p = 2$, $n = 995$; $p = 5$, $n = 398$ и $p = 199$, $n = 10$.

Задатак 1158. Дат је разломак $\frac{7989}{2010}$. Када се од бројиоца датог разломка одузме број x, а имениоцу дода x, добија се $\frac{1}{8}$. Нађи x.

Решење: Приметимо да је збир бројиоца $7989 + 2010 = 9999$. Ако бројиоцу одузмемо, а имениоцу додамо x, добиће се збир $7989 - x + 2010 + x = 9999$. Како је нови разломак једнак $\frac{1}{8}$, то је бројилац новог разломка a и именилац $8a$, па је $9a = 9999$, то је $a = 1111$. Тражени број x се може добити из једнакости $7989 - x = 1111$. Дакле, $x = 6878$.

88.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 1159. Ана поједе паковање сладоледа за 8 минута. Жељко једе сладолед три пута брже од Ане. За колико времена ће њих двоје заједно појести паковање сладоледа?

Задатак 1160. Уместо звездица стави знаке рачунских операција тако да добијеш тачну једнакост (можеш користити и заграде)

$$\frac{1}{2} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6027} = \frac{1}{2009}.$$

Задатак 1161. Одредити разломак који је једнак разломку $\frac{43}{90}$ и код кога је збир бројиоца и имениоца једнак 1995.

Задатак 1162. На једном острву три четвртине мушкараца су ожењени, а две трећине жена су удате. Који део становништва острва није у браку, ако је број ожењених мушкараца једнак броју удатих жена?

Задатак 1163. Када ће први пут после 12 сати минутна и сатна казаљка заклапати прав угао?

Литература

[1] Др Душан Андађевић, Владимир Мићић и Глиша Нешковић; Збирка задатака из математике за 5. разред основне школе; Завод за уџбенике и наставна средства, Београд и Завод за уџбенике и наставна средства, Нови Сад - 1993.

[2] Математички лист; (године: 2009/2010, 2007/2008, 2003/2004 и 2001/2002); Друштво математичара Србије, Београд

[3] ДМС, такмичења- 5-ти разред.

Предавање 89

Разломци (проширивање, скраћивање и упоређивање)

Огњен Трипуновић, Математичка гимназија

89.1 Теоријски увод

Дефиниција 140. Разломак је количник два природна броја m и n, па пишемо: $m : n = \frac{m}{n}$.

Теорема 176. Разломци $\frac{a}{c}$ и $\frac{a \cdot n}{c \cdot n}$ су једнаки.

Дефиниција 141. Разломак чији су бројилац и именилац узајамно прости бројеви, назива се несводљив.

Теорема 177. За свака два разломка $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ важи:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, (a \geq b).$$

Теорема 178. За свака два разломка $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ важи:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}, (\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}).$$

Теорема 179. Размера два броја a и b показује колико пута је број a већи од броја b, што означавамо $a : b$.

89.2 Задаци за рад

Задатак 1164. Упореди разломке $\frac{8}{119}$ и $\frac{133}{2010}$.

Решење: Како је $\frac{8}{119} > \frac{8}{120} = \frac{1}{15} = \frac{134}{15\cdot 134} = \frac{134}{2010} > \frac{133}{2010}$, следи $\frac{8}{119} > \frac{133}{2010}$.

Задатак 1165. Наћи природан број n тако да је $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{n}$ такође природан. Размотрити сва решења.

Решење: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{n} = \frac{41}{42}+\frac{1}{n}$. Како важе неједнакости $\frac{41}{42} < 1$ и $\frac{1}{n} \leq 1$, следи $\frac{41}{42}+\frac{1}{n} < 2$. Дакле, може да важи само $\frac{41}{42}+\frac{1}{n} = 1$. Одатле је $n = 42$.

Задатак 1166. Одредити све вредности природног броја n за које важи неједнакост $\frac{1}{3} < \frac{n}{12} \leq \frac{3}{4}$.

Решење: Неједнакост је еквивалентна са $\frac{4}{12} < \frac{n}{12} \leq \frac{9}{12}$., па су вредности за n бројеви 5, 6, 7, 8 и 9.

Задатак 1167. Одредити све просте бројеве p, за које је тачна неједнакост $\frac{8}{63} < \frac{1}{p} < \frac{2}{5}$.

Решење: Како је $\frac{8}{64} < \frac{8}{63} < \frac{1}{p} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$, то је $\frac{1}{8} < \frac{1}{p} < \frac{1}{2}$. Из добијене једнакости следи $2 < p < 8$. Како је p прост број, то дату неједнакост задовољавају само бројеви 3, 5 и 7.

Задатак 1168. Разломци $\frac{3{*}5{*}}{36}$ и $\frac{4{*}7{*}}{45}$ су природни бројеви. Упоредите их по величини.

Решење: Разломци $\frac{3{*}5{*}}{36}$ и$\frac{4{*}7{*}}{45}$ су природни бројеви ако је $3{*}5{*}$ дељив са 36 (дакле са 4 и 9), и $4*7*$ дељив са 45 (дакле са 5 и 9). У првом случају је то могуће ако је последња цифра 2 или 6 (због дељивости са 4), па су због дељивости са 9 могући бројеви $\frac{3435}{36} = 96$ и $\frac{3852}{36} = 107$. У другом случају последња цифра је 0 или 5 (због дељивости са 5), па су због дељивости са 9 могући случајеви $\frac{4275}{45} = 95$ и $\frac{4770}{45} = 106$. Према томе је

$$\frac{4275}{45} = 95 < \frac{3456}{36} = 96 < \frac{4770}{45} = 106 < \frac{3862}{36} = 107.$$

Задатак 1169. Одредити цифре a и b тако да је $\frac{\overline{199a1b}}{12}$ природан број. Написати сва могућа решења.

Решење: Да би тражени количник био природан број, мора дати број $\overline{199a1b}$ бити дељив са 12, односно са 3 и са 4. Како двоцифрени завршетак $\overline{1b}$ мора бити дељив са 4, то је $b = 2$ или $b = 6$. Ако је $b = 2$, онда је збир цифара датог броја једнак $22+a$, па због дељивости са 3, може бити 2, 5 или 8. Ако је $b=6$, онда је збир цифара 26Ђа, па у том случају a може бити 1, 4 или 7. Сви тражени бројеви су 199116, 199212, 199416, 199512, 199716, 199812.

Задатак 1170. Дат је разломак $\frac{1988}{1987}$. Који број треба одузети од бројиоца и додати имениоцу, да би се после скраћивања добио разломак $\frac{2}{3}$?

Решење: Нека је тражени број x. Решавањем $(1988-x):(1987+x)=2:3$, добија се $x=398$.

Задатак 1171. Одредити два разломка са двоцифреним имениоцима тако да је њихов збир $\frac{145}{1998}$.

Решење: Како је $1998=2\cdot 27\cdot 37$, то су могући следећи случајеви: $\frac{a}{27}+\frac{b}{74}=\frac{145}{1998}, \frac{a}{37}+\frac{b}{54}=\frac{145}{1998} i \frac{a}{74}+\frac{b}{54}=\frac{145}{1998}$. Тада је $74a+27b=145$, $54a+37b=145$, и $27a+37b=145$. Прва једначина нема решење. Ресхење друге једначине је $a=2$, $b=1$, а тражени разломци су $\frac{2}{37}$ и $\frac{1}{54}$. Решење треће једначине је $a=4$, $b=1$, а тражени разломци су поново $\frac{4}{74}=\frac{2}{37}$ и $\frac{1}{54}$.

Задатак 1172. Разломак $\frac{281}{140}$ приказати као збир три разломка са једноцифреним имениоцима већим од 1. Решење образложи.

Решење: Како је $140=4\cdot 5\cdot\ 7$, то су тражени имениоци 4, 5 и 7. Дакле, $\frac{281}{140}=\frac{a}{4}+\frac{b}{5}+\frac{c}{7}=\frac{35a+28b+20c}{140}$. Очигледно је $35a+28b+20c=281$. Како су бројеви $28b$ и $20c$ парни, број $35a$ мора бити непаран, па је дакле и a непаран. Ако је a непаран, тада се збир $35a+20c$ заврсава цифром 5, па следи да се број $28b=281-(35a+20c)$ завршава цифром 6. Одавде закључујемо да је $b=2$. Према томе, $35a+20c=281-56=225$. Очигледно је $a<7$, јер за $a\geq 7$ важи $35a\geq 245$. Према томе, $a=1$ или $a=3$ или $a=5$. За $a=1$ или $a=5$, добија се да не постоји цео број c. За $a=3$, добија се $20c=120$, односно $c=6$. Коначно је $\frac{281}{140}=\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{6}{7}$.

Задатак 1173. Три различита разломка имају особину да је њихов збир природан број, али и збир њихових реципрочних вредности такође природан број. Одредити бар једно решење датог проблема.

Решење: Једно од могућих решења је $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$ и $2+3+6=11$. Могућа су и друга решења, на пример: $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{1}=3$ и $\frac{3}{2}+\frac{3}{1}+\frac{1}{2}=5$.

89.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 1174. Шта је веће $\frac{61}{2010}$ или $\frac{5}{149}$?

Задатак 1175. Бројилац разломка $\frac{23}{42}$ треба увећати, а именилац умањити за исти број x, тако да се добије $\frac{7}{6}$. Који је тај број x?

Задатак 1176. Наћи све просте бројеве који задовољавају неједнацхину $\frac{3}{16} < \frac{5}{p} < \frac{2}{7}$.

Задатак 1177. Ако од броја x одузмемо збир бројева $3\frac{1}{5}$ и $\frac{7}{8}$, та разлика је већа ос разлике бројева $3\frac{1}{5}$ и $\frac{7}{8}$. Одредити све такве x.

Задатак 1178. Збир два разломка са једноцифреним имениоцима је $\frac{11}{8}$. Одреди о којим разломцима је реч. Колико решења има?

Литература

[1] Др Душан Андађевић, Владимир Мићић и Глиша Нешковић; Збирка задатака из математике за 5. разред основне школе; Завод за уджбенике и наставна средства, Београд и Завод за уджбенике и наставна средства, Нови Сад - 1993.

[2] Математички лист; (године: 2009/2010, 2007/2008, 2003/2004 и 2001/2002); Друштво математичара Србије, Београд

[3] ДМС, такмичења- 5-ти разред.

Предавање 90

Правоугаоник и квадрат(проблеми обима и површине

Вељко Марић, Математичка гимназија

90.1 Теоријски увод

Дефиниција 142. Паралелограм је правоугаоник ако има све једнаке углове (праве).

Дефиниција 143. Правоугаоник је квадрат, ако има све странице једнаке.

Теорема 180. Квадрат :
Површина- $P = a \cdot a = 1/2d^2$
Обим- $O = 4 \cdot a$

Теорема 181. Правоугаоник :
Површина- $P = a \cdot b$
Обим- $O = 2 \cdot (a + b)$

90.2 Задаци за рад

Задатак 1179. Травњак је облика правоугаоника чија је краћа страница дужине $16m$. Око травњака је направљена стаза исте ширине на свим правцима чија је површина $176cm^2$.Израчунати дужину друге странице правоугаоника (травњака) ако пешак који обиђе целу стазу идући спољном ивицом те стазе пређе $16m$ више него пешак који обиђе целу стазу идући унутрашњом ивицом те стазе

Решење: Нека је ширина стазе x, а дужина тражене странице y. Пешак који обиђе целу стазу идући спољном ивицом те стазе уствари пређе за $8x$(све у метрима) дужи пут него пешак који обиђе целу стазу идући унутрашњом ивицом те стазе. Следи да је $x = 2$. Одатле добијамо да је површина стазе $4(2 \cdot 2) + 2(2 \cdot 16) + 2(2 \cdot y) = 176$. Према томе $80 + 4 \cdot y = 176$, одавде $y = 24m$.

Задатак 1180. На травнатом терену квадратног облика дужине 200 метара, направљен је базен димензија $30m$ и $15m$. Око базена је бетонска стаза ширине 1 метар. Колико ари травњака има око базена?

Решење: Површина терена је $P_1 = 200 \cdot 200 = 40000m^2$. Површина коју заузима базен са стазом је $P_2 = 32 \cdot 17 = 544m^2$. Травњака око базена има $P = P1 - P2 = 39456m^2$, што је $394a$ и $56m^2$.

Задатак 1181. Ако једну страницу квадрата продужимо за $4cm$, а другу смањимо за $3cm$ добија се правоугаоник, чија је површина једнака површини квадрата. Колики су обим и површина квадрата и правоугаоника?

Решење: Нека је мерни број странице датог квадрата a. Како је површина добијеног правоугаоника једнака површини датог квадрата, то је $3 \cdot a = 4(a-3)$. То значи да је $3a = 4a - 12$, па је $a = 12cm$.Странице правоугаоника су тада $9cm$ и $16cm$. Површина квадрата и правоугаоника је $144cm^2$. Обим квадрата је $48cm$, а правоугаоника $50cm$.

Задатак 1182. Ако страницу квадрата повећамо за 30%, за колико се процената повећа обим, а за колико површина квадрата?

Решење: Ако се страница квадрата a увеца за 30% она це бити $1.3a$ па је обим новог квадрата $4 \cdot 1,3a = 5,2a$. Како је $5,2a/4a = 1,3$ то се обим увећа за 30%. Површина новог квадрата је $1,3 \cdot 1,3a = 1,69a^2$, па се површина увећала за 69%

Задатак 1183. Страница квадрата је $6cm$. Једном правом је подељен на 2 правоугаоника чији се обими разликују за $5cm$. Израчунај поврсхине тих правоугаоника.

Решење: Нека је x краћи исечак странице квадрата. Како је $2 \cdot (6 - x) = 2 \cdot x + 5$, па је $x = 7/4$. Из овога следа да мањи правоугаоник има површину $7/4 \cdot 6 = 21/2cm^2$, а већи правоугаоник $17/4 \cdot 6 = 51/2cm^2$.

Задатак 1184. Задана су два квадрата. Разлика дужина њихових страница износи $11cm$, а разлика њихових површина $671cm^2$. Израчунај збир обимаа заданих квадрата.

Решење: Нека је a страница мањег квадрата.Вази следећа једнакост $(a+11)(a+11) = a^2+671$, одавде добијамо да је $a = 25cm$, а већег $36cm$. Дакле збир обима тих квадрата је $244cm$.

Задатак 1185. Ученик располаже за 16 сламки дужине $1cm$, 6 сламки дужине $2cm$ и 7 сламки дужине $3cm$. Може ли се од наведених сламки конструисати правоугаоник ако се сламке не смеју ломити?

Решење: Обим правоугаоника је $16\cdot1+6\cdot2+7\cdot3 = 49cm$. Дакле $a+b$ је $24,5cm$, што је немогуће, јер се сламке не могу ломити .

Задатак 1186. Површина правоугаоника је $36cm^2$.Одредити обим ако је једна његова страница четири пута дужа од друге.

Решење: Нека је a дужина краће странице. Применимо формулу за површину $4a \cdot a = 36$,одавде $a = 3cm$. Дакле обим правоугаоника је $10a = 30cm$.

Задатак 1187. Колика је дужина стазе коју покрива 1200 плочица дузхине $25cm$ и ширине $20cm$ ако је ширина стазе 4 метра?

Решење: Означимо димензије плочице са са $a_1 = 25cm$, $b_1 = 20cm$, тада је $P_1 = a_1 \cdot b_1 = 500cm^2$.Укупна површина плочица је $P = 1200P_1 = 600000cm^2 = 60m^2$. Дужина стазе је $60m^2/4m = 15m$

Задатак 1188. Када дужину правоугаоника смањимо за $1cm$, а ширину смањимо за $2cm$ добија се квадрат чија је површина за $20cm^2$ мања од површине правоугаоника. Израчунати обим квадрата и правоугаоника.

Решење: Ако је мерни број странице добијеног квадрата a, онда је очигледно да су смањењем површине "отпала" три правоугаоника чије су површине $2 \cdot a$,$1 \cdot a$ и $2cm^2$. Значи, $2a + a + 2 = 20$,па је$3a = 18$ и $a = 6cm$, а обим квадрата $24cm$. Дакле, странице правоугаоника су $7cm$ и $8cm$, па је његов обим $30cm$.

90.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 1189. Квадрат странице $20cm$ има површину једнаку поврсхини правоугаоника, чија је ширина четири пута мања од дужине. Ко има већи обим: датаи квадрат или правоугаоник и за колико?

Задатак 1190. Страница квадрата је $12cm$, а ширина правоугаоника који има површину једнаку површини квадрата је $9cm$. Ко има веци обим: квадрат или правоугаоник?

Задатак 1191. Површина правоугаоника је $48cm^2$. Ако се једна станица увећа за 20%, а друга за 30% ,за колико процената ће се увећати површина квадрата?

Задатак 1192. Дужина правоугаоника површине $48cm^2$, три пута је ерћа од од ширине.Колики је обим тог правоугаоника?

Задатак 1193. Површина правоугаоника је $24cm^2$, а мерни бројеви страница тог правоугаоника су природни бројеви. Колико таквих правоугаоника има? Који од њих има највећи, а који најмањи обим?.

Литература

[1] Војислав Андрић,Математика $X = 1236$, Круг 2006.

[2] ДМС,1000задатака, Београд 1997.

[3] Друство Математичара Хрвацке, Такмичења

[4] ДМС, Такмичења .

Део VIII

Предавања за 4. разред

Предавање 91

Дешифровања

Петар Радовановић, Математичка гимназија

91.1 Теоријски увод

У задацима са дешифровањем користићемо четири основне операције које чине темељ математике. То су сабирање, одузимање, множење и дељење. Проблеми које ћемо овде решавати састоје се у откривању арапских декадних цифара бројева, на основу неке тачно изведене операције. Непознате цифре ћемо означавати звездицама($*$) или словима. У случају када користимо слова, подразумеваћемо да једнаким словима одговарају једнаке цифре, а различитим словима различите цифре.

91.2 Задаци за рад

Задатак 1194. Дешифровати сабирање: $A + BA + BBA = ABC$.

Решење: Најпре ћемо "потписати"сабирке и збир:
A
BA
$\underline{+BBA}$
ABC
Одмах се уочава да је $A > B$. Прецизније: $A = B + 1$. Имамо и да је $B + B = B$ или $B + B + 1 = B + 10$ или $B + B + 2 = B + 10$. У првом случају је $B = 0$, а то не одговара условима задатка. У другом слуцхају је $B = 9$, а то је немогуће, јер би тада било $A = 10$. Значи, $B = 8$. Лако је одредити да је $C = 7$. Постављено сабирање је $9+89+889 = 987$.

Задатак 1195. Дешифровати следеће множење:
$\underline{POP \cdot POP}$

POP
$\underline{\quad POP \qquad}$
$POTOP$

Решење: Имамо да је $POP \cdot P = POP$. Одавде је $P = 1$. Имамо и да је $POP \cdot O = 0$. Одавде је $O = 0$. Сада остаје још $T = P + P = 2$, па имамо решење: $101 \cdot 101 = 10201$.

Задатак 1196. Дешифровати сабирање:
SAN
$\underline{+STAN}$
2 0 0 6

Решење: Имамо да је $N + N = 6$ или $N + N = 16$. Ако је $N + N = 16$ онда је $A + A = 9$, а то је немогуће. Дакле, $N = 3$. За A имамо два случаја: $A = 0$ или $A = 5$. Ако је $A = 0$, онда је $S + T = 10$ и $S = 1$, па је $T = 9$. Одавде је једно решење $103 + 1903 = 2006$. Ако је $A = 5$, тада је $S + T = 9$, и $S = 1$, па је $T = 8$. Одавде је друго решење $153 + 1853 = 2006$.

Задатак 1197. Дешифровати сабирање:
B
$+AAAA$
$\underline{\quad AAAA}$
$BAAAA$

Решење: Имамо да је $B + A + A = A + 20$ или $B + A + A = A + 10$. У првом случају је $B + A = 20$, а то је немогуће, јер су у питању цифре. Остаје нам други случај, у коме је $B+A = 10$. Даље је $A+A+1 = A+10$, а одавде је $A = 9$, па је $B = 1$. Следи: $1 + 9999 + 9999 = 19999$.

Задатак 1198. Дешифровати множење: $*** \cdot * = 2010$.

Решење: Једноцифрени делиоци броја 2010 су 1,2,3,5 и 6, па су ресхења: $670 \cdot 3 = 402 \cdot 5 = 335 \cdot 6 = 2010$, а 1 и 2 не испуњавају услове.

Задатак 1199. Одредити природни број $JOVAN$ (једнаким словима одговарају једнаке цифре, а различитим словима одговарају различите цифре) којем је збир цифара једнак 10, такав да збир петоцифрених бројева $JOVAN$ и $NAVOJ$ представља петоцифрен број чије су све цифре једнаке.

Решење: Како је збир цифара броја $JOVAN$ једнак 10 и како су цифре J, O, V, A, N различите, једина могућност је $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Тражени збир је тада очигледно 44444 па $JOVAN \in \{10243, 14203, 30241, 34201\}$.

Задатак 1200. Производ пет узастопних природних бројева је $\overline{95 * 4*}$. Одредити непознате цифре.

Решење: Од пет узастопних природних бројева бар један мора бити дељив са 2, бар један са 3 и бар један са 5, па производ тих пет бројева мора бити дељив са 10 и са 3. Због тога, цифра јединица мора бити 0, а ако цифру стотина обележимо са a, збир $9+5+a+4+0$ мора бити дељив са 3. Следи да је a из скупа $\{0,3,6,9\}$. Провером за свако a из овог скупа следи да је једино за $a=0$ добијени производ 5 узастопних природних бројева, и то: $95040 = 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12$.

Задатак 1201. Дешифровати сабирање $****+*** = 1998$ ако сваки од непознатих сабирака има једнаку вредност било да га читамо с лева у десно, или с десна у лево.

Решење: Ради се о сабирању $ABBA+CDC = 1998$. Како је $A=1$, добијамо $1BB1+CDC = 1998$, па је $C=7$. Онда је $1BB1+7D7 = 1998$, одакле је очигледно $B=2$ и $D=7$. Дакле, $1221+777 = 1998$.

Задатак 1202. Према приложеној шеми дешифровати множење:
$\underline{23*\cdot **4}$
$**24$
$1***$
$\underline{\ 1***\qquad}$
$*1****$

Решење: Због $*\cdot **4 = **24$ закључујемо да је први чинилац број 236. (Не може бити $1\cdot **4$ четвороцифрен број.) Даље, како је $6\cdot **4 = **24$, могуће су две варијанте: $236\cdot *04$ и $236\cdot *54$. Како је и $3\cdot *04$ и $2\cdot *04$ четвороцифрен број са првом цифром 1, то ће у овом случају број $*04$ бити 504 или 604. Цифра 1 на другом месту производа $(*1****)$ даје коначан одговор: дат је производ $236\cdot 504 = 118944$.
Случај $236\cdot *54$ нема решења, јер ниједан од производа $236\cdot 554$ и $236\cdot 654$ нема облик $*1****$.

Задатак 1203. Према приложеној шеми дешифровати дељење:
$**8* : *2 = 62$
$\underline{***}$
$**$
$\underline{\quad **}$
0

Решење: Обзиром на прву цифру количника, цифру 6, можемо допунити постављени задатак са још шест цифара:
$**84 : *2 = 62$
$\underline{**2}$
64
$\underline{\quad 64}$
0
Како је $*2\cdot 2 = 64$, то је дат количник $**84 : 32 = 62$, односно $1984 : 32 = 62$.

91.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 1204. Дешифровати сабирање: МОРЕ+ПЕСАК=ПЛАЖА.

Задатак 1205. Звездице заменити одговарајућим цифрама:

$$\begin{array}{l}
15{*}{*}{*} : {*}6 = 4{*}{*} \\
\underline{{*}{*}{*}\ \ } \\
1\,04 \\
\underline{\ \ {*}2\ \ } \\
3{*}{*} \\
\underline{\ \ {*}{*}{*}\ \ } \\
0
\end{array}$$

Задатак 1206. Утврдите како гласе лева и десна страна једнакости:
$\frac{EVE}{DID} = 0,TALKTALKTALK...$
(Бројилац и именилац немају заједничке делиоце и бројилац је мањи.)

Задатак 1207. Дешифровати једнакост $VUK + LOVAC = BAJKA$.

Задатак 1208. Заменити слова одговарајућим цифрама од 0 до 9:

$$\begin{array}{l}
THE \\
EARTH \\
VENUS \\
SATURN \\
\underline{+\ URANUS} \\
NEPTUNE
\end{array}$$

Литература

[1] Миодраг Петковић, Занимљиви математички проблеми, Научна књига 1985.

[2] Војислав Андрић, Математика $X = 1236$, Круг 2006.

[3] Владимир Стојановић, Математископ 1 - Водич за шампионе, Математископ 2004.

[4] Математички лист

[5] Задаци са такмичења

Предавање 92

Проблеми обима и површине

Вељко Марић, Математичка гимназија

92.1 Теоријски увод

Дефиниција 144. Паралелограм је правоугаоник ако има све углове једнаке (праве углове).

Дефиниција 145. Правоугаоник је квадрат, ако има све странице једнаке.

Теорема 182. Квадрат :
Површина- $P = a \cdot a$
Обим- $O = 4 \cdot a$

Теорема 183. Правоугаоник :
Површина- $P = a \cdot b$
Обим- $O = 2 \cdot (a + b)$

92.2 Задаци за рад

Задатак 1209. Правоугаоник чије су дужине страница природни бројеви има површину једнаку полуобиму. Колике су његове странице?

Решење: Ако станице означимо са a и b онда је $a+b = ab$. Пробањем долазимо до закључка да добијена једнакост важи само за $a = b = 2cm$.

Задатак 1210. Странице правоугаоника су $9cm$ и $4cm$, а квадрат има једнаку површину. Ко има и за колико врћи обим?

Решење: Површина правоугаоника и квадрата је $4 \cdot 9 = 36cm^2$. Страница квадрата је $6cm(6 \cdot 6 = 36)$, па је већи обим правоугаоника и то за $2 \cdot (9+4) - (4 \cdot 6) = 2cm$.

Задатак 1211. Обим правоугаоника је $50cm$, а странице му се разликују $9cm$. Израчунати површину правоугаоника.

Решење: Станице означимо са a и b где је $b = a + 9cm$.Из формуле за обим $2 \cdot (a+a+9) = 50$ добијамо да је $a = 8cm$ и $b = 17cm$. Површина правоугаоника је $P = a \cdot b = 136cm^2$

Задатак 1212. Ако се страница квадрата повећа за $1cm$, онда се површина квадрата повећа за $17cm^2$. Колики је обим квадрата?

Решење: Када страницу квадрата увећамо за $1cm$, онда се његова површина увећ за два подударна правоугаоника и квадрат страница $1cm$. Како је површина квадрата $1cm^2$ то два преостала квадрата имају површину по $8cm^2$(и по једну страницу дужине $1cm$). Према томе полазни квадрат је имао страницу дужине $8cm$.

Задатак 1213. Када једну страницу квадрата увећамо 3 пута, а другу увећамо 2 пута добија се правоугаоник чија је површина једнака $96cm^2$. За колико је обим правоугаоника већи од обима квадрата?

Решење: Ако једну страницу увећамо 2, а другу 3 пута површина се увећа 6 пута. Како она сада износи $96cm^2$, то је полазна површина била $16cm^2$, а страница квадрата је 4 cm.Према томе обим правоугаоника је $2 \cdot (8 + 12) = 40cm$, а квадрата $16cm$.

Задатак 1214. Колико стубова, а колико дужних метара жице треба за ограђивање правоугаоне њиве дузине $40m$ и ширине $60m$, ако се на свака $4m$ налази по један стуб?

Решење: Жице треба онолико колики је обим правоугаоника, а он је $2(40 + 60) = 200m$.Значи стубова треба $200/4 = 50$.

Задатак 1215. Ако се сва поља шаховске табле поређају једно поред другог, добије се правоугаоник обима $260cm$. Израчунај површину шаховске табле.

Решење: Означимо са a страницу квадрата Једна страница првоугаоника биће a, а друга $64a$. Из формуле за обим правоугаоника добијамо да је $a = 2cm$. Одавде је површина шаховске табле $64a^2 = 256cm^2$.

Задатак 1216. Површина правоугаоника је 2 $008cm^2$. Дужина једне странице је паран број центиметара, а друге непаран број центиметара. Израчунати обим правоугаоника. Наћи сва решења.

Решење: Како је $2008 = 1 \cdot 2008 = 2 \cdot 1004 = 4 \cdot 502 = 8 \cdot 251$ задатак има два решења. Ако су дужине страница $1cm$ и $2008cm$, решење је $O = 2 \cdot (1 + 2008) = 4018cm$, а ако су дужине страница $8cm$ и $251cm$ ресхење је $O = 2 \cdot (8 + 251) = 518cm$.

Задатак 1217. Травњак је облика правоугаоника чија је краћа страница дужине $16m$. Око травњака је направљена стаза исте ширине на свим правцима чија је површина $176cm^2$.Израчунати дужину друге странице правоугаоника (травњака) ако пешак који обиђе целу стазу идући спољном ивицом те стазе пређе $16m$ више него пешак који обиђе целу стазу идући унутрашњом ивицом те стазе

Решење: Нека је ширина стазе x, а дужина тражене странице y. Пешак који обиђе целу стазу идући спољном ивицом те стазе уствари пређе за $8x$(све у метрима) дужи пут него пешак који обиђе целу стазу идући унутрашњом ивицом те стазе. Следи да је $x = 2$. Одатле добијамо да је површина стазе $4(2 \cdot 2) + 2(2 \cdot 16) + 2(2 \cdot y) = 176$. Према томе $80 + 4 \cdot y = 176$, одавде $y = 24m$.

Задатак 1218. На травнатом терену квадратног облика дужине 200 метара, направљен је базен димензија $30m$ и $15m$. Око базена је бетонска стаза ширине 1 метар. Колико ари травњака има око базена?

Решење: Површина терена је $P_1 = 200 \cdot 200 = 40000m^2$. Површина коју заузима базен са стазом је $P_2 = 32 \cdot 17 = 544m^2$. Травњака око базена има $P = P1 - P2 = 39456m^2$, што је $394a$ и $56m^2$.

92.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 1219. Површина правоугаоника је $24cm^2$, а мерни бројеви страница тог правоугаоника су природни бројеви. Колико таквих правоугаоника има? Који од њих има највећи, а који најмањи обим?

Задатак 1220. Ако се страница квадрата повећа за $1cm$, онда нови квадрат има површину за $9cm^2$ већу од првобитног. Колики је обим већег, а колики мањег квадрата?

Задатак 1221. Ако једну страницу квадрата продужимо за $4cm$, а другу смањимо за $3cm$ добија се правоугаоник, чија је површина једнака повешини квадрата. Колики су обим и површина квадрата и правоугаоника?

Задатак 1222. Дужина правоугаоника површине $48cm^2$, три пута је врћа од од ширине.Колики је обим тог правоугаоника?

Задатак 1223. Ако једну страницу правоугаоника смањимо за $3cm$, а другу смањимо за $2cm$,добијемо квадрат чија је површина за $21cm^2$ мања од површине правоугаоника. Израчунај странице правоугаоника.

Литература

[1] Војислав Андрић,Математика $X = 1236$, Круг 2006.

[2] ДМС,Припремни задаци за уценике 4-ог разреда,Београд 1989.

[3] Мара Јанковић и Снежана Ковачевић,Математицарење.Пчелица 2006.

[4] Тања Гојић и Тања Миљковић,Математичке свезналице.Школска књига 1995.

[5] ДМС, Такмичења .

Предавање 93

Задаци сустизања и престизања

Вељко Марић, Математичка гимназија

93.1 Теоријски увод

Дефиниција 146. Брзина је једнака количнику пређеног пута и времена за које је тај пут пређен $v = s/t(v$ -брзина ,t-време,s-пређени пут) $s = v * t$ $t = s/v$

93.2 Задаци за рад

Задатак 1224. На удаљености од 125 метара, пас је опазио зеца и појурио за њим. Истог трнутка зец се дао у бег. Једнаким скоком зец прескаче 1/2 метра, а пас 2 метра. Пас скочи 2 пута у времену у којем зец скочи 7 пута. Колику удаљеност је претрчао пас од тренутка када је опазио зеца, до тренутка када га је уловио?.

Решење: Пас скочи 4 пута у времену у којем зец скочи 14 пута. За то време пас пређе 8 метара, а зец 7 метара, дакле, у 4 скока пас смањи за један метар растојање. Да би надокнадио предност зеца, пас мора да пређе 125 пута по 8 метара. Према томе да би уловио зеца, пас је морао да пређе 1000 метара.

Задатак 1225. Над северним полом истовремено су три земљина сателита. Први обиђе Земљу за 90 минута, други за 105 минута, а трећи за 2 часа. Колико пута ће први сателит обићи Земљу до тренутка када први пут сва три поново буду над северним полом?

Решење: Најмањи заједнички садржалац за $90, 105, 120$ је 2520, па ће се сва три сателита наћи над северним полом први пут после 2520 минута. За то време ће први обићи Земљу $2520/90 = 28$ пута.

Задатак 1226. Двојица моторциклиста кренули су истовремено из места A и B један другом у сусрет. Први се кретао брзином од $1km/min$, а други брзином од $800m/min$. Кад су се срели први моторциклиста је прешао $66km$ више од другог. Колико је растојање између места A и места B?

Решење: Први моторциклиста је прелазио $200m$ више сваког минута. Одатле можемо добити колико времена је возио до сусрета $66km/200m = 66000m/200m = 330min$.Пошто је први сваког минута прелазио $1km$, он је прешао $330 \cdot 1km = 330km$, а други $330 - 66 = 264km$. Растојање између места A и B је $594km$

Задатак 1227. Из места C и D међусобно удаљених $462km$ истовремено полазе возови један другом у сусрет. Воз из места C креће се брзином $43km/h$, а други воз брзином $34km/h$.Колико је времена протекло од њиховог поласка до сусрета?На ком растојању од места C ће се срести возови?

Решење: Оба воза за $1h$ пређу $43 + 34 = 77km$. Значи да је време потребно до сусрета $462/77 = 6h$. Из овога следи да ће се срести на растојању од $6 \cdot 43 = 258km$

Задатак 1228. Две девојчице се такмиче у трчању. Млађа претрчи за минут $180m$,а старија $200m$. Млађа је почела да трчи минут пре него што је кренула старија. Колико времена треба да трчи старија да би стигла млађу девојчицу?

Решење: Знамо да је млађа већ прешла $180m$ више у самом старту, али исто тако знамо да старија прелази више $200m - 180m = 20m$ сваког минута. Значи старија девојчица ће стићи млађу за $180m/20m = 9$ минута

Задатак 1229. Пас је угледао зеца на раздаљини од $240m$ испред себе. Зец претрчи $500m$ за 2 минута, а пас претрчи $1325m$ за 5 минута. За које време ће пас стићи зеца?

Решење: Зец претрчи $500/2 = 250m$ у минуту, а пас $1325/5 = 265m$ за један минут. Дакле, пас сваког минута надокнађује $265 - 250 = 15m$. Према томе, пас ће стићи зеца после $240/15 = 16$ минута.

Задатак 1230. Коњаник треба да стигне пешака који путује већ 7 сати. Колико му времена за то треба, ако пешак прелази $5km$, а коњаник $12km$ на сат?

Решење: Пешак има предност од $7 \cdot 5 = 35km$. Како сваког сата коњаник надокнађује $12 - 5 = 7km$, да би надокнадио $35km$ потребно му је $35/7 = 5$ сати

Задатак 1231. Растојање између Београда и Бара је $400km$.Првом комбију је потребно $10h$ да стигне од Београда до Бара, а другом $5h$. Ако оба комбија крену истовремено из Београда ка Бару ,за колико времена ће се поново сусрести?

Напомена:Чим сигне у Бар други комби креће натраг за Београд!
Решење: Брзина првог комбија је $400km/10h = 40km/h$, а другог $400/5 = 80km/h$.После $5h$ од почетка кретања други комби креће из Бара ка Београду(прешао је цео пут), за то време први комби је прешао растојање од $40 \cdot 5 = 200km$.Растојање између комбија је сада $200km$. Време које ће протећи до сусрета је $200/(40 + 80) = 1h40min$. Из претходног следи да је укупно време протекло до сусрета $6h40min$.

Задатак 1232. Из места А крене бициклиста константном брзином. Три сата после њега, крене за њим аутомобил константном брзином која је четири пута већа од брзине бициклисте. После колико времена, у односу на полазак бициклисте, га је аутомобил сустигао?

Решење: До тренутка сустизања они су прешли исте путеве: бициклиста $s = v \cdot t$, а аутомобил $s = 4v \cdot (t - 3h)$. Ако изједначимо леве стране добијамо $v \cdot t = 4v \cdot (t - 3h)$. Одавде је тражено време $t = 4h$

Задатак 1233. Из два места, један у сусрет другоме, кренула су два бициклиста у размаку од једног часа. Један се кретао брзином $10km/h$, а други брзином $20km/h$. Ако су се бициклисти срели на половини пута, колико времена је прошло до сусрета?

Решење: То што су се бициклисти срели на половини пута, говори нам да су они прешли исти пут до сусрета. Нека је t време протекло од поласка другог бициклисте до сусрета. Одавде можемо извести следеће $10km/h \cdot (t + 1h) = 20km/h \cdot t$, дакле $10km/h \cdot t = 10km$. Решавањем једначине добијамо $t = 1h$. Дакле време протекло од почетка кретања првог бициклисте до сусрета је $2h$.

93.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 1234. Из два пристаништа кренула су истовремено један другом у сусрет два брода. Први брод се кретао брзином $22km/h$, а други брод брзином од $28km/h$. Колико је растојање између пристаништа, ако се зна да су се бродови срели после 40 часова?

Задатак 1235. Два дечака возе бицикле. Млађи прелази сваког минута $120m$, а старији $150m$. Млађи је пошао један минут пре старијег. Колико је потребно минута старијем да га стигне?

Задатак 1236. Пас је на растојању од $150m$ угледао зеца. За које време ће пас стићи зеца, ако зец за $2min$ пређе $500m$, а пас за $5min$ пређе $100m$?

Задатак 1237. Два часовника навијена су 4. априла 1987. године у 9 сати изјутра. Један од њих ради тачно, а други напредује $3min$ сваког сата. Ког дана у колико сати ће оба часовника поново показивати исто време?

Задатак 1238. Бициклиста је у 12 сати кренуо брзином од $10km/h$ из места A у место B, које је удаљено $60km$. Из B према A кретао се мотоциклиста брзином $30km/h$. Срели су се на половини пута. У колико сати је кренуо мотоциклиста?

Литература

[1] Војислав Андрић,Математика $X = 1236$, Круг 2006.

[2] ДМС,Припремни задаци за уценике 4-ог разреда,Београд 1989.

[3] Мара Јанковић и Снежана Ковачевић,Математицарење.Пчелица 2006.

[4] Тања Гојић и Тања Миљковић,Математичке свезналице.Школска књига 1995.

[5] ДФС,такмичења 6-ти разред.

Предавање 94

Задаци везани за кретање

Вељко Марић, Математичка гимназија

94.1 Теоријски увод

Дефиниција 147. Брзина је једнака количнику пређеног пута и времена за које је тај пут пређен $v = s/t$(v -брзина ,t-време,s-пређени пут) $s = v \cdot t$ $t = s/v$

94.2 Задаци за рад

Задатак 1239. Пешак је прешао пут од $24km$ за неколико часова. Колико километара би прешао бициклиста, ако би утрошио два пута више времена него пешак и ако би сваког часа прешао три пута већи пут?

Решење: Бициклиста би прешао $2 \cdot 3 \cdot 24 = 144km$

Задатак 1240. Од куће до школе ученик прелази $30km$. Пешице прелази пет пута краћи пут него аутобусом. Колико дуго путује од школе до куће, ако пешице прелази $4km/h$, а аутобус вози просечно $50km/h$?

Решење: Ученик пређе $5km$ пешице и $25km$ аутобусом.Значи пешице иде $1h15min$, а $30min$ аутобусом. Од куће до школе иде укупно $1h45min$.

Задатак 1241. Два аутомобила кренула су истовремено аутопутем. Један иде брзином $60km/h$, а други $80km/h$. При поласку удаљени су $200km$. Колико ће бити удаљени кроз један сат?

Решење: Овај задатак има четири решења у зависности од тога у ком се смеру аутомобили крећу:

а) Ако се крећу један другом у сусрет: $200-(60+80)=60km$
б) Ако се крећу у супротним смеровима: $200+(60+80)=340km$
ц) Ако други ауто сустиже први: $200-80+60=180km$
д) Ако први ауто сустиже други $200-60+80=220km$

Задатак 1242. Воз дужине $500m$ иде брзином $60km/h$. Колико ће му требати да прође кроз тунел дужине $500m$?

Решење: Кад локомотива уђе у тунел и воз је ушао у тунел, а тек кад последњи вагон изађе из тунела и цео воз је изашао из тунела. Локомотива и цела композиција пређу $500m$ у тунелу и још $500m$ док последњи вагон изађе из тунела. $500+500=1000m=1km$. Дакле, док цео воз изађе из тунела потребан је $1min$.

Задатак 1243. Дужина пута између места A и B износи $595km$. У 7 сати ујутру, истог дана пођу из ова два места један другом у сусрет камион и аутомобил. Сваког сата камион прелази $45km$, а аутомобил $60km$. После тачно три сата вожње направили су паузу од $30min$, а затим истом брзином наставили пут даље.Коилико су били удаљени један од другог камион и аутомобил у $13h30min$?

Решење: Путовали су $13h30min-30min=13h$, затим $13h-7h=6h$. Камион је за то време прешао $45\cdot 6=270km$, а аутомобил $60\cdot 6=360km$. Удаљени су били $(270km+360km)-595km=35km$

Задатак 1244. Растојање од места A до места B путник пређе за 6 сати. Ако брзину свог кретања повећа за $3km/h$ онда му је довољно 4 сата. Колика је раздаљина између A и B?

Решење: Нека је v брзина путника. Из разлога што је пут константан очигледно је $6v=4(v+3)$.Одавде добијамо да је $v=6km/h$.

Задатак 1245. Група туриста путовала је осам сати возом, 15 сати аутобусом и 7 сати бродом и прешла укупно 1449 километара. Аутобус је ишао 2 пута спорије од воза и два пута брже од брода. Колико километара је група путника прешла сваким од превозних средстава?

Решење: Ако је брод ишао $x\ km/h$, онда је аутобус прелазио $2x$, а воз $4x\ km/h$. За 8 сати воз је прешао $8\cdot 4=32x$, аутобус $15\cdot 2x=30x$ и брод $7\cdot x=7x$ километара. Дакле пређени пут је $32x+30x+7x=69x=1449km$. Одавде је $x=21km$, што значи да је брод ишао брзином од $21km/h$, аутобус $42km/h$, а воз $84km/h$.

Задатак 1246. Воз са девет вагона прошао је поред Ане, која је чекала да пређе пругу, за 12 секунди. Колика је брзина воза ако је дужина сваког вагона 16 метара?

Решење: Дужина свих 9 вагона је $9 \cdot 16 = 144m$, а они су поред Ане прошли за 12 секунди. Значи да је брзина воза $144/12 = 12m/s$. За један час тај воз пређе $12 \cdot 60 \cdot 60 = 43200$ метара

Задатак 1247. Из града A у град B и обратно истовремено крену 2 камиона један ка другом. Растојање између градова је $390km$, а један од камиона је бражи од другог за $10km/h$. Колику брзину има сваки камион,ако је после 3 сата растојање између камиона $24km$?

Решење: Нека је брзина споријег x, а бржег $x{+}10$. Тада је спорији за 3 сата пешао $3x$, а бржи $3x + 30km$. Дакле $3x + 3x + 30 + 24 = 390$, или $6x = 390 - 54 = 336$, па је $x = 56km/h$. Постоји и друго решење уколико су се у међувремену мимоишли.Тада је $6x + 30 - 24 = 390$ или $6x = 384$,а $x = 64km/h$

Задатак 1248. Моторни чамац, крећући се супротно току реке, ако је брзина реке $2km/h$, растојање од 36 километара прелази за 4 часа. Колико времена му је потребно да пређе исто растојање, истом брзином у односу на реку, крећући се у смеру тока реке? У повратку брзина реке је $1km/h$.

Решење: Нека је v брзина чамца у мирној води. Вази следеће $36km = (v - 2km/h) \cdot 4h$.Одавде $4 \cdot v = 44km/h$, дакле $v = 11km/h$. Чамац ће у повратку стићи за $36/(v + 1) = 3h$

94.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 1249. Трактор пређе пут дужине $1m$, ако му предњи точак начини један обртај, а $4m$ ако му задњи точак начини 1 обртај. Колики пут пређе трактор ако му на том путу предњи точак начини 39 обртаја више него задњи точак?

Задатак 1250. Могу ли три човека, ако имају мотоцикл са два седишта, прећи пут од $60km$ за 3 сата, ако је брзина пешака $5km/h$, а брзина моторцикла $50km/h$?
Напомена: За време стизања на циљ узимамо тренутак када је последњи човек стигао на циљ.

Задатак 1251. Када је аутомобил прешао 1/4 пута и још 50км, остало му је да пређе 1/2 пута и $6km$. Колика је дужина пута?

Задатак 1252. Стеван је пустио голуба писмоношу у 7:30h да однесе поруку Рајку. Голуб је Рајку донео поруку у 9:10h. Ако голуб прелети 4km за 10min, колико је растојање између Стевана и Рајка?

Задатак 1253. Одредити време потребно да моторни чамац оде из места A у место B и врати се назад по реци као и по језеру. Брзина чамца у односу на воду у оба случаја је 8km/h, а брзина реке је 4km/h.Рстојање између А и B је 20 km.

Литература

[1] Војислав Андрић,Математика $X = 1236$, Круг 2006.

[2] Мара Јанковић и Снежана Ковачевић,Математицарење.Пчелица 2006.

[3] Тања Гојић и Тања Миљковић,Математичке свезналице.Школска књига 1995.

[4] ДФС,такмичења 6-ти разред.

Предавање 95

Једначине и изрази

Александра Димић, Физички факултет

95.1 Теоријски увод

Кроз наредне задатке увежбаваћемо технику решавања једначина и бавити се основним математичким изразима.

95.2 Задаци за рад

Задатак 1254. Мајка дели јабуке својој деци. Ако свакоме да по 5 јабука претекну јој 3 јабуке, а ако свакоме да по 6 јабука недостају 2 јабуке. Колико има деце а колико јабука?

Решење: Обележимо број деце са x, а број јабука са y. Поставимо систем једначна. $y = 5x+3$ и $y = 6x-2$. Изједначавањем десних страна ових једначина добија се $x = 5$ и лако се рачуна да је $y = 28$. Мајка има петоро деце и 28 јабука.

Задатак 1255. Брат је 2 пута старији од сестре, а 4 пута млађи од свог оца.Отац и ћерка имају заједно 36 година. Колико година имају заједно брат, сестра и њихов отац?

Решење: Ако број година брата обележимо са a, број година сестре са b, а број година оцс са c. Тада, на основу текста задатка важи: $a = 2b, c = 4a$, односно $c = 8b$. Збир оца и ћерке износи $9b$. Одатле следи да је број година сестре 4, брата 8, а њиховог оца 32. Збир њихових година износи 44.

Задатак 1256. У шуми је било укупно 564 зечева и веверица. Када се број зечева повећао 3 пута, а број веверица 5 пута, укупно их је било 2010. Колико је зечева, а колико веверица било у шуми на почетку

Решење: Ако број зечева означимо са x, а број веверица са y и поставимо систем једначина добија се : $x + y = 564$ и $3x + 5y = 2010$. Решавањем система добија се да је зечева било 355, а веверица 209.

Задатак 1257. Воћке су засађене тако да је у сваком реду 15 воћака. Када би у воћњаку било 6 редова мање, а у сваком реду 5 воћака више, онда би у целом воћњаку било укупно 10 воћака више. Колико је редова воћака засадено?

Решење: Означимо број редова воћака са x. Тада је $15x + 10 = 20(x - 6)$ Решавањем се добија $x = 22$.

Задатак 1258. Марија и Милица су решиле да купе збирку из математике. За куповину збирке Марији је недостајало 16, а Милици 4 динара. Када су удружиле средства недостајало им је 2 динара. Колико кошта збирка?

Решење: Ако Марија има x динара, Милица y динара, а збирка кошта z динара тада важи: $z = x + 16$, $z = y + 4$ и $z = x + y + 2$. Решавањем система добија се да збирка кошта 18 динара.

Задатак 1259. Столар је израдио 100 столица, од којих су неке имале 3 ноге, а остале 4 ноге. Колико је столица појединe врсте израдио столар ако све столице имају укупно 322 ноге?

Решење: Број троногих столица означимо са x, а четвороногих са y. Систем једначина гласи:$x + y = 100, 3x + 4y = 322$. Одатле следи да је $y = 22$, односно $x = 78$.

Задатак 1260. Збир обима три једнака правоугаоника износи 360 cm. Израчунај дужину и ширину једног од ових правоугаоника ако је дузхина за 1 dm већа од ширине.

Решење: Ако дужину обележимо са a, а ширину са b и изразимо их у cm, тада имамо: $6(a+b) = 360$ и $a = b+10$. Одатле следи да је ширина 25 cm, а дужина 35 cm.

Задатак 1261. Нина је капут, кошуљу и ципеле платила 1 600 долара. Капут је платила 900 долара више од кошуље, а кошуљу и капут 1 200 долара више од ципела. Колико је платила капут, колико кошуљу, а колико ципеле?

Решење: Нека је цена капута x, цена кошуље y, а цена ципела z долара. Из услова задатка имамо:$x+y+z = 1600, x = y+900, x+y = 1200+z$. Из прве и трецв1е једначине добијамо да је ципеле платила 200 долара. Комбинацијом друге и треће добија се са је капут платила 1050 долара,а кошуљу 350 долара.

Задатак 1262. Три рибара су заједно уловила 146 kg рибе. Када је први продао 23 kg, други 19 kg, а трећи 32 kg остала им је једнака колична рибе. Колико је сваки од њих уловио?

Решење: Нека је први уловио x kg, други y kg, а трећи z kg. Поставимо једначине: $x + y + z = 146, x - 23 = y - 19 = z - 32$. Добија се да је први уловио 47, други 43, а трећи 56 kg.

Задатак 1263. Вино у боци кошта 400 динара. Вино је 7 пута скупље од боце. Колико кошта боца, а колико вино?

Решење: Ако цену боце обележимо са x, а цену вина са y, имамо $y = 7x$ и $x + y = 400$. Следи да је $8x = 400$, односно $x = 50$. Цена боце је 50, а цена вина 350 динара.

95.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 1264. Бака је рекла својим унуцима следеће: Ако сваком од вас испечем 2 погачице, онда ће ми остати теста за још 3 погачице. Да сваком од вас испечем по 3 погачице, нисам припремила довољно теста, јер ми недостаје теста за 2 погачице. Колико унучади има бака?

Задатак 1265. У продавници хокејашке опреме за штап и пак треба платити укупно 1500 динара. За два штапа и три пака треба платити укупно 3300 динара. Колика је цена једног пака?

Задатак 1266. У једној игри са друговима, Марко је купио 100 бомбона по цени 5 бомбона за 2 динара, а затим их све продао по цени 2 бомбоне за 1 динар. Колико динара је Марко зарадио у игри?

Задатак 1267. Пре 5 година отац је био 5 пута старији од сина, а за 10 година биће само 2 пута старији. Колико година сада имају отац и син?

Задатак 1268. На полици су три књиге. Прва има 90, друга 110, а трећа 150 страница. Корице књига су једнаке дебљине и свака од њих је дебљине 2 мм. Колико милиметара су дебеле књиге узете заједно ако се зна да је 10 страница дебљине 1 мм?

Литература

[1] Војислав Андрић, *Математика Ш-Приручник за припемање за такмичење ученика основних школа од IV до VIII разреда*, Круг, Београд 2006

[2] Часопис "Математички лист", Друштво математичара Србије, Београд 1967-2009.

[3] *Link : http://public.carnet.hr/mat-natj/l*

Предавање 96

Мерења и пресипања

Марко Ракић, Математичка гимназија

96.1 Задаци за рад

Задатак 1269. Помоћу посуда од 3 литра и 5 литара, насути тачно 4 литра воде.

Решење:

$5l$	$3l$	потез
0	3	сипамо
3	0	преспемо
3	3	сипамо
5	1	преспемо
0	1	проспемо
1	0	преспемо
1	3	сипамо
4	0	преспемо

Задатак 1270. Млекарица Мица треба да измери тачно 5 литара млека, међутим, она има само посуде од 4 и 7 литара. Како ће она то извести?

Решење:

$7l$	$4l$
0	0
0	4
4	0
4	4
7	1
0	1
1	0
1	4
5	0

Задатак 1271. Тања је у продавници тражила 400 грама брашна. Како ће продавачица сипати тачно толико у кесу, ако има само 2 посуде, од 800 и 500 грама?

Решење:

$800g$	$500g$	кеса
0	500	0
500	0	0
500	500	0
800	200	0
800	0	200
0	0	200
0	500	200
500	0	200
500	500	200
800	200	200
800	0	400

Задатак 1272. Дате су 3 кутије са кликерима: једна са 13, једна са 10 и једна са 4 кликера. Помоћу тачно 3 пребацивања распоредити кликере тако да их је у свакој кутији једнак број. Пребацивања се врше тако што из једне кутије у другу пребацимо тачно половину броја кликера који је био у другој.

Решење:

13	10	4
13	8	6
9	12	6
9	9	9

Задатак 1273. Дате су 3 посуде. Прва је запремине 8 литара, и у њој се налази 5 литара воде, друга 5 литара са 3 литра воде и трећа 3 литра са 2 литра воде. Помоћу 2 пресипања измерити 1 литар воде.

Решење:

$8l$	$5l$	$3l$	пресипање
5	3	2	почетак
4	3	3	из прве у трећу
4	5	1	из треће у другу

Задатак 1274. Од 6 кликера један има мању масу од осталих. Помоћу само 2 мерења на теразијама без тегова одреди који је кликер лакши.

Решење: Поделимо их у 3 групе по два. Упоредимо неке две групе. 1. Ако су у равнотежи, лакши кликер је међу два која нису мерена. Кад их упоредимо, проналазимо лакши. 2. Ако нису у равнотежи, тражени кликер се налази међу она два која су лакша. Мерењем та два долазимо до траженог.

Задатак 1275. Између 4 наизглед једнака прстена 2 су златна, а 2 позлаћена. Златни прстенови су једнаке масе, а позлаћени су такође једнаке масе међу собом, али нешто лакши од златних. Како са два мерења, на теразијама без тегова, утврдити који су прстенови златни?

Решење: Нумеришимо их са бројевима 1-4. Упоредимо 1 и 2. Ако су исте масе, упоредимо 2 и 3. Ако је $2 < 3$, онда су 3 и 4 златни, у супротном су 1 и 2 златни. Ако је $1 > 2$, упоредимо 2 и 3. Ако је $2 = 3$, 1 и 4 су златни,а ако је $2 < 3$, онда су 1 и 3 златни. Слично ако је $1 < 2$.

Задатак 1276. Од 4 наизглед једнаке куглице једна је лакша или тежа од остале три. Како помоћу теразија без тегова, са само три мерења одредити која је лакша или тежа од осталик и да ли је лакша или тежа?

Решење: Нека се ради и куглицама A, B, C и D. У првом мерењу се упоређују куглице A и B. Ако је $A = B$, онда су неисправне куглице C или D. Сада се упоређују A и C. Ако је $A = C$, онда је неисправна куглица D, а упоређивањем A и D утврђује се да ли је D лакша или тежа од A. Ако је $A > C$, онда је C лакша и неисправна куглица. Ако је $A < C$, онда је C тежа, а неисправна куглица. Ако је $A < B$ или $A > B$, онда су C и D исправне куглице. Упоредимо A и C. Ако је $A = C$, онда је B неисправна куглица и упоређивањем са A утврђујемо да ли је лакша или тежа. Ако је A лакше или теже од C, онда је A неисправна куглица.

Задатак 1277. У складишту се налазе јабуке упаковане у сандуке од по 30, 18 и 13 килограма. Како узети 80 килограма јабука, без отварања сандука?

Решење: $2x13kg$ и $3x18kg$

Задатак 1278. Јасна од 10 килограма шећера треба да измери 1 килограм и 400 грама, помоћу теразија и 2 тега: од 100 и 50 грама. Како ће она то извести помоћу тачно 4 мерења?

Решење: Прво мерење: поделимо целу количину шећера на два једнака дела од по 5 килограма. Друго мерење: поделимо један од тих делова на два дела од по 2 килограма и 500 грама. Треће мерење: поделимо један од тих делова на два дела од по 1 килограм и 250 грама. Четврто мерење: помоћу тегова измеримо 150 грама и додамо на један део од 1 килограм и 250 грама.

96.2 Задаци за домаћи рад

Задатак 1279. Бака Мила жели да унуку пошаље 2 литра сока, али има само две посуде, од 8 и 11 литара. Како ће она одмерити тачно 2 литра?

Задатак 1280. Како бисте, помоћу судова од 7, 4 и 2 литра измерили тачно 5 литара?

Задатак 1281. У канти има 12 литара бензина,који треба поделити на два једнака дела, и пресути у резервоаре два аутомобила, помоћу два празна суда запремине 5 и 7 литара. Како се то може учинити?

Задатак 1282. Од 3 новчица један је фалсификат, лакши од правог. У једном мерењу одреди који је неисправан.

Задатак 1283. У магацину се налазе џакови са кромпиром од 13, 16 и 35 килограма. Како без отварања џакова узети тачно 100 килограма кромпира?

Литература

[1] В. Андрић, Математика *IV*, Ваљевопринт 1999.

Предавање 97

Површине правоугаоника у решавању проблемских задатака

Александра Димић, Физички факултет

97.1 Теоријски увод

Поједине проблемске задатке компликовано је решавати без цртања одговарајуће скице. Кроз наредне задатке и примере покушаћемо да објаснимо употребу површине правоугаоника у решавању проблемских задатака.

97.2 Задаци за рад

Задатак 1284. Производ два броја је 192. Ако један од њих увећамо за 4 добија се као производ 240. О којим бројевима је реч?

Решење: Нека су тражени бројеви a и b. Производ ab једнак је површини правоугаоника чије су странице a и b. Ако се страница a продужи за 4 тада се површина увећа за $240 - 192 = 48$. Значи да је страница b једнака $48 : 4 = 12$. Одатле лако рачунамо $a = 192 : 12 = 16$.

Задатак 1285. Петар и Маја деле бомбоне. У првој подели као производ бројева њихових бомбона добија се 20. Мама је одлучила да Петру дода још једну бомбону и сада је производ 25. Колико су бомбона имали Маја и Петар на почетку?

Решење: Имали су 9 бомбона.

Задатак 1286. Ако се страница квадрата повећа за 1, онда се поврсхина квадрата повећа за 17. Колики је обим квадрата?

Решење: Када се нацрта слика види се $2a+1=17$, одатле се добија $a=8$. Обим квадрата је 32.

Задатак 1287. Ако једну страницу датог квадрата продужимо за 1, а другу за 2, новодобијени правоугаоник има површину за 20 већу од површине квадрата. Колики је обим правоугаоника?

Решење: Са слике се види да је $3a+2=20$ Одатле следи $a=6$. Новодобијене странице правоугаоника су 7 и 8, па је обим тог правоугаоника 30.

Задатак 1288. Ако једну страницу квадрата продужимо за 4, а другу смањимо за 3 добија се правоугаоник, чија је површина једнака поврсхини квадрата. Колики је обим квадрата?

Решење: Са слике можемо поставити једнакост $3a=4(a-3)$. Одатле следи да је $a=12$. Обим квадрата износи 48.

Задатак 1289. Мотоциклиста је кренуо на пут. Крећући се првом брзином која износи $60km/h$ он пређе пут за $6h$. Међутим, ако убаци у другу брзину он ће за исто време прећи пут од $540km$. Одредити за колико је друга брзина већа од прве.

Решење: Када се нацрта слика види се да је разлика пређених путева $180km$. Одатле се за разлику брзина добија $180km : 6h = 30km/h$.

Задатак 1290. Група излетника уговори вожњу аутомобилом тако да сваки од њих плати 60 динара. Међутим, 5 излетника откаже, тако да су остали за вожњу морали платити по 20 динара више од предвиђеног. Колико је излетника пошло на пут?

Решење: Када се нацрта скица добија се $5\cdot 60=20(x-5)$, где је x број излетника. Добија се да је број излетника који су уоварали вожњу био 20, а 15 је оних који су пошли на пут.

Задатак 1291. Површина правоугаоника је 2255. Ако једну његову страницу умањимо за 6, површина правоугаоника износиће 2009. Колики је обим полазног правоугаоника?

Решење: Са слике се види да је $6a=2255-2009$. Добија се да је $a=41$, а из почетне површине добија се да је $b=55$. Обим полазног правоугаоника износи 192.

Задатак 1292. Баштован је решио да засади цвеће. Ако искористи само своју квадратну башту, остаће му неколико бусенова из расадника. Решио је да купи од комшије $3m$ земље и тако продужи једну страницу своје баште. Тако ће посадити све бусенове. Ако знамо да је површина баште повећана за 12 квадратних метара и да један бусен заузима 1 квадратни метар, израчунајте колико је бусенова цвећа имао баштован.

Решење: Са слике се види да је $a = 4m$, где је a дужина странице квадратне баште. Баштован је имао 28 бусенова.

Задатак 1293. Одредити прозивод два броја, ако је познато да ако се један од њих смањи за 4, њихов производ се смањи за 12, а ако се други смањи за 2, њихов производ се такође смањи за 12.

Решење: Помоћу слике утврђујемо да је један од тих бројева 3, а други 6. Њихов прозивод износи 18.

97.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 1294. Растојање од места А до места Б путник пређе за $6h$. Ако брзину свог кретања повећа за $3km/h$ онда су му довољна $4h$. Колика је раыдаљина између А и Б.

Задатак 1295. Производ два броја је 20. Ако се првом дода 2 новодобијени производ износи 28. О којим бројевима се ради?

Задатак 1296. Разлика дужина страница два парка квадратних облика износи 11, а разлика њихових површина 671. Израчунати колика је дужина жице потребна да се ограде ови паркови.

Задатак 1297. Ивана и Сања су пошле у шетњу. Успут су кренуле да беру шумске јагоде. После прве пређене стазе Ивана рече Сањи: Производ бројева наших јагода износи 200, али ако ти Сања убереш још 5 јагода производ ће тада износити 300. Колико јагода су досада убрале Сања и Ивана?

Задатак 1298. Ако страницу датог квадрата смањимо за 4, а другу повећамо за 8, добијамо правоугаоник чија је површина једнака површини квадрара. За колико је обим правоугаоника већи од обима квадрата?

Литература

[1] Војислав Андрић, *Математика Ш-Приручник за припемање за такмичење ученика основних школа од IV до VIII разреда*, Круг, Београд 2006

[2] Часопис "Математички лист", Друштво математичара Србије, Београд 1967-2009.

[3] *Link : http://public.carnet.hr/mat-natj/l*

Предавање 98

Пребројавање геометријских фигура

Марко Ракић, Математичка гимназија

98.1 Теоријски увод

Теорема 184. Број дужи које су одређене са n тачака је $n \cdot (n-1) : 2$.

Теорема 185. Број троуглова одређених са n тачака, од којих никоје три нису на истој правој, је $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) : (3 \cdot 2)$. То је највећи број троуглова који мозе бити одређен са ових n тачака.

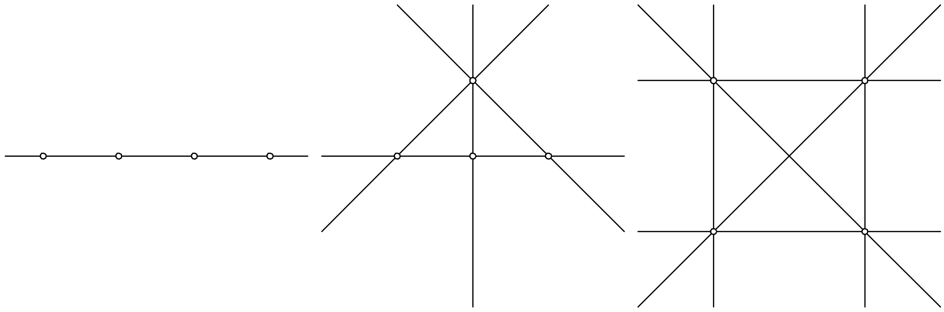
98.2 Задаци за рад

Задатак 1299. Дато је 7 тачака од којих никоје 3 нису на истој правој. Колико је дужи и троуглова одређено њима?

Решење: Дужи: $(7 \cdot 6) : 2 = 21$. Троуглова: $(7 \cdot 6 \cdot 5) : (3 \cdot 2) = 35$.

Задатак 1300. Дато је 4 различитих тачака. Колико правих може бити одређено тим тачкама?

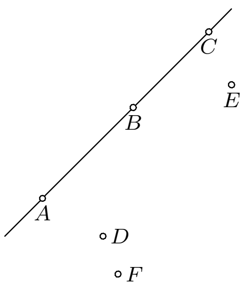
Решење:



Задатак 1301. Дато је 8 тачака, од којих никоје 3 нису на истој правој. Колико је правих одређено са тих 8 тачака?

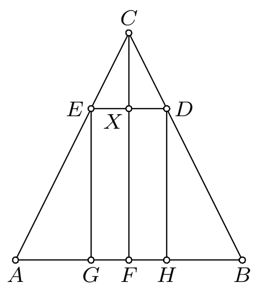
Решење: Пошто никоје 3 тачке нису на истој правој, број правих које оне одређују биће једнак броју дужи које оне одређују, тј. $(8 \cdot 7) : 2 = 28$.

Задатак 1302. Колико је правих, а колико дужи одређено тачкама са слике?



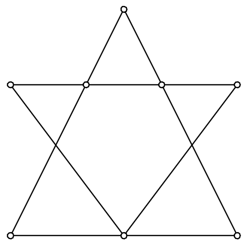
Решење: Правих има:$AC, AD, AF, AR, BD, BF, BE, CD, CF, CE, DF, DE, FE$ - 13. Дужи има:$(6 \cdot 5) : 2 = 15$.

Задатак 1303. Колико дужи, а колико троуглова има на датој слици?



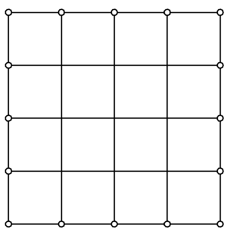
Решење: Приметимо да кад имамо на једној правој: а) само 2 тачке, на њој се налази једна дуж; б)3 тачке, на њој се налази 3 дужи; в) 4 тачке, на њој се налази 6 дужи; г) 5 тачака, на њој се налази 10 дужи. На слици имамо следеће праве: EG, DH - 2 тачке; AC, BC, CF, ED - 3 тачке; AB - 5 тачака. То је укупно $2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 10 = 24$ дужи. Посматрајмо најмање делове слике и обележимо их на следећи начин: троугао AEG - 1, CEX - 5, CXD -6, DBH - 4 и правоугаонике $EXFG$ - 2 и $XDHF$ - 3. Имамо троуглове $1, 4, 5, 6, 56, 125, 346, 123456$, тј. 7 троуглова.

Задатак 1304. Колико дужи, а колико троуглова има на датој слици?



Решење: Користећи решење претходног задатка добијамо да има 27 дужи и 7 троуглова.

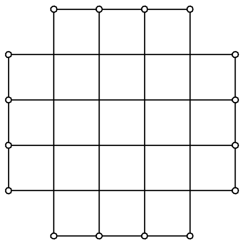
Задатак 1305. Колико има квадрата, а колико правоугаоника на датој слици?



Решење: Квадрате ћемо да бројимо по димензијама, $1 \times 1, 2 \times 2, 3 \times 3$ и 4×4. $1 \times 1 - 16$; $2 \times 2 - 9$; $3 \times 3 - 4$, $4 \times 4 - 1$, укупно 30. Правоугаонике ћемо поделити на оне са следећим димензијама: $1 \times 2, 2 \times 1, 1 \times 3, 3 \times 1, 1 \times 4, 4 \times 1, 2 \times 3$, $3 \times 2, 2 \times 4, 4 \times 2, 3 \times 4, 4 \times 3$. $1 \times 2 - 12$, а исто толико има и 2×1 правоугаоника, пошто је слика симетрична. $1 \times 3, 3 \times 1 - 2 \cdot 8$; $1 \times 4, 4 \times 1 - 2 \cdot 4$; $2 \times 3, 3 \times 2 - 2 \cdot 6$; $2 \times 4, 4 \times 2 - 2 \cdot 3$; $3 \times 4, 4 \times 3 - 2 \cdot 2$.

Укупно 70, што са оних 30 квадрата чини 100 правоугаоника.

Задатак 1306. Колико на следећој слици има квадрата, а колико правоугаоника који нису квадрати?



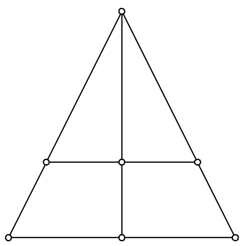
Решење: Користећи идеју претходног задатка, добијамо да на слици има 38 квадрата и 106 правоугаоника.

Задатак 1307. Дато је 5 дужи. Колико је највише права одређено њиховим крајевима?

Решење: Пет дужи могу имати највише 10 различитих крајних тачхака. Десет различитих тачака одређују највише $(10{\cdot}9) : 2 = 45$ правих.

Задатак 1308. Дато је 7 тачака. Колико најмање, а колико највише троуглова може бити одређено овим тачкама? Да ли оне могу одређивати тачно 6 троуглова?

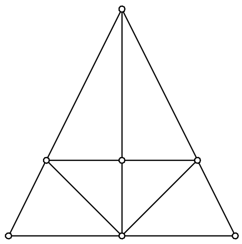
Решење: Најмање 0, кад су све тачке на истој правој, највише $(7 \cdot 6 \cdot 5) : (3 \cdot 2) = 35$, кад никоје 3 не припадају истој правој. Могу одређивати 6 троуглова (слика).



98.3 Задаци за домаћи рад

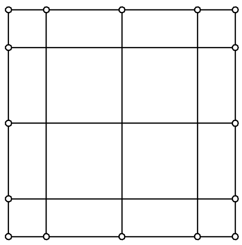
Задатак 1309. На правама a и b налазе се 3 и 4 тачке. Колико је правих, а колико дужи одређено њима?

Задатак 1310. Колико троуглова има на слици?

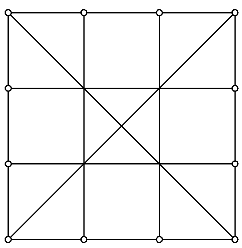


Задатак 1311. Дато је 6 тачака, од којих никоје 3 нису на истој правој. Колико дужи, правих и троуглова је одређено тим тачкама?

Задатак 1312. Колико квадрата и правоугаоника има на датој слици?



Задатак 1313. Колико дужи, троуглова, квадрата и правоугаоника који нису квадрати има на слици?



Литература

Предавање 99

Пребројавања (низови, нумерације)

Љубомир Радаковић, Електротехнички факултет

99.1 Задаци за рад

Задатак 1314. Старој књизи недостају прве 142 странице, тако да књига почиње од 143. странице, а завршава се страницом која је написана такође цифрама $1, 3, 4$, али у другом редоследу. Колико страница има стара књига?

Решење: Број страница мора бити паран и већи и од 143, стога је последња страница 314-та. Број страница те књиге је $314 - 142 = 172$.

Задатак 1315. Залудни математичар је на табли исписао природне бројеве $1, 2, 3, \ldots$ редом један за другим, и тако добио запис $123456789101112\ldots$. А ово је све писао да би сазнао која је цифра на 2011. месту. Он је добио да је то цифра 9. Да ли је залудни математичар био у праву и да ли је могао ово краће да реши?

Решење: Наравно да је могао краће да реши ово све. Једноцифрених бројева има 9, двоцифрених 90, троцифрених 900 итд. Претпоставимо да је математичар исписао све једноцифрене и све двоцифрене бројеве, стога он је употребио тачно $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 = 189$ цифара. Како је $2011 > 189$ математичар је ипак исписивао и троцифрене. Претпоставимо да је он сада исписао и све троцифрене, а то значи да је употребио тачно $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 900 \cdot 3 = 2889$ цифара. Како је $2889 > 2011$ то значи да је 2011. цифра негде међу троцифреним бројевима. Приметимо да је $2011 = 9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 607 \cdot 3 + 1$. Из овога закључујемо да су употребљени сви једноцифрени бројеви, сви двоцифрени и 607 троцифрених бројева, укључујући и прву цифру 608. троцифреног броја.

Шестоти троцифрени број је 699, па је онда 607. троцифрени број 706. Из овога закључујемо да је 608. троцифрени број 707, па је тражена цифра 7. Залудни математичар је очигледно нешто био расејан тај дан.

Задатак 1316. Ако су књиге у једној библиотеци нумерисане на следећи начин: $[brknj][od]$, где је $brknj$ број књига у одеску od, одредити колико пута је употребљена цифра 4 при нумерацији књига у библиотеци. Одсек od се означава словима a, b, c, d и e, где је број књига у одсецима редом $200, 250, 300, 350, 402$. Пример: $124b$, 124. књига у одеску b.

Решење: Најпре ћемо одредити колико је пута употребљена цифра 4 у одсеку a. Као цифра јединица, број 4 се јавља једном у једноцифреним бојевима, 9 пута у двоцифреним и 10 пута у троцифреним. Као цифра десетица број 4 се појављује 10 пута у двоцифреним бројевима и 10 у троцифреним бројевима. Како у одсеку a има 200 књига, цифра 4 је употребљена $1 + 9 + 10 + 10 + 10 = 40$ пута. У одсеку b на сличан начин се добија да је цифра 4 употребљена $1+9+10+10+10+5+10 = 55$ пута. У одсеку c је употребљена $1 + 9 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 60$ пута, док у одсеку d се појављује $1 + 9 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 5 + 10 = 75$ пута. И на крају у одсеку e се појављује $75 + 5 + 3 = 83$ пута, јер смо искористили три пута цифру 4 на месту стотина, што је укупно $40 + 55 + 60 + 75 + 83 = 313$.

Задатак 1317. Којом се цифром завршава производ првих 2011 непарних бројева?

Решење: Како се међу непарним бројевима налази и број 5, а производ броја 5 и било ког другог непарног броја завршава се цифром 5. Из овога закључујемо да се тражени производ завршава цифром 5.

Задатак 1318. Којом цифром се завршава производ 2010 седмица?

Решење: Приметимо да је $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2041$, односно да се прозивод четири седмице завршава цифром 1. Прозивод $7 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 7$, можемо написати и као $(7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot \ldots \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7)$, јер је $2010 = 502 \cdot 4 + 2$. Свака заграда од по 4 седмице даје прозивод који се завршава цифром 1, а последња заграда даје производ који се завршава цифром 9. Коначно, последња цифра датог прозивода је 9.

Задатак 1319. Одредити задњу цифру производа $2^2 \cdot 5^5 \cdot 7^7$.

Решење: Последња цифра броја 5^5 је 5. Производ броја који се завршава цифром 5 и било ког парног броја се завршава цифром 0. Како је $2^2 = 4$ паран број из претходног следи да је последња цифра траженог производа 0.

Задатак 1320. Која се пета цифра здесна(цифра хиљада) добија у резултату следећег множења: $6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 29$?

Решење: Најбоље би било да избројимо са колико нула се завршава дати прозивод. Свака нула се ђобија"множењем броја 2 и броја 5, односно броја дељивог са 2 и 5. Како је $8 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 25 = 600000$, видимо да се производ завршава са 5 нула, па је и цифра хиљада 0.

Задатак 1321. На колико начина се у кружиће могу распоредити бројеви $1, 2, 3, 4, 5$

$$\bigcirc > \bigcirc > \bigcirc < \bigcirc > \bigcirc$$

(сваки број у један кружић) тако да буду задовољене све неједнакости?

Решење: Јединица може бити уписана или у трећи квадратић (тада имамо 6 могућности: $32154, 43152, 42153, 54132, 53142$ и 52143) или у пети квадратић (тада имамо 3 могућности: $54231, 53241$ и 43251). Дакле, имамо укупно 9 могућности.

Задатак 1322. Шест карата је нумерисано бројевима, и то:

$$309, 9, 41, 98, 5, 2.$$

Који је најмањи број, који се може формирати ређањем ових карата једне до друге?

Решење: Најмањи број је 2309415686. Напомена: карте 98 и 9 се окрену наопачке.

Задатак 1323. У броју 275486392839 избрисане су четири цифре, тако да је новодобијени број најмањи, а затим су поново избрисане три цифре тако да је новодобијени број највећи. Који је то број?

Решење: Ако желимо да остане најмањи број поступаћемо на следећи начин: ако је прва цифра већа од друге, бришемо прву цифру. Ако није прва цифра већа од друге, прву цифру остављамо и поредимо другу и трећу цифру, итд. У датом броју је $2 < 7$ и двојка остаје. Пошто је $7 > 5$, онда цифру 7 бришемо и остаје број 25486392839. У новодобијеном броју опет поредимо прву и другу цифру, и видимо да је $2 < 5$, па то остављамо. Даље је $5 > 4$, па бришемо цифру 5, итд. После 4 избрисане цифре најмањи добијени број је 2439283. Од овог броја тражимо да после брисања три цифре остане највећи могући број. Поступак је сличан као за одређивање најмањег, осим што сада уколико је прва цифра мања од друге бришемо прву цифру. Коначно се добија да је тражени број 49839.

99.2 Задаци за домаћи рад

Задатак 1324. За нумерацију једне књиге потребно је 4089 цифара. Колико страна има та књига, а колико листова?

Задатак 1325. Којом цифром се завршава производ $2^{2010} \cdot 3$?

Задатак 1326. Прецртавањем цифара у броју 19875400136 направити најмањи петоцифрени број.

Задатак 1327. Наставите низ: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 11, \ldots$. Наћи општу формулу за добијање n-тог члана низа.

Задатак 1328. У једној улици куће са десне стране нумерисане су парним бројевима $2, 4, \ldots, 36$, а са леве стране непарним бројевима $1, 3, \ldots, 41$. Колико има кућа у тој улици?

Литература

[1] В. Стојановић, *Матхематископ 1* , Београд 2000.

[2] Друштво Математичара Србије, *Збирка решених конкурсних задатака за ученике 4-8. разреда* , Београд 1990.

[3] Друштво Математичара Србије, *1000 задатака (1988-1997. године)* , Београд 1998.

Предавање 100

Проблемски задаци са једначинама

Марко Ракић, Математичка гимназија

100.1 Задаци за рад

Задатак 1329. Збир два броја је 2010, а разлика 584. Који су то бројеви?

Решење: Нека су тражени бројеви x и $2010-x$. Имамо да је разлика та два броја $((2010-x)-x)$ једнака 584. Из те једначине добијамо да је $x=713$.

Задатак 1330. Збир умањеника и разлике је 105, а разлика је за 3 већа од умањиоца. Одреди умањеник и умањилац.

Решење: Означимо разлику са r. Тада је умањеник једнак $105-r$, а умањилац $r-3$. Ако убацимо умањеник, умањилац и разлику у овом облику убацимо у једначину , имамо да је $(105-r)-(r-3)=r$, одакле је $r=36$. Дакле, умањеник је једнак $105-36=69$, а умањилац $36-3=33$.

Задатак 1331. Одредити 8 узастопних природних бројева чији је збир 100.

Решење: Нека је најмањи од њих a. Тада имамо да је $a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)+(a+5)+(a+6)+(a+7)=100$. Дакле $8*a+28=100$, одакле је $a=9$. Значи, тражени бројеви су 9,10,11,12,13,14,15 и 16.

Задатак 1332. Збир 3 броја је 424.Ако први повећамо 4 пута, други смањимо за 4 и трећи смањимо 4 пута, добићемо једнаке бројеве. Који су то бројеви?

Решење: Обележимо број који се на крају добије са $4 * k$. Онда је први број једнак k, други $4*k+4$ и трећи $16*k$. Дакле, $k+4*k+4+16*k = 424$, из чега следи да је $k = 20$, па су тражени бројеви 20, 84 и 320.

Задатак 1333. Брат и сестра су добили 2000 динара џепарца. Брат је дао четвртину тих пара за лопту, а сестра петину остатка за лутку. Колико је пара остало?

Решење: Брат је потрошио: $2000 : 4 = 500$ динара. Сестра је потросхила: $(2000 - 500) : 5 = 300$ динара. Дакле остало је: $2000 - 500 - 300 = 1200$ динара.

Задатак 1334. Мајка је пре 5 година била 6 пута старија од кћерке, а за 5 година ће њих две заједно имати 55 година. Колико година тренутно има свака од њих?

Решење: Кћерка је пре 5 година имала x, а мајка $6 * x$ година. За 5 година, кћерка ће имати $x + 10$, а мајка $6 * x + 10$. Следи да је $x + 10 + 6 * x + 10 = 55$, тј. $x = 5$. Значи, кћерка сада има $x + 5 = 10$ година, а мака $6 * x + 5 = 35$ година.

Задатак 1335. На крају четвртог разреда, ученици једног одељења, које има 20 ђака, су скупљали паре за поклон учитељици. Сваки дечак је дао по 200 динара, а свака девојчица по 150 динара. Укупно су скупили 3600 динара. Колико у том одељењу има дечака, а колико девојчица?

Решење: Нека је број дечака a. Онда девојчица има $20 - a$. Тада су ученици дали укупно $200 * a + 150 * (20 - a)$ динара. Како тај израз мора бити једнак 3600, добијамо да је $a = 12$. Дакле, има 12 дечака и 8 девојчица.

Задатак 1336. Ана, Мара и Ема имају укупно 35 јабука. Ана и Мара имају заједно 25 јабука, а Мара и Ема 22. Колико јабука има свака од њих?

Решење: Нека је број јабука које има Ана једнак a, Мара m и Ема e. Тада је $a+m+e = 35$ и $a+m = 25$ из чега следи да је $e = 35-25 = 10$. Слично имамо да је $e = 13$. Тада је $a + e = 10 + 13 = 23$, па је $m = 35 - 23 = 12$. Ана има 13 јабука, Мара 12 и Ема 10.

Задатак 1337. Гусари је требало да се чамцима довезу од брода до пустог острва. Ако би у сваки чамац село по 5 гусара, један гусар не би имао места, а ако би у сваки чамац село по 6 гусара, један чамац би остао празан. Колико је чамаца, а колико гусара?

Решење: Обележимо број чамаца са x. Тада је број гусара у првом случају $5 * x + 1$, а у другом $6 * (x - 1)$. Дакле, $5 * x + 1 = 6 * (x - 1)$, из чега следи да је $x = 7$. Значи, има 7 чамаца и $5 * 7 + 1 = 36$ гусара.

Задатак 1338. Одредити троцифрени број који се повећа 13 пута ако му се са леве стране допише цифра 3.

Решење: Када се троцифреном броју са леве стране допише цифра 3, то је као да смо га увећали за 3000. Дакле, ако је нас троцифрен број једнак a, $3000 + a = 13 * a$, тј. $a = 250$.

100.2 Задаци за домаћи рад

Задатак 1339. Два друга желе да купе лопту. Првом фали 254, а другом 252 динара. Ако скупе свој новац, фалиће им још 16 динара. Колико кошта лопта?

Задатак 1340. Збир пет бројева, од којих је сваки следећи за 27 већи од претходног, је 305. Одреди те бројеве.

Задатак 1341. У две кесе налази се исти број кликера. Када је из обе узето укупно 18 кликера, у првој је остало 14, а у другој 10 кликера. Колико је кликера било у свакој кеси на почетку?

Задатак 1342. Ученици једног одељења су требали да се разместе у клупе. Ако у сваку клупу седне по 2 ученика, две клупе остају празне, а ако у сваку клупу седне по један ђак, 6 особа нема место. Колико је ученика, а колико клупа?

Задатак 1343. За две године, Маја ће имати 3 пута више година од Милице. Колико оне сада имају година, ако је Маја 14 година старија?

Литература

Предавање 101

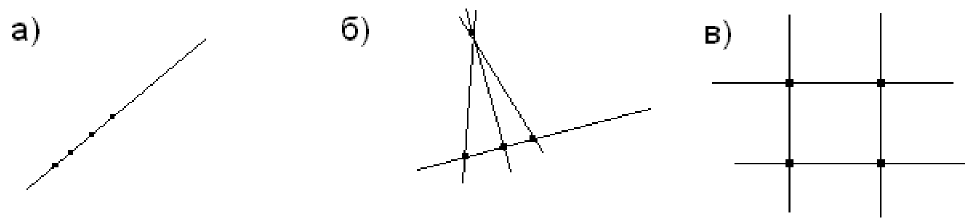
Конфигурације у геометрији са условима

Тамара Шумарац, Математичка гимназија

101.1 Задаци за рад

Задатак 1344. Какав међусобни положај имају 4 различите тачке, ако оне одређују: а) 1; б) 4; в) 6 правих?

Решење:



Задатак 1345. Какав међусобни положај имају 6 различтих тачака ако оне одређују тачно 10 правих?

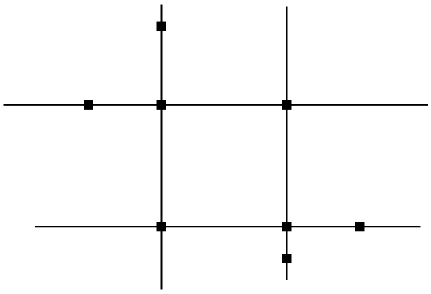
Решење: Четири тачке припадају једној правој, а преостале две су ван ње и оне чине праву којој не припада ни једна од преостале четири тачке из задатка.

Задатак 1346. Распоредити 3 тачке на 3 праве тако да свака садржи тачно 2 од датих тачака.

Решење: Све 3 праве се међусобно секу. Пресеци тих правих су тачке из задатка.

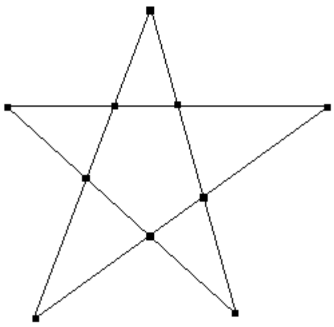
Задатак 1347. Може ли се 8 тачака распоредити на 4 праве тако да су на свакој правој по 3 тачке?

Решење:



Задатак 1348. Распоредити 10 тачака на 5 правих тако да на свакој правој буду по 4 тачке.

Решење:

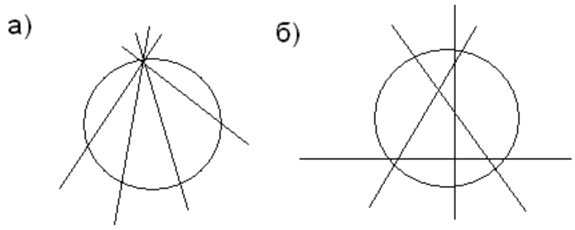


Задатак 1349. Колико најмање, а колико највише правих треба конструисати у равни да би оне раван поделиле на тачно 7 области?

Решење: Најмање три праве које се све међусобно секу, а највише шест паралелних правих.

Задатак 1350. Какав је међусобни положај 4 праве, ако оне дати круг деле на: а) 5; б) 11 различитих делова?

Решење:



Задатак 1351. У соби која има облик коцке треба распоредити 16 столица тако да се поред сваког зида нађе по 5 столица.

Решење: Четири столице треба распоредити у ћошкове собе, а преосталих 12 распоредити тако да се по три столице налазе поред сваког зида.

Задатак 1352. Какав је међусобни положај пет тачака ако оне одређују тачно 9 троуглова?

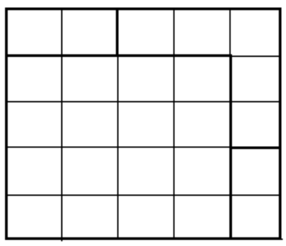
Решење: Три тачке припадају једној правој, а преостале две су ван ње. Те две тачке цине праву којој не припада ни једна друга тачка из задатка.

Задатак 1353. Одредити међусобни положај 6 тачака ако оне одређују тачно 10 различитих троуглова?

Решење: Пет тачака припада једној правој, а шеста је ван ње.

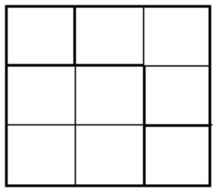
Задатак 1354. На колико најмање делова треба исеци квадрате страница 3 цм и 4 цм, да би се од добијених делова могао саставити нови квадрат?

Решење: На три дела. Погледати слику.



Задатак 1355. На колико најмање делова треба исећи картонски квадрат странице $3cm$ да би се од добијених делова могла саставити три квадрата чије су површине $1cm^2$,$4cm^2$ и $4cm^2$?

Решење: На четири дела. Погледати слику.



101.2 Задаци за домаћи рад

Задатак 1356. Распоредити 5 тачака на 5 правих тако да свака садржи по 2 тачке.

Задатак 1357. Колико највише, а колико најмање правих треба конструисати да би се раван поделила на тачно 11 области?

Задатак 1358. Какав је међусобни положај 4 праве, ако оне дати круг деле на 8 различитих делова?

Задатак 1359. Распоредити 6 тачака на 3 праве тако да свака садржи по 3 тачке.

Задатак 1360. Распоредити 4 тачке на 5 правих тако да свака права садржи по 2 тачке.

Литература

[1] В. Андрић, *Математика IV*, Ваљево 1999.

Предавање 102

Конструкције бројева помоћу цифара и операција

Никола Мркшић, Математичка гимназија

102.1 Задаци за рад

Задатак 1361. Како помоћу цифара $1, 2, 3, 4, 5$ и рачунских операција направити 31, тако да се искористе све цифре?

Решење: $(5 \cdot 4 \cdot 3)/2 + 1 = 31$.

Задатак 1362. Помоћу рачунских операција и цифара 1,2 и 3, у најмањем броју корака, конструисати број 35.

Решење: $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 - 1 = 35$.

Задатак 1363. Помоћу свих цифара: $1, 2, 4, 8, 16$ добити број 58.

Решење: $16 \cdot 4 - (8 - 2) \cdot 1$.

Задатак 1364. Колико плусева и између којих цифара их требамо додати да би од 123456789 добили 99?

Решење: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 67 + 8 + 9$.

Задатак 1365. Користећи само цифру 2 и рачунске операције, конструисати број 58.

Решење: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Задатак 1366. Користећи наизменично цифре 2 и 3, као и рачунске операције и заграде, добити број 516.

Решење: $((2 \cdot 3 - 2) \cdot 3 + 2) * (2 \cdot 3 + 2 \cdot 3) \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 2 = 516$

Задатак 1367. Користећи редом непарне бројеве $1, 3, 5, 7...$, добити на најбржи начин број 144.

Решење: $(1 + 3) \cdot (5 + 7) - 11 + 13 - 15 + 17 = 144$.

Задатак 1368. Користећи све бројеве од $1...n$ добити на најбржи могуци начин број 800000. Колико је то минимално n?

Решење: $((1+9) \cdot (2+8) \cdot (3+7) \cdot (4+6) \cdot 10 \cdot (11-12-13+14)))/5 = 800000$. Дакле, минимално n је једнако 14.

Задатак 1369. На који начин треба испремештати цифре у следећем изразу да би вредност израза била највећа могућа? $96 \cdot 67 \cdot 58$.

Решење: Логично је да ће цифре $9, 8, 7$ да буду цифре десетица. Након тога, уз мало провере добијамо да је оптимално решење $94 \cdot 85 \cdot 76 = 607240$.

Задатак 1370. Који је највећи број који се може добити помоћу рацхунских операција и цифара 0...9, ако се свака искористи тачно једном?

Решење: Одговор је 9876543210. Овај број је већи од свих које можемо добити помоћу рачунских операција управо зато што је додавање цифре на крај броја еквивалентно множењу са 10 и адирању дате цифре. С друге стране, множење датом цифром би допринело резултату мање него множење са 10, јер је свака од ових цифара мања од 10.

102.2 Задаци за домаћи рад

Задатак 1371. Са најмање цифара и рачунских операција, конструисати број 1025.

Задатак 1372. Користећи само заграде и рачунску операцију $-$, и редом бројеве $1...n$, добити на најбржи начин број 55.

Задатак 1373. Где и колико минуса треба додати да би се од броја 1234567890 добио број 542?

Задатак 1374. Који је максимални број који се може добити помоћу цифара $9, 1, 7, 5, 2$ ако сваку од њих морамо употребити тачно једанпут и ако морамо употребити тачно један $\cdot$ и један $+$.

Задатак 1375. Користећи редом парне бројеве и рачунске операције, добити на најбржи могући начин број 1000.

Литература

Предавање 103

Логичко комбинаторни задаци

Миломир Драговић, Математичка гимназија

103.1 Задаци за рад

Задатак 31. Одредити четири узастопна природна броја чији је збир 2010.

Решење: Други од њих је већи од првог за један, трећи за два, четври за три па ако представимо први као x имамо да је $x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 2010$, тј. $x = 501$ па су тражени бројеви 501, 502, 503 и 504.

Задатак 32. Површина коцке једнака је збиру површина три међусобне суседне стране квадра чије су странице једнаке 3 cm, 4 cm и 6 cm. Колика је запремина коцке?

Решење: Површине правоугаоника су $3 \cdot 4 = 12$, $3 \cdot 6 = 18$, $4 \cdot 6 = 24$ па је површина коцке $12 + 18 + 24 = 54$, а једне њене стране $54/6 = 9$. Дакле страница коцке је 3, а запремина $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

Задатак 33. Један отац је дао свом сину 4 јабуке, а други свом сину 3 јабуке. Међутим поклон оба сина износи само 4 јабуке. Како је то могуће?

Решење: Деда је дао свом сину 4 јабуке, а син је дао 3 јабуке свом сину.

Задатак 34. Како се од 5 шибица дужине 32 mm може сложити метар?

Решење: IM.

Задатак 35. На годишњици матуре се окупило 120 људи. Ако се свако са сваким руковао колико је било руковања?

Решење: $(120 \cdot 119)/2 = 7140$.

Задатак 36. Два дечака заједно имају 100 кг. Када би тежи од њих стао на једну страну ваге са ранцем од 5 kg, а лакши на другу страну са ранцем од 15 кг вага би била у равнотежи. Колико дечаци имају килограма?

Решење: Закључујемо да је један дечак тежи од другог за 10 kg па постављањем једноставне једначине $x + x + 10 = 100$ видимо да дечаци имају 45, односно 55 килограма.

Задатак 37. Слободан је претрчао пут од 1,5 km за неколико минута. Колико метара је претрчао Дарко, ако је утрошио два пута више времена него Слободан и ако би сваког минута прешао два пута већи пут него Слободан?

Решење: Пошто је Дарко два пута бржи од Слободана за исто време је претрчао два пута већи пут, значи 3 km, а за два пута веће време још 3 km. Дакле Дарко је укупно претрчао 6 km.

Задатак 38. Имамо 24 l воде у канти и три празне канте од 13 l, 11 l и 5 l. Како поделити течност на три једнака дела?

Решење: Напунити канте од 11 и 5 литара. Тада у великој канти остаје једна трећина укупне воде, односно 8 литара воде. Затим преспемо свих 11 литара у канту од 13 литара и доспемо још 2 литра из канте од 5 литара. Преостала 3 литра преспемо у канту од 11 литара. Из канте од 13 литара напунимо канту од 5 литара после чега ће нам у тој канти остати друга трећина укупне воде. На крају пуну канту од 5 литара преспемо у канту од 11 литара у којој се већ налази 3 литра воде.

Задатак 39. Како проверити тачност производа $234 \cdot 678 = 158652$ без простог множења?

Решење: Преко збира цифара.

Задатак 40. Који број има својство да је његова петина четвртина?

Решење: 5/4.

Задатак 41. Поставимо скакача на на поље $A1$ шаховске табле $8 \cdot 8$ (доње лево поље). Да ли се скакач може кретати по шаховској табли поштујући правила игре тако да стане на свако поље чаховске табле по једном и да на крају заврши на пољу $H8$ (горње десно поље)?

Решење: Приметимо да се после сваког потеза скакач налази на пољу различите боље у односу на бољу претходног поља. Дакле ако се налазио на црном пољу, после скока ће се налазити на белом и обрнуто. На почетку се налази на црном пољу па ће после првог скока налазити на белом, после другог на црном итд. Видимо да ће се скакач после скока чији је редни број непаран налазити на белом пољу.Да би покрио целу таблу потребна су 63 скока што значи да ће завршити на белом пољу. Како је поље $H8$ црно закључујемо да је такво кретање немогуће.

Задатак 42. Марија је планирала да у току наредних дана сваког дана засади по 5 саксија цвећа. Међутим она је сваког дана засадила једну саксију више па јој је остало да у последња 2 дана засади по 3 саксије. Колико је саксија Марија планирала да засади?

Решење: Да је садила цвеће по првобитном плану Марија би последња два дана засадила $2 \cdot 5 = 10$ саксија. Међутим, она је последња два дана засадила $2 \cdot 3 = 6$ саксија. Дакле, она је разлику од 4 саксије цвећа засадила претходних дана. Како је сваког дана садила по једну саксију више то је сађење трајало $4/1 = 4$ дана и још последња два дана. Закључујемо да је укупан број засађених саксија $4 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 30$.

103.2 Задаци за домаћи рад

Задатак 43. На колико начина можете платити рачун од 100 динара ако имате новчанице од 50, 20 и 10 динара?

Задатак 44. Седам правих се секу у једној тачки и граде 14 углова. Ако углове нумеришемо бројевима у смеру казаљке на сату доказати да је $\angle 1 + \angle 3 + \angle 5 + \angle 7 + \angle 9 + \angle 11 + \angle 13 = 180$.

Задатак 45. У кошаркашкој лиги има 8 клубова. Ако свако са сваким игра по две утакмице (код куће и у гостима) колико се утакмица одигра у читавој лиги?

Задатак 46. Зорици је потребно 8 минута да ољушти кромпире за ручак, док је њеној ћерци Јелени потребно 24 минута. Колико ће им требати да заврше рућак ако раде заједно?

Задатак 47. На шаховској табли се на пољима $A1, B2, C3, D4$ (прва четири поља једне дијагонале) налази по један краљ. Треба разрезати таблу на четири дела тако да су сви делови међусобно једнаки и да се на сваком налази по један краљ.

Литература

Предавање 104

Проблемски задаци са једначинама 2

Стефан Бауа, Математичка гимназија

104.1 Теоријски увод

Проблемски задаци са једначинама нам омогућавају да решимо свакодневне проблеме уз помоћ математике.

104.2 Задаци за рад

Задатак 1376. Збир 2 броја је 45, а њихов количник једнак $\frac{7}{8}$. Одредити ове бројеве.

Решење: Нека је x један од ових бројева, поставимо једначине $x : (45 - x) = \frac{7}{8}$, одатле следи $x = 21$ и $y = 24$.

Задатак 1377. Збир два броја је 47. Ако већи поделимо мањим, добија се количник 2, а остатак 5. Који су то бројеви?

Решење: Нека је x већ од два задата броја. Поставимо једначину $\frac{x}{47-x} = 2 + \frac{5}{47-x}$, одатле следи $x = 33$, $y = 14$

Задатак 1378. Отац има 45 година, а син 22. Кроз колико ће година отац бити два пута старији од сина?

Решење: Нека је x тражени број година. Поставимо једначину $45 + x = 2 \cdot (x + 22)$, одатле следи $x = 1$

Задатак 1379. Ћерка је за 18 година млађа од мајке, а пре 5 година била је од мајке 4 пута млађа. Колико је година мајци, а колико ћерци?

Решење: Нека је x број година ћерке, поставимо једначину $(x-5)\cdot 4 = x + 18 - 5$, дакле $x = 11$.

Задатак 1380. Одредити такав цео позитиван број да разлика производа два следећ броја и претходна два буде 600.

Решење: Поставимо једначину $(x + 1) \cdot (x + 2) - (x - 1) \cdot (x - 2) = 600 <=> x = 100$.

Задатак 1381. Аутобус је прешао растојање између места А и Б брзином 90 километара по часу, а од Б до А брзином 60 километара по часу. Одредити средњу брзину аутобуса на целом путу.

Решење: Нека је средња брзина x километара по часу, растојање између А и Б s километара. Тада је $\frac{s}{90} + \frac{s}{60} = (2 \cdot s) : x$ поделимо једначину са s и добијемо $x = 72$ километара по часу.

Задатак 1382. Два планинара, од којих један прелази 5 километара по часу, а други 6 километара по часу крену истовремено један другоме у сусрет из два места удаљена 55км. После колико часова ће се срести.

Решење: Поставимо једначину тако да је $x = 5$ брзина првог, а $y = 6$ брзина другог планинара, тако да вази једначина $x \cdot t + y \cdot t = 55$ где је t тражено време, следи да је $t = 5h$.

Задатак 1383. Базен се пуни кроз две славине за 3 часа. Само једна славина напунила би га за 4 часа. За које време би базен напунила друга славина?

Решење: Нека је x тражено време, можемо да повучемо аналогију са проблемима везаним за пређени пут и поставимо једначину $(\frac{1}{4} + \frac{1}{x}) \cdot 3 = 1$, тражено време је 12 часова.

Задатак 1384. 14 560 динара поделити на 3 лица, тако да свако следеће лице добије 20 посто више од претходног. Колике делове добија свако лице?

Решење: Нека је x сума које добије прво лице. Према условима задатка можемо поставити једначину $x+(x+20\cdot(\frac{x}{100}))+(6\cdot(\frac{x}{5})+6\cdot(\frac{x}{5})\cdot\frac{20}{100}) =$ 14500 следи, лица добијају 4000, 4800 и 5760 динара.

Задатак 1385. Ако се страница једног квадрата повећ за $2cm$, поврсхина се повећа за $16cm^2$. Одредити страницу квадрата.

Решење: Повшина квадрата се рачуна по формули $P = a \cdot a$, где је a дужина странице квадрата. Тако да можемо написати једначину $(a+2)\cdot(a+2) = P+16$, сменом из прве једначине се добија да је тражена дузина странице $3cm$.

104.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 1386. Збир цифара дводифреног броја је 8. Ако цифрама разменимо места, па први број поделимо другим добије се количник 2, а остатак је 10. Који је то број?

Задатак 1387. Два тела крећу се по кружници, чији је обим $728m$, истовремено се из исте тачке у супротном правцу. Једно прелази у свакој секунди 30 метара, друго 22 метра. После колико ће се секунди она срести?

Задатак 1388. Један базен може да се кроз једну славину напуни за 1 час и 20 минута, а кроз другу славину испразнити за 2 часа и 10 минута. За које време би се напунио базен кад би обе славине биле отворене?.

Задатак 1389. За одличан пласман на такмичењу награђена су четири ученика наградом од 36 000 динара. Колико добије сваки ако се награда дели у размери $3 : 4 : 5 : 6$?

Задатак 1390. Површина једног правоугаоника је за $125cm^2$ већа од површине квадрата над мањом страницом. Одредити странице правоугаоника ако се раликују за $5cm$.

Литература

[1] В. Богославов *Збирка решених задатака из математике*, 2008.

[2] С. Огњановић, *Математика* 10+, 2007.

Предавање 105

Венови дијаграми

Александра Димић, Физички факултет

105.1 Теоријски увод

У математици, скуп се може разумети као било која колекција различтих објеката сматраних целином. Иако се ово чини једноставном идејом, скупови су свеједно један од најважнијих фундаменталних концепата у модерној математици. Математичка дисциплина која проучхава могуће скупове, теорија скупова, је садржајно богата и активна.

Дефиниција 148. Под термином скуп сматрамо било коју колекцију M одређених, различитих објеката.

Дефиниција 149. Неки елемент a може припадати датом скупу, што се означава са $a \in A$, или не припадати истом скупу, што се означава са $a \notin A$.

Дефиниција 150. Скуп који нема елемената назива се празан скуп и обележава са $\emptyset$.

Дефиниција 151. Кажемо да је A подскуп скупа B и пишемо $A \subset B$, ако сваки елемент скупа A припада истовремено и скупу B . У истом случају се каже да је B надскуп скупа A.

Дефиниција 152. Два скупа A и B су једнака, ако сваки елемент скупа A припада и скупу B и ако сваки елемент скупа B истовремено припада и скупу A .

Дефиниција 153. Унија скупова A и B, означена са $A \cup B$, је скуп свих елемената који су чланови или скупа A или скупа B.

Дефиниција 154. Пресек скупова A иB, означен са $A \cap B$ је скуп свих елемената који су чланови и скупа A и скупа B. Ако је $A \cap B = \emptyset$, тада за A и B кажемо да су дисјунктни.

Дефиниција 155. Разлика два скупа A и B (пишемо $A \setminus B$, а читамо A разлика B) представља скуп свих елемената који припадају скупу A а не припадају скупу B. Обрнуто $B \setminus A$ (B разлика A) је скуп који садржи само оне елементе који припадају B, а не припадају скупу A.

Дефиниција 156. Симетрична разлика скупова A и B је унија скупова $A \setminus B$ и $B \setminus A$ и означава са $A \Delta B$.

Дефиниција 157. Комплемент скупа A у односу на скуп B (или допуна скупа A до скупа B) где је $A \subset B$ је скуп $CbA = A \setminus B$.

Дефиниција 158. За графичко представљање скупова користе се Венови дијаграми.

105.2 Задаци за рад

Задатак 1391. Дати су скупови:

$$A = \{x | x \; skup \; slova \; imena \; MIRA\},$$

$$B = \{y | y \; skup \; slova \; imena \; TINA\},$$

$$C = \{z | z \; skup \; slova \; imena \; TAMARA\}.$$

Запиши ове скупове набрајањем елемената, а затим их прикажи помоћу Венових дијаграма.

Решење: $A = \{m, i, r, a\}, B = \{t, i, n, a\}, C = \{t, a, m, r\}$. На основу дефиниције 1. У скуп стављамо само различите елементе. Пресеку сва три скупа припада елемент a. Пресеку A иB припада a, B и C припада t и a.

Задатак 1392. Једно одељење 4. разреда има 32 ученика, од којих 18 прима „Забавник”, а 13 је претплаћено на Ђечје новине”. Колико ученика преима оба листа, ако 8 ученика није претплаћено ни на један лист.

Решење: Наравно, најлакше је нацртати дијаграм где имамо одељење као надскуп и скупове A (Ђечје новине”) и B („Забавник”). Нека је x ученика преплаћено на оба листа. Тада је $18 - x + x + 13 - x = 32 - 8$. Одатле је $x = 7$.

Задатак 1393. Од 1050 ученика 870 се бави скијањем, 480 фудбалом, а 65 се не бави ниједним од ова два спорта. Колико ученика се бави и скијањем и фудбалом?

Решење: Попуњавањем дијаграма или решавањем просте једначине $65 + 870 - x + x + 80 - x = 1050$. Одатле следи $x = 355$.

Задатак 1394. У једној основној школи постоје драмска, математичка и спорtска секција. Од 27 ученика у драмској секцији је 14, а 3 ученика су чланови само математичке секције, док 5 ученика учествује у раду све три секције. Колико у свакој секцији има ученика, ако само у спорtској и драмској секцији ради 6 ученика и сви ученици су обухваћени радом секција, а при томе се само спортом и само глумом не бави ниједан од ученика.

Решење: Драмска 14, спорт 17, математичка 26.

Задатак 1395. У једном одељењу сваки ученик је члан фудбалског тима или дебатног клуба. 10 ученика учествује у раду дебатног клуба, 31 ученик само игра фудбал и 12 учествује у раду обе секције. Колико ученика има у одељењу?

Решење: 51 ученик.

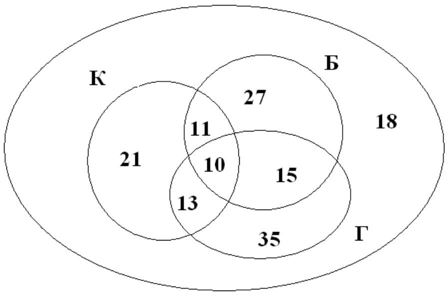
Задатак 1396. На једном такмичењу освојено је укупно 46 медаља. Од тога је 35 сребрних и бронзаних и 27 златних и сребрних медаља. Колико је којих медаља освојено?

Решење: 11 златних, 16 сребрних и 19 бронзаних. Решава се системом једначина јер понекад задатак може да превари. Делује као Венов дијаграм, али није.

Задатак 1397. Попунити Венов дијаграм на основу следећег текста. 150 полазника музичке школе питали смо да ли знају да свирају клавир, бубњеве или гитару. Добили смо следеће одговоре:

18 људи не свира ниједан од ових инструмената;
10 људи уме да свира сва три инструмента;
77 људи може да свира гитару или бубњеве али не може да свира клавир;
73 људи свира гитару;
49 људи свира бар два од ових инструмената;
13 људи може да свира клавир и гитару, али не може бубњеве;
21 музичар свира клавир и бубњеве.

Решење: Погледати слику:



Задатак 1398. Тренер фудбалског тима послао је свог помоћника да купи пљескавице играчима након напорног тренинга. Од 44 играча, 28 је као прилог желело кечап, 20 сенф, 14 мајонез, 10 кечап и сенф, 11 кечап и мајонез, 8 сенф и мајонез и 6 је желело сва три прилога. Колико је играча као прилог желело:

а. Само кечап?
б. Сенф али не мајонез?
ц. Мајонез али не сенф?
д. Мајонез и сенф али не кечап?
е. Ниједан од прилога?

Решење: Одговори су редом :13, 18, 12, 11, 5.

Задатак 1399. На једном курсу страних језика сваки слушалац учи бар један од три страна језика(енглески, француски и немачки) и то : 18 слушалаца учи француски, 22 учи енглески, 15 слушалаца учи немачки, 6 слушалаца учи енглески и француски, 11 слушалаца енглески и немачки, 1 слушалац учи сва три језика.Колико има слушалаца на том курсу и колико од њих учи само два језика?

Решење: Најбоље је употребити Венов дијаграм са три скупа(њега попуњавамо тако што попунимо пресек сва три скупа, па пресеке по два скупа, и на крају, елементе који припадају само по једном скупу). Прво уписемо 1 у пресеку сва три скупа. Затим пресек Французи и Енглези, али ту не пишемо 6, већ $6-1=5$, онда пресек Енглези и Немци $11-1=10$. Даље је остало $18-5-1=12$ који уче само француски, $22-10-5-1=6$ који уче енглески и на крају $15-10-1=4$ који уче немачки. Број слушаоца је $12+5+6+1+10+4=38$, а број оних који уче само два језика је $10+5=15$.

Задатак 1400. У истраживању о најпопуларнијим цртаћима извелли смо анкету и резултати су следећи:

39 деце воли ”Малу сирену”;

43 деце воли ”101 далматинца”;
56 деце воли ”Мики Мауса”;
7 деце воли и ”Малу сирену”и ”101 далматинца”;
10 деце воли ”Малу сирену”и ”Мики Мауса”;
16 деце воли ”101 далматинца”и ”Мики Мауса”;
4 деце воли сва три цртаћа;
6 деце не воли ниједан од понуђених цртаћа.;

Одговори на следећа питања:

Колико је било деце која су одговарала на анкету?
Колико деце воли само ”Малу сирену”?
Колико деце воли само ”101 далматинца”?
Колико деце воли само ”Мики Мауса”?

Решење: Одговори на питања су редом: 115, 36, 24, 34.

105.3 Задаци за домаћи рад

Задатак 1401. У једној установи има 35 службеника, од којих 20 говори страни језик, а 11 зна технику Ђслепог”куцања, док 10 не зна ни једно ни друго. Колико службеника влада обема вештинама?

Задатак 1402. У једном преводилачком бироу ради 10 преводилаца који говоре француски, шпански и енглески. Сваки језик зна тачно 5 преводилаца, а само један језик говоре по 2 преводиоца. Колико преводилаца говори по два језика?

Задатак 1403. У једном одељење од 30 ученика одговарало је : 19 ученика математику, 17 ученика физику, 11 ученика историју, 12 ученика математику и физику, 7 ученика историју и математику, 5 ученика физику и историју и 2 ученика сва три предмета. Колико је ученика одговарало само један предмет?

Задатак 1404. Три брата имају заједно 30 кликера. Аца каже: ”Бане и ја имамо 6 заједничких кликера, док Цане и ја имамо 5 заједничких кликера”. Бане каже: ”Ја имам 5 својих сопствених кликера, а са Цанетом имам 7 заједничких”. Цане каже: ”Ја сам најстарији и имам највише својих кликера, а само са Ацом имам 1 заједнички, док имам својих сопствених дупло више од њега”. Одредити колико кликера је заједничко за сва три брата. И колико то највише кликера у свом поседу има Цане?

Задатак 1405. У насељу је 8 нових улица-a, b, c, d, e, f, g, h. Електричну струју има 6 улица, канализацију 4 улице, а водовод 6 улица. Прве три улице a, b, c имају само по једну од комуналних потреба. Колико улица имају све три комуналне потребе?

Литература

[1] Војислав Андрић, *Математика Ш-Приручник за припемање за такмичење ученика основних школа од IV до VIII разреда*, Круг, Београд 2006

[2] Часопис "Математички лист", Друштво математичара Србије, Београд 1967-2009.

[3] *Link: http://www.mathocean.com/2009/07/venn-diagram-word-problems.html*