KOMBINOVANI ZADACI ZA PRIPREMU ZA OLIMPIJADU

Лаудановић Младен

1. Označimo sa A sumu kvadrata stranica, a sa D sumu kvadrata dijagonala datog šestougla. Dokazati da je $5A \geq D$.

2. Pravilni osmougao je podeljen na paralelograme. Dokazati da medju tim paralelogramima postoje bar dva pravougaonika.

3. Naći figuru maksimalne površine, ako joj je dijametar jednak 1.

4. Dato je n tačaka u ravni tako da svake tri od njih čine tupougli trougao. Da li možemo dodati još jednu tačku tako da ponovo svake tri tačke čine tupougli trougao?

5. U konveksnom mnogouglu su povučene sve dijagonale. Svaka strana i svaka dijagonala su obojene jednom od k boja tako da ne postoji jednobojna zatvorena kontura. Koji je najveći mogući broj temena mnogougla?

6. U ravni je dato $2n$ tačaka tako da nikoje tri ne pripadaju jednoj pravoj. Od tih tačaka n je obojeno plavom bojom a drugih n crvenom. Dokazati da postoji n duži čiji su krajevi različite boje takvih da se nikoje dve od tih duži ne seku.

7. Data je tačka M sa koordinatama $M(1994p, 7\cdot 1994p)$ gde je p prost broj. Naći broj pravouglih trouglova, takvih da je prav ugao u tački M, ostala dva temena celobrojna a centar upisanog kruga u koordinatnom početku.

8. Dokazati da ne postoji bijekcija f skupa $\mathbb{N}$ u $\mathbb{N} \cup \{0\}$ sa osobinom $f(mn) = f(m) + f(n) + 3f(m)f(n)$ za $m, n \in \mathbb{N}$.

9. Naći sve funkcije $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ gde je $f(1) > 0$ sa osobonom $f(m^2 + n^2) = f(m)^2 + f(n)^2$ za $m, n \in \mathbb{N}_0$.

10. Dokazati da ne postoji funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da za neke realne brojeve a i b, za koje je $|a - b| > 2$ važi $f(f(x)) = x^2 - (a + b - 1)x + ab$ za svako $x \in \mathbb{R}$.

11. Neka je $R[x]$ oznaka za skup svih polinoma sa realnim koeficijentima . Kazaćemo da je polinom $f(x)$ manji od polinoma $g(x)$ ako polinom $g(x) - f(x)$ ima pozitivan najstariji koeficijent (drugim rečima $g(x)$ u beskonačnosti ima strogo veće vrednosti nego $f(x)$) i to ćemo onda označavati sa $f(x) \prec g(x)$. Dokazati da ne postoji bijektivno preslikavanje $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ takvo da važi $f(x) \prec g(x) \Rightarrow F(f(x)) < F(g(x))$.

12. Neka je $\mathbb{Q}^+$ skup pozitivnih racionalnih brojeva. Neka je $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ preslikavanje takvo da važi $f(x) + f(\frac{1}{x}) = 1$ i $f(2x) = 2f(f(x))$ za svako $x \in \mathbb{Q}$. Naći eksplicitno $f(x)$.

13. Neka je $\mathbb{Q}^+$ skup pozitivnih racionalnih brojeva. Neka je $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ preslikavanje takvo da važi $f(x + 1) = f(x) + 1$ i $f(x^3) = f(x)^3$. Dokazati da je $f(x) = x$.

14. Naći sve funkcije $f : [1, +\infty) \to [1, +\infty)$ takvih da za svako $x \in [1, +\infty)$ važi $f(x) \leq 2x + 2$ i $f(x + 1) = \dfrac{1}{x}(f(x)^2 - 1)$.

15. Neka funkcija f definisana nad prirodnim bojevima zadovoljava relacije: $f(1) = 1, f(2) = 2, f(n + 2) = f(n + 2 - f(n + 1)) + f(n + 1 - f(n))$ za $n \geq 1$. Dokazati:

1° $0 \leq f(n + 1) - f(n) \leq 1$

2° Ako je $f(n)$ neparno, tada $f(n + 1) = f(n) + 1$

3° Naći sve vrednosti n za koje je $f(n) = 2^{10} + 1$.

16. Neka je $\mathbb{Q}^+$ skup pozitivnih racionalnih brojeva. Navesti primer funkcije

$f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ takve da važi

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}, \qquad \text{za svako } x, y \in \mathbb{Q}^+.$$

17. Neka je S skup svih realnih brojeva većih od -1. Naći sve funkcije $f : S \to S$ za koje važi :

1° $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ za svako $x, y \in S$

2° $\dfrac{f(x)}{x}$ je strogo rastuća funkcija na intervalu $-1 < x < 0$ i $0 < x$.

18. Dokazati da niz definisan sa $a_1 = 1$ i

$$a_{2^k+j} = -a_j \qquad \text{za } 1 \le j \le 2^k \quad \text{i} \quad k = 0, 1, 2 \cdots .$$

19. Neka je $a > 1$ prirodan broj i neka je d delilac broja $a^2 + 1$. Ako je $d \ge a$ onda je $d \ge a + \sqrt{a}$. Dokazati.

20. Ako pravougaonik može da se razbije na male pravougaonike kojima je bar jedna stranica celobrojna onda je i kod početnog pravougaonika bar jedna stranica celobrojna.

21. Dokazati da za bilo koji raspored brojeva od 1 do $n^2 + 1$ možemo izdvojiti podniz od $n + 1$ članova koji je rastući ili opadajući.

22. Brojevi $1, 2, \cdots, 3n$ su podeljeni u tri grupe po n brojeva u svakoj. Dokazati da iz svake grupe možemo izabrati po jedan broj tako da je zbir neka dva jednak trećem.

23. U n vrsta pravougaone matrice $m \times n$, pri $m > n$, su smeštene zvezdice tako da u svakoj koloni postoji bar jedna zvezdica. Dokazati da postoji takva zvezdica da u njenoj vrsti ima više zvezdica nego u njenoj koloni.

24. U ravni je dato $n \ge 2$ pravih takve da nikoje tri ne prolaze kroz istu tačku i nikoje dve nisu paralelne. Dokazati da je mogućeu svakom delu ravni (na koje prave dele ravan) upisati ceo broj različit od 0 i po apsolutnoj vrednosti manji od $n + 1$ tako da je sa svake strane svake od ovih pravih zbir upisanih brojeva jednak nuli.

25. U vrtu barona Minhauzena rastu jelke i breze. Baron je utvrdio da na rastojanju od 1km od svake jelke raste tačno 10 breza i da jelki ima više od breza. Da li baron po običaju laže?

26. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ a p i q pozitivni brojevi za koje važi $p + q = 1$.Dokazati da važi $(1 - p^n)^m + (1 - q^m)^n \ge 1$.

27. Fudbalska lopta je sašivena od poligonalnih površi i sa svilenim koncima tri različite boje takoda važi:

a) svaka ivica poligonalne površi je spojena sa ivicom iste dužine neke druge poligonalne površi i spojene su koncem iste boje.

b) iz svakog temena lopte polaze tačno po tri ivice i konci na tim ivicama su različitih boja.

Dokazati da se u temenima lopte mogu postaviti kompleksni brojevi različiti od 1 takvi da je proizvod brojeva postavljenih u temena svake poligonalne površi jednak 1.

28. Na okruglom stolu se nalazi n prekidača na ivici stola postavljenih u obliku pravilnog n-tougla i jedna sijalica u sredini stola. Sto može da se okreće a sijalica je upaljena samo ako su svi prekidači istovremeno uključeni. Na početku se nezna koji je prekidač uključen a koji isključen.

Dvojica igraju sledeću igru: prvi igrač se okrene ledjima stolu, a drugi igrač zavrti sto. Kada se sto zaustavi onda se prvi igrač okrene i istovremeno pritisne neke prekidače (ne uzbudjujte se oko broja njegovih prstiju), pa se ponovo okrene ledjima stolu itd. Naći sve n za koje postoji algoritam po kom se može upaliti sijalica posle konačnog broja koraka bez obzira na početnu situaciju.

29. Na stolu se nalazi $\dfrac{n(n+1)}{2}$ kuglica postavljenih u nekoliko gomila. Sa svake gomile se uzima po jedna kuglica i od njih se pravi nova gomila. Ovaj proces se ponavlja više puta. Dokazati da će se posle konačno mnogo koraka na stolu naći n gomila sa po $1, 2, \cdots, n$ kuglica.

30. Zemljište ima oblik oblik kvadrata dimenzija $10m \times 10m$ i ono je podeljeno na 100 kvadratnih parcela dimenzija $1m \times 1m$. Na početku se u 9 parcela nalazio korov. Ako je neka parcela okružena sa bar dve strane korovom onda ona posle nekog vremena postaje korov. Da li će posle nekog vremena celo zemljište postati korov?

31. Date su dve prave koje se seku pod oštrim uglom φ. Buva koja se ne nalazi u preseku te dve prave skače sa jedne prave na drugu pri čemu je dužina svakog skoka 1. Dokazati da je buvin put periodičan ako i samo ako je ugao φ racionalan u stepenima.

32. Rešiti sistem od n jednačina $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)(x_k + x_{k+1} + \cdots + x_n) = 1$ za $k = 1, 2, \cdots, n$.

33. U ravni su data su dva jedinična kruga ℓ_1 i ℓ_2 čiji su centri na rastojanju $\dfrac{2}{\cos \pi/n}$. Oko njih je opisan proizvoljni krug k_1 koji dodiruje oba kruga. Unutar kruga k_1 upisan je krug k_2 koji dodiruje krugove ℓ_1, ℓ_2 i k_1. Zatim opet unutar k_1 je upisan k_3 koji dodiruje krugove ℓ_1, ℓ_2 i k_2 itd. Dokazati da krug k_n i pored toga što dodiruje krugove ℓ_1, ℓ_2 i k_{n-1} takodje dodiruje krug k_1.

34. Pozitivni brojevi zadovoljavaju sistem $x^2 + xy + y^2/3 = 25$, $y^2/3 + z^2 = 9$ i $x^2 + xz + z^2 = 16$. Naći $xy + 2yz + 3zx$.

35. U nekim celobrojnim tačkama ispod prave $y = 1$ nalaze se pioni. Dozvoljen je potez "preskakanja i jedenja" na sledeći način: pion može da napravi potez samo ako može da preskoči susednog piona (postoje četiri susedna polja) i stane na slobodno polje, pri tome se još preskočeni pion jede. Dokazati da povlačenjem ovih poteza nemožemo nikada doći na pravu $y = 5$.

36. Matematičko takmičenje ima 16 učesnika. Svaki zadatak ima 4 moguća odgovora i učesnik mora da izabere bar jedan odgovor. Posle takmičenja ustanovljeno je da svaki par ima najviše jedan isti odgovor. Koliki je najveći mogući broj zadataka?

37. Rešiti sistem jednačina $x^2+y^2+z^2-2x-6y-10z = 134$, $3x-4y+12z = 100$.

38. Iz kvadrata dimenzija $3n+1 \times 3n+1$ izvadjen je jedan kvadratić. Dokazati da se ostatak može popločati figurama oblika

39. Da li postoji zatvorena izlomljena linija $A_1A_2 \cdots A_{2n}$ takva da su vektori $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_3A_4}, \cdots, \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}}$ istog smera?

40. Dat je sistem jednačina $2^{1+\sqrt{xy}}+3^{x+y-1} = a$, $8^{1+\sqrt{xy}}+2^{x+y-1} = a^3-3a^2+3a$ za $a \in \mathbb{R}$. Dokazati da sistem ima rešenje ako i samo ako je $3 \le a \le 1 + 2\sqrt{2}$.

41. Od tačke $p(x, y)$ dozvoljen je jedan od sledeća četiri koraka-korak do tačke $(x, y+2x)$ ili $(x, y-2x)$ ili $(x+2y, y)$ ili $(x-2y, y)$, ali pod uslovom da ako je učinjen

korak od tačke Q do tačke R onda sledeći korak nemože biti od R do Q.Dokazati da ako jednom iz $P(1, \sqrt{2})$, onda se nikad nemožemo ponovo vratiti u nju.

42. Poligon je upisan u celobrojnu rešetku i nema samopreseke. Dokazati da je površina tog poligona jednaka $u + q/2 - 1$, gde su u i q brojevi celobrojnih tačaka unutar i na granici poligona.

43. Dat je konačan sistem krugova u ravni takvih da su proizvoljna dva od njih disjunktna ili se spolja dodiruju, a i svaki od njih se dodiruje sa najviše šest od ostalih. Pretpostavimo da smo u svaki krug koji se ne dodiruje sa šest od ostalih krugova upisali realan broj. Dokazati da možemo na najviše jedan način upisati realne brojeve u ostale krugove, tako da za svaki krug od njih važi da je broj upisan u njega jednak aritmetičkoj sredini brojeva upisanih u šest krugova koji se dodiruju sa njim.

44. Kružnica obima $6k$ podeljena je sa $3k$ tačaka na $3k$ lukova dužina $1, 2, 3$ po k od svake vrste, na proizvoljan način. Dokazati da medju ovim tačkama postoji bar jedan par dijametralno suprotnih.

45. Dokazati da postoji podskup A skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ za koji važi : za svaki beskonačan skup prostih brojeva, postoje dva prirodna broja $m \in A$ i $n \notin A$ takva da su oba proizvod k različitih elemenata skupa S za neki broj $k \geq 2$.

46. Dvanaest patuljaka živi u šumi. Svaki od njih nosi dvostranu kabanicu, čija je jedna strana plava, a druga crvena. Neki patuljci stalno nose kabanicu u crvenoj boji a neki u plavoj. Patuljci su najzad doneli novogodišnju rezoluciju : "n-tog dana nove godine $n(\text{mod } 12)$-ti patuljak će posetiti sve svoje prijatelje. Ako više od polovine njegovih prijatelja nosi kabanicu suprotne boje od njegove, on će promeniti boju kabanice, inače nastavlja po starom." Ako su prijateljstva uzajamna i stalna, dokazati da pre ili kasnije neće biti više nikakvih promena.

47. Da li postoji permutacija brojeva $1, 2, \cdots, 1992$ tako da aritmetička sredina bilo koja dva od njih nije jednaka nijednom broju koji stoji izmedju njih u toj permutaciji.

48. Koliko ima permutacija $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ brojeva $1, 2, \cdots, n$ takvih da za svako $k \in \{2, 3, \cdots, n\}$ važi da medju brojevima $a_1, a_2, \cdots, a_{k-1}$ postoji bar jedan koji se od broja a_k razlikuje bar za 1.

49. Neka je $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{a_n}$ za $n \geq 1$. Dokazati da je $\sqrt{n} \leq a_n \leq \sqrt{n} + 1$.

50. Neka je $x_1 = 1$ i $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{n} + \dfrac{n}{x_n}$ za $n \geq 1$. Dokazati da je $[x_n^2] = n$ za $n > 3$.

51. Šta je veće e^π ili π^e?

52. Naći sve prirodne brojeve n za koje važi $\min\limits_{k \geq 1}(k^2 + \left[\dfrac{n}{k^2}\right]) = 1991$.

53. Ako za niz x_n važi $|x_n - x_m| \leq \dfrac{|n-m|}{m+n}$ da li onda mora x_n da konvergira?

54. Naći sve realne brojeve x, y, z za koje je $4xyz - x^4 - y^4 - z^4 = 1$.

55. Ako je funkcija $f(x) = 1 + a\cos x + b\sin x + c\cos 2x + d\sin 2x$, gde su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pozitivna za sve realne x, onda je $f(x) < 3$ za svako $x \in \mathbb{R}$. Dokazati.

56. Neka je k prirodan broj veći od 1. Neka je $f(n) = \left[\sqrt[k]{n + \sqrt[k]{n}}\right] + n$, za svaki prirodan broj n. Dokazati da kada n prolazi skupom prirodnih brojeva, tada $f(n)$ prolazi skupom prirodnih brojeva bez potpunih k-tih stepena.

57. Neka je niz a_n definisan formulom $n! = n^{na_n}$ za $n \geq 2$. Dokazati da je a_n monoton.

58. Rešiti u prirodnim brojevima jednačinu $x^y - y^x = x + y$.

59. Neka su $x_1, x_2, \cdots, x_k$ prirodni brojevi. Definišimo rekurzivno sledeću funkciju: $h(a,b) = a^b$, $h(x_k, x_{k-1}, \cdots, x_1) = x_k^{h(x_{k-1},\cdots,x_1)}$. Uočimo n prirodnih brojeva $3 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Za permutaciju s definišimo: $p(s) = h(a_{s(n)}, a_{s(k-1)}, \cdots, a_{s(1)})$. Za koju permutaciju s funkcija $p(s)$ ima minimum a za koju maksimum? Naći prirodne brojeve $a, b, c, d \geq 2$ takve da je $h(178, 9) \leq h(a, b, c, d) \leq h(198, 9)$.

60. Dokazati da za sve prirodne brojeve važi nejednakost

$$\left(\frac{1+(n+1)^{n+1}}{1+(n+1)}\right)^{n-1} > \left(\frac{1+n^n}{1+n}\right)^n.$$

61. Neka su $a_1, a_2, \cdots, a_n$ pozitivni realni brojevi. Označimo $s = \sum_{k=1}^n a_k$ i $s' = \sum_{k=1}^n a_k^{1-\frac{1}{k}}$. Neka je još dat realan broj $\lambda > 1$. Da li važe nejednakosti $s' < \lambda s + \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$ i $\sqrt{s'} < \sqrt{s} + 1$.

62. Neka su $x_1, x_2, \cdots, x_n$ pozitivni realni brojevi za koje važi $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$. Ako je $[\sum_{i=1}^n x_i] = m$ onda je $\sum_{i=1}^m x_i \geq 1$. Dokazati.

63. Dokazati da za n proizvoljnih pozitivnih realnih brojeva $(n > 1)$ važi nejednakost

$$(x_2+x_3\cdots+x_n)^{x_1}+\cdots+(x_1+\cdots+x_{i-1}+x_{i+1}+\cdots+x_n)^{x_i}+\cdots+(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})^{x_n} > n-1.$$

64. Neka su $x_1, x_2, \cdots, x_n$ pozitivni realni brojevi iz intervala $[a, b]$, $0 < a < b$. Dokazati nejednakost

$$n^2 \leq (x_1 \cdots + x_n)(\frac{1}{x_1} + \cdots \frac{1}{x_n}) \leq n^2 \frac{(a+b)^2}{4ab}.$$

65. Dokazati da za pozitivne realne brojeve a, b, c, d važi nejednakost

$$\sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}} \leq \sqrt[2]{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}.$$

66. Dokazati da za svaka dva trougla sa uglovima α, β, γ i $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ važi nejednakost $\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta} + \frac{\cos\gamma_1}{\sin\gamma} \leq \mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta + \mathrm{ctg}\,\gamma$. Kada važi jednakost?

67. Ako su x, y, z nenegativni realni brojevi za koje važi $x + y + z = 1$ dokazati nejednakost $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \dfrac{7}{27}$.

68. Dokazati da za realne $a, b, c \in [0, 1]$ brojeve važi nejednakost

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2.$$

69. Naći minimum izraza $x^2 + y^2 + z^2 + v^2 + xy + zv$ ako su x, y, z, v realni brojevi takvi da je $xv - yz = 1$.

70. Neka je $(a_1, a_2 \cdots, a_n)$ permutacija brojeva $1, 2, \cdots, n$. Dokazati da važi

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n-1}{n} \leq \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

71. Dokazati da za realne brojeve $a, b, c \geq 0$ važi nejednakost

$$\frac{1}{2}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{1}{3}(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}).$$

72. Neka su $x_1, x_2, \cdots, x_n$ realni brojevi za koje važi $x_1^2+x_2^2+\cdots x_n^2=1$. Dat je prirodan broj k. Dokazati da postoje celi brojevi $e_1, e_2 \cdots, e_n$ za koje važi $|e_1| < k$ za $i = 1, 2, \cdots, n$ i

$$|e_1x_1+\cdots e_nx_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}.$$

73. Dokazati da za svaku trojku realnih brojeva x, y, z za koju je $x^2+y^2+z^2=2$ važi nejednakost $x+y+z \leq 2+xyz$.

74. Dokazati da za sve realne brojeve $a_1, a_2, \cdots, a_r$ važi nejednakost

$$\sum_{m=1}^{r}\left(\sum_{n=1}^{r}\frac{a_m a_n}{m+n}\right) \geq 0.$$

75. Dati su prirodni brojevi $n, T \geq 2$. Naći sve prirodne brojeve a za koje važi

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{ka+\frac{a^2}{4}}{s_k} < T^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$$

gde su $a_1, a_2, \cdots, a_n$ prirodni brojevi i $s_k = a_1+\cdots+a_k$.

76. Neka je $a = \dfrac{m^{m+1}+n^{n+1}}{m^m+n^n}$ gde su m i n prirodni brojevi. Dokazati da važi $a^m+a^n \geq m^m+n^n$. *Pomoć*: proceniti $\frac{a^N-N^N}{a-N}$.

77. Dokazati da za realne brojeve $a, b, c \geq 0$ važi nejednakost

$$2\sqrt{ab+bc+ca} \leq \sqrt{3}\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

78. Neka je P_n polinom n-tog stepena za koji važi $P_n(x) = 2^x$ za $x = 1, 2, \cdots, n+1$. Izračunati $P(n+2)$.

79. Polinom $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ je deljiv polinomom $Q(x) = x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m$. Ako je $|b_k| > \binom{m}{k}1991^k$ za neko $k \in \{1, 2\cdots, m\}$, tada je $|a_j| > 1990$ za neko $j \in \{1, 2\cdots, n\}$.

80. Dokazati da za svaku kompleksnu nulu z_0 polinoma $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ važi $|z_0| \leq \max\{1, |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|\}$.

81. Neka su p i q kompleksni brojevi i $q \neq 0$. Ako su koreni jednačine $x^2+px+q = 0$ jednaki po modulu, dokazati da je $\frac{p}{q}$ realan broj.

82. Neka je $P(x) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ polinom sa kompleksnim koeficijentima. Dokazati da postoji $z \in \mathbb{C}$ takav da je $|z| = 1$ i $|f(x)| \geq 1$.

83. Neka je $a \neq 0$ ceo broj a n prirodan broj. Dokazati da je polinom $P(x) = x^n + ax^{n-1} + \cdots + ax - 1$ nerastavljiv nad $\mathbb{Z}[x]$.

84. Pretpostavimo da su koeficijenti jednačine $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ realni i zadovoljavaju uslov $0 < a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq 1$. Neka je z_0 kompleksni koren ove jednačine za koga važi $|z| \geq 1$. Dokazati da je $z^{n+1} = 1$.

85. Za kvadratni trinom $f(x) = ax^2 + bx + c$ važi da su svi koeficijenti pozitivni i $a + b + c = 1$. Dokazati da za proizvoljne pozitivne brojeve $x_1, x_2, \cdots, x_n$ za koje važi $x_1x_2\cdots x_n = 1$ važi nejednakost $f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) \geq 1$.

86. Dokazati da je P polinom sa celobrojnim vrednostima u celobrojnim tačkama ako i samo ako je oblika

$$P(x) = a_0 + a_1\binom{x}{1} + a_2\binom{x}{2} + \cdots + a_k\binom{x}{k}$$

za neke cele brojeve $a_1, \cdots, a_k$ i neki prirodan broj k.

87. Dokazati da za svaki polinom $f(z) = c_0z^n + \cdots + c_{n-1}z + c_n$, sa $c_i \in \mathbb{C}$, postoji $z_0 \in \mathbb{C}$ takvo da $|z_0| \leq 1$ i $f(z_0) \geq |c_0| + |c_1|$.

88. Zadati su celi brojevi $x_0, x_1, \cdots, x_n$. Dokazati da medju vrednostima polinoma $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ u tačkama $x_0, x_1, \cdots, x_n$ postoji takva da je po apsolutnoj vrednosti veća od $\dfrac{n!}{2^n}$.

89. Neka je P polinom sa slobodnim koeficijentom $a_0 \neq 0$ i osobinom $P(x)P(2x^2) \equiv P(2x^3 + x)$. Dokazati da P nema realne korene.

90. Dat je polinom stepena ≥ 1 sa realnim koeficijentima. Dokazati da za svako $c > 0$ postoji prirodan broj n_0 koji zadovoljava sledeći uslov: Za svaki polinom P stepena $\geq n_0$ sa realnim koeficijentima i sa vodećim koeficijentom 1, broj celih brojeva brojeva k takvih da je $|f(P(k))| \leq c$ ne prelazi stepen polinoma P.

91. Neka je $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ i $a_{n+1} = \dfrac{1 + a_na_{n-1}}{a_{n-2}}$ za $n > 2$. Dokazati da je a_n prirodan broj.

92. Niz a_n celih brojeva definisan je sa $a_1 = 2$, $a_2 = 7$ i $-\dfrac{1}{2} < a_{n+1} - \dfrac{a_n^2}{a_{n-1}} \leq \dfrac{1}{2}$ za $n \geq 2$. Dokazati da je a_n neparan broj za $n > 1$.

93. Rešiti sistem kongruencija $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{y}$, $y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{x}$ gde su $x, y \in \mathbb{N}$.

94. Neka je $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ i $x_{n+1} = x_{n-1} + x_{n-2}$ za $n \geq 3$. Dokazati da ako je p prost tada je $x_p \equiv 0 \pmod{p}$.

95. Dokazati da za svaki prirodan broj n postoje prirodni brojevi a, b, c takvi da $n^2 < a, b, c < n^2 + n + 3\sqrt{n}$ i a deli bc.

96. Dokazati da za prost broj p oblika $4k + 1$ važi

$$[\sqrt{p}] + \left[\sqrt{2p}\right] + \left[\sqrt{3p}\right] + \cdots + \left[\sqrt{\frac{p-1}{4}p}\right] = \frac{p^2 - 1}{12}.$$

97. Skupovi $S_\alpha = \{[\alpha], [2\alpha], [3\alpha], \cdots\}$ i $S_\beta = \{[\beta], [2\beta], [3\beta], \cdots\}$ formiraju disjunktu particiju skupa $\mathbb{N}$ ako i samo ako su α, β iracionalni brojevi za koje važi

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$$

98. Naći zbir svih prirodnih brojeva čije cifre obrazuju rastući ili opadajući niz.

99. Neka su $p > q$ uzajamno prosti prirodni brojevi. Naći sve realne brojeve c i d takve da skupovi $A = \{\left[n\dfrac{p}{q}\right] : n \in \mathbb{N}\}$ i $B = \{[cn + d] : n \in \mathbb{N}\}$ čine disjunktnu particiju skupa $\mathbb{N}$.

100. Naći sve funkcije f definisane u ravni $\mathbb{Z}^2$ sa realnim vrednostima takve da je $f(\overrightarrow{v}) = 1$ za sva četiri jedinična vektora i $f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{v})$ uvek kad su $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ uzajamno normalni ($\overrightarrow{0}$ je normalan na svaki vektor).