

Razni zadaci

1. Dokazati da u trouglu važi nejednakost (a, b, c su stranice, a S površina trougla):

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$$

2. Za Fibonačijeve brojeve ($F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$) važe jednakosti: $F_{n-1}F_{n+1} = F_n^2 + (-1)^n$ i $F_{m+n+1} = F_mF_n + F_{m+1}F_{n+1}$.

3. Ako je $ab = cd$, dokazati da je $a^n + b^n + c^n + d^n$ složen.

4. Dokazati da se pri rasporedjivanju 6 tačaka u pravougaonik dimenzije 4×3 moraju naći dve tačke na rastojanju manjem ili jednakom od $\sqrt{5}$.

5. Koliko najviše podskupova od $\{1, 2, \dots, n\}$ može da sadrži familija Φ , ako nijedan od njih nije podskup nekog drugog iz Φ ?

6. Dokazati da broj $2^{2^{2003}} - 1$ ima bar 2003 različita prosta faktora.

7. Dat je trougao ABC u kome je $\angle A > 45^\circ$ i $\angle B > 45^\circ$. Izvan trougla su konstruisani jednakokrako pravougli trouglovi DCB i ECA , sa pravim uglovima u temenu C . Tačka P se nalazi unutar trougla ABC i pri tome je $\triangle ABR$ jednakokrako pravougli sa pravim uglom u temenu P . Dokazati da je trougao DEP jednakokrako pravougli.

8. Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao, takav da se dijagonale AC i BD seku pod pravim uglom i neka je E njihov presek. Dokazati da su tačke simetrične tački E u odnosu na AB, BC, CD, DA konciklične.

9. U konačnom nizu, suma svakih 7 uzastopnih brojeva je negativna, a suma svakih 11 uzastopnih brojeva je pozitivna. Odrediti najveći broj članova niza.

10. Na tabli je dato $n \geq 12$ uzastopnih brojeva. Igrači A i B naizmenično brišu po jedan broj sa table, sve dok ne ostanu dva broja x i y . A pobeđuje ako je $nzd(x, y) = 1$, a B u suprotnom. Ko ima pobedničku strategiju?

11. Rešiti jednačinu u racionalnim brojevima

$$x^3 + 3y^3 + 9z^3 - 9xyz = 0$$

12. Neka je $n \geq 2$ prirodan broj sa deliocima $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$. Dokazati da je $d_1d_2 + d_2d_3 + \dots + d_{k-1}d_k$ uvek manji od n^2 i odrediti kada on deli n^2 .

13. Dat je niz brojeva (a_n) , definisan na sledeći način:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_n = \frac{2n-3}{2n}a_{n-1}$$

Dokazati da je $\sum_{k=1}^n a_k < 1$ za svako $n \geq 2$.

14. U spoljašnjosti trougla ABC konstruisani su kvadrati $ABB'B'', ACC'C'', BCXY$. Neka je P centar kvadrata $BCXY$. Dokazati da se CB'', BC'', AP seku u jednoj tački.

15. Neka je $ABCDEF$ pravilan šestougao sa centrom O . Tačke M i N su središta CD i DE , a L je presek pravih AM i BN . Dokazati da je površina trougla ALB jednaka površini četvorougla $DMLN$ i $\angle OLD = 90^\circ$ i $\angle ALO = \angle OLN = 60^\circ$.