Matematička gimnazija, Beograd
Dodatna nastava za prvi razred, šk. 2005/06.

RAZNI ZADACI - revizija prvog polugodišta

1. Dokazati da za svaki prirodan broj n postoji n-tocifreni prirodan broj deljiv sa 5^n čije su sve cifre neparne.

2. (Interno 2005) Neka je sa a_n označen najveći neparan delilac broja n i neka je $b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Dokazati nejednakost $b_n \geq \frac{n^2+2}{3}$, i odrediti kada važi jednakost.

3. (Interno 2005) Ako je $abc \geq ab + bc + ca$, dokazati da je $abc \geq 3(a+b+c)$.

4. Ako važi $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n$, dokazati nejednakost

$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geq x_n + 2n.$$

5. Neka je suma nekih pozitvnih brojeva jednaka sumi njihovih kvadrata. Šta je veće suma njihovih trećih ili njihovih četvrtih stepena?

6. (Savezno 2005, 1 raz) Ako je suma brojeva a, b, c jednaka 1, dokazati nejednakost $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca$.

7. Dokazati da je broj $2^{2^{6k+2}} + 3$ deljiv sa 19, za svaki prirodan broj k.

8. Sa koliko sa nula može završavati broj

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n \ (n \in \mathbf{N})?$$

9. Naći sve proste brojeve p takve da je $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ potpun kvadrat celog broja.

10. Odrediti sve parove prirodnih brojeva mi n koji zadovoljavaju jednakost $[m,n] - (m,n) = \frac{mn}{3}$.

11. Neka su p i q prosti brojevi takvi da je p^2+1 deljivo sa q, a q^2-1 deljivo sa p. Dokazati da je broj $p+q+1$ složen.

12. Neka je E središte stranice CD kvadrata $ABCD$. Neka je M tačka unutar kvadrata takva da je $\angle MAB = \angle MBC = \angle BME = x$. Naći ugao x.

13. (IMO 2001, 1 zad) U oštrouglom trouglu ABC sa centrom opisanog kruga u tački O i visinom AP, važi $\angle C \geq \angle B + 30^o$. Dokazati da je $\angle A + \angle COP < 90^o$.

14. (Savezno 1996, 1 raz) Dokazati da se dijagonale AD, BE, CF tetivnog šestougla $ABCDEF$ seku u jednoj tački ako i samo ako je $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot FA$.

15. Neka je $ABCD$ romb, čiji je presek dijagonala tačka O. Tačka P je data u unutrašnjosti romba, ali ne na njegovim dijagonalama. Neka su tačke M, N, Q, R projekcije tačke P na stranice AB, BC, CD, DA, tim redom. Neka se simetrale stranica MN i RQ seku se u tački S, a simetrale stranica NQ i MR u tački T. Dokazati da su tačke P, S, T, O temena pravougaonika.

16. Neka je $d(n)$ broj pozitivnih delilaca broja n i $e(n) = \left[\frac{2000}{n}\right]$ za sve prirodne brojeve n. Dokazati da je:

$$d(1) + d(2) + \ldots + d(2000) = e(1) + e(2) + \ldots + e(2000).$$

17. Na takmičenju učestvuje 5 takmičara. Koliko je mogućih različitih rasporeda na kraju tog takmičenja (moguće je i da neki takmičari imaju isti broj bodova) ?

18. Iz pravougaonika se može izrezati 360 figura oblika 2×2. Dokazati da se iz njega može izrezati 200 figura oblika 1×7.

19. Na kružnici su u proizvoljnom poretku zapisani brojevi od 1 do 100. Za svaka tri uzastopna broja na kružnici izračunava se njihova suma. Dokazati da među svim tim sumama postoje bar dve koje se razlikuju za ne više od 3 i dve koje se razlikuju za ne manje od 3.

radmarko@yahoo.com
januar 2006.