Припреме за балканијаду из математике
Иван Матић

1. Дато је 9 тачака у простору, од којих никоје четири не припадају једној равни. Наћи најмањи природан број n, тако да за свако бојење у плаво и бело n дужи повучених између ових 9 тачака, постоји увек троугао који има све ивице исте боје.

2. Нека је A скуп од n тачака у простору. Из фамилије свих сегмената са крајевима у A, q сегмената је изабрано и офарбано у жуто. Претпоставимо да сви жути сегменти имају различите дужине. Доказати да постоји полигонална линија састављена од m жутих сегмената, поређаних у растући поредак по дужини, тако да важи $m \geq \frac{2q}{n}$.

3. Градове $P_1, P_2, \ldots, P_{1983}$ повезује десет авиокомпанија $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$. Постоји директна веза између било која два града (без преседања) и све везе су двосмерне. Доказати да најмање једна авиокомпанија може да понуди кружно путовање са непарним бројем слетања.

4. Нека је n позитиван цео број и $\sigma(n)$ збир свих природних делилаца d броја n (укључујући 1 и n). Кажемо да је број $m \geq 1$ "добар" ако $\forall k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$:
$$\frac{\sigma(m)}{m} > \frac{\sigma(k)}{k}.$$
Доказати да постоји бесконачно много добрих бројева.

5. За скуп E тачака у равни, кажемо да је "питагорејски", ако за сваку поделу скупа E на два подскупа A и B, најмање један од скупова садржи правоугли троугао. Одредити који је од следећих скупова питагорејски.
   (а) Круг.
   (б) Једнакостраничан троугао (то је скуп од 3 темена и дужи које их спајају).

6. Нека је a природан број и $\{a_n\}$ низ дефинисан са $a_0 = 0$ и
$$a_{n+1} = (a_n + 1)a + (a+1)a_n + 2\sqrt{a(a+1)a_n(a_n+1)}, \qquad (n = 1, 2 \ldots).$$
Доказати да за сваки природан број n, a_n је природан број.

7. Доказати или оповргнути: из интервала $[1, \ldots, 30000]$ је могуће изабрати 1000 целих бројева тако да никоја три нису узастопни чланови аритметичке прогресије.

8. Нека су $P_1, P_2, \ldots, P_n$ различите тачке равни $n \geq 2$. Доказати да је:

$$\max{}_{1 \leq i < j \leq n} P_i P_j > \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{n} - 1) \cdot \min{}_{1 \leq i < j \leq n} P_i P_j.$$

9. Нека је K једна од две пресечне тачке кругова W_1 и W_2. O_1 и O_2 су центри од W_1 и W_2. Две заједничке тангенте додирују W_1 и W_2 у P_1 и P_2, први, и Q_1 и Q_2 други од кругова, редом. Нека су M_1 и M_2 средишта дужи P_1Q_1 и P_2Q_2, редом. Доказати да је $\angle O_1KO_2 = \angle M_1KM_2$.

10. Нека је d сума дужина свих дијагонала полигона са n $(n > 3)$ темена, и нека је p његов обим. Доказати да је

$$\frac{n-3}{2} < \frac{d}{p} < \frac{1}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right] - 2\right).$$

11. Дати су реални бројеви a_i, b_i, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, такви да је

$$\begin{array}{l} a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n > 0, \\ b_1 \geq a_1, \\ b_1 b_2 \geq a_1 a_2, \\ \cdots \\ b_1 b_2 \cdots b_n \geq a_1 a_2 \cdots a_n. \end{array}$$

Доказати да је $b_1 + b_2 + \cdots b_n \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.