Matematička gimnazija, Beograd
Dodatna nastava za prvi razred, šk. 2005/06.

PRIPREMA ZA TAKMIČENJA

1. Dokazati da ne postoje funkcije $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, takve da je za svaka dva realna broja x i y

$$x^2 + xy + y^2 = f(x) + g(y).$$

2. Košarkaš Peđa Stojaković šutira slobodna bacanja i vodi statistiku $s(n)$ - broj pogodaka iz prvih n bacanja. Dok je bio član Sakramenta $s(n)$ je bio manji od 80 procenata od n, a po prelasku u Indijanu $s(n)$ se popepo iznad 80 procenata od n. Da li postoji trenutak kada je $s(n)$ bio jednak 80 procenata od n?

3. Neka su k i k' dve koncentrične kružnice sa centrom u O i odgovarajućim poluprečnicima $R < R'$. Prava kroz O seče krugove k i k' u tačkama A i B redom, tako da je O između tačaka A i B. Poluprava sa početkom u O, različita od prethodne prave, seče krugove k i k' u tačkama E i F, redom. Dokazati da se opisani krugovi oko trouglova OEA i OBF, i krugovi nad prečnikom AB i EF, seku u jednoj tački.

4. Naći minimalnu vrednost funkcije $f(x) = |1001 + 1000x + 999x^2 + \ldots + 2x^{999} + x^{1000}|$.

5. Sabrati $\dfrac{1}{a^2+a} + \dfrac{1}{a^2+3a+2} + \dfrac{1}{a^2+5a+6} + \dfrac{1}{a^2+7a+12} + \ldots + \dfrac{1}{a^2+199a+9900}$.

6. Dat je trougao čije su stranice a, b, c i odgovatajuće visine h_a, h_b, h_c. Ako je $a > b > c$, onda je $a + h_a \geq b + h_b \geq c + h_c$. Dokazati.

7. Koji se najmanji pozitivan broj može dobiti stavljanjem znakova $-$ i $+$ između brojeva $1, 2, 3, \ldots, 1989$?

8. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ brojevi iz skupa $\{-1, 1\}$ takvi da je $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$. Dokazati da je prirodan broj n deljiv sa 4.

9. Neka je $n > 1$ prirodan broj. Broj n je *magičan* ako važi: za svaka dva broja x i y koji nisu uzajamno prosti sa n, broj $x + y$ nije uzajamno prost sa n. Odrediti sve *magične* brojeve.

10. Dokazati da se među stranicama proizvoljnog n-tougla mogu naći dve takve da je količnik njihovih dužina ne manji od 1 i manji od 2.

11. Dokazati da za svaki konveksan n-tougao povšine S i obima p, postoji krug poluprečnika $\dfrac{S}{p}$ koji je ceo sadržan u njemu.

12. Da li je u polja tablice 9×9 moguće upisati brojeve od 1 do 81, tako da je svaki od brojeva upisan po jednom i da razlika brojeva u svaka dva susedna polja bude manja od 5?

13. Tetiva CD kružnice sa centrom u O normalna je na prečniku AB, a tetiva AE deli na pola poluprečnik OC. Dokazati da tetiva DE deli na pola tetivu BC.

14. Tačke A_2, B_2, C_2 su središta visina AA_1, BB_1, CC_1, redom, oštrougli trouglovi ABC. Naći $\angle B_2A_1C_2 + \angle C_2B_1A_2 + \angle A_2C_1B_2$.

15. U svako polje kvadratne tablice 2005×2005, treba da se upiše jedan od brojeva 1 ili -1, tako da proizvod brojeva u bilo kom redu i u bilo kojoj kolone te tablice bude 1. Na koliko načina to možemo učiniti.

16. Odrediti sve proste brojeve p takve da je broj $\dfrac{2^{p-1}-1}{p}$ potpun kvadrat.

17. Dat je skup brojeva $\{1, 2, \ldots, 2004\}$. Koliko najmanje brojeva treba odstraniti iz ovog skupa, tako da se od preostalih brojeva u skupu može naći jedan koji je jednak proizvodu neka druga dva od preostalih brojeva.

18. Šifra na sefu je trocifreni broj u čijem zapisu učestvuju cifre od 1 do 8. Pošto je mehanizam na sefu pokvaren, dovoljno je da na bilo koja 2 od 3 mesta postavimo pravu cifru i brava će se otvoriti. Koji je minimalan broj kombinacija koje treba isprobati da bi smo garantovano otvorili sef?

19. Sa prirodnim brojem a sprovodimo sledeću operaciju: poslednju cifru dekatnog zapisa broja a množimo sa 4 i to saberemo sa brojem koji se dobija brisanjem poslednje broja a (npr. tako od broja 2005 dobijamo $4 \cdot 5 + 200 = 220$). Ovaj postupak nastavljamo i sa svakim novodobijenim brojem, beskonačno puta. Ako smo u nekom koraku dobili broj 2015, dokazati da se u tom nizu brojeva (i pre i posle njegovog pojavljivanja) ne pojavljuje ni jedan prost broj.

20. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realni brojevi čiji je zbir 0. Ukoliko je m najmanji, a M najveći od njih, dokazati da je $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq -nmM$.

© Marko Radovanović
radmarko@yahoo.com
februar 2006.