**Лагерь по неравенствам после 7 класса. 7-27 августа 2004 г.**

*если не оговорено противное, требуется доказать неравенство*

8. а) $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$ $(a,\ b,\ c\in\mathbb{R})$. б) $a^2+b^2+c^2 \le 2(ab+bc+ca)$ ($a,\ b,\ c$ — стороны треугольника).

9. Даны числа $a_1<a_2<\ldots<a_n$ и $b_1<b_2<\ldots<b_n$. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $a_1b_1'+a_2b_2'+\ldots+a_nb_n'$, где $b_1',\ b_2',\ldots,b_n'$ — некоторя перестановка чисел $b_1,\ b_2,\ldots,b_n$.

10. Если числа $a_1,\ a_2,\ldots,a_n$ одного знака и все $a_i>-1$, то $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)>1+a_1+a_2+\ldots+a_n$.

11. $\min\frac{a_i}{b_i}\le\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}\le\max\frac{a_i}{b_i}$ $(a_i,\ b_i>0)$ **12.** $28^7>80^5$. **13.** $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}$ $(a,\ b>0)$

14. $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)$ $(a,\ b,\ c>0)$. **15.** $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\ge 6abc$ $(a,\ b,\ c>0)$

16. $6abc\le ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\le 2(a^3+b^3+c^3)$ $(a,\ b,\ c>0)$

17. Дано $a+b\ge 1$. а) $a^4+b^4\ge 1/8$; б) $a^8+b^8\ge 1/128$. **18.** $xy+yz+zx\le 2xyz+1$ $(x,\ y,\ z>1)$.

19. $a_1/a_2+a_2/a_3+\ldots+a_{n-1}/a_n+a_n/a_1\ge n$ $(a_i>0)$.

20. $\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\le|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$. **21.** $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge 6$ $(a,\ b,\ c>0)$. **22.** $\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}+\frac{a}{b+c}\ge 3/2$ $(a,\ b,\ c>0)$.

23. Числа $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ удовлетворяют условию $|x_i|\le 1$. Найдите максимум выражения
$x_1+x_2+x_3+x_4-x_1x_2-x_1x_3-x_1x_4-x_2x_3-x_2x_4-x_3x_4++x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4-x_1x_2x_3x_4$.

24. $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2$. **25.** $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}<3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}$ ($n+1$ двойка, $n$ троек, $n>1$). **26.** $4^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{4}}}}}<3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}$ ($n$ четверок, $n+1$ тройка, $n\ge 1$).

27. $abc=1$, $a^3>36$ $(a,\ b,\ c>0)$. Докажите, что $\frac{2}{3}a^2<a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$.

28. $\frac{1}{2\sqrt{n}}\le\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\le\frac{1}{\sqrt{2n}}$.

29. а) $1<\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{c+d+a}<2$ $(a,\ b,\ c,\ d>0)$.
б) Число 1 в левой части неравенства нельзя заменить на большее, а 2 в правой части — на меньшее. Докажите.

30. $3(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)-2xyz(x+y+z)\le 3$ $(x,\ y,\ z\in[0,1])$. **31.** $x^2+y^2+z^2\ge x\sqrt{y^2+z^2}+y\sqrt{x^2+z^2}$ $(x,\ y,\ z>0)$

32. При каких натуральных $n$ выполнено неравенство $3^n>4n^2+5n+6$?

33. $\frac{1}{\sqrt[4]{a}}+\frac{1}{\sqrt[4]{b}}\ge\frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{a+b}}$ $(a,\ b>0)$ **34.** $(1+x_1)(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n)\ge(1+\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n})^n$ $(x_i>0)$

35. Треугольник со сторонами $a,\ b,\ c$ тупоугольный ($c$ — сторона напротив тупого угла). Докажите, что $c^n>a^n+b^n$ при натуральном $n\ge 2$.

36. (*неравенство Шура*) $x^3+y^3+z^3+3xyz\ge xy(x+y)+yz(z+y)+xz(x+z)$ $(x,\ y,\ z>0)$.

37. $(\frac{1+bn}{n+1})^{n+1}\ge b^n$ $(b>0,\ n\in\mathbb{N})$.

38. а) $(1+\frac{1}{n})^n<(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}$. б) $(1+\frac{1}{n})^{n+1}>(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}$.

39. Даны числа $x_i>0$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,n)$, $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$. а) $\frac{(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}{x_1x_2\ldots x_n}\ge(n-1)^n$. б) $\frac{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)}{x_1x_2\ldots x_n}\ge(n+1)^n$.

40. $n^{n/2}\le n!<(\frac{n+1}{2})^n$, $n\ge 2$. **41.** $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n}}$. **42.** $1000^{1000}>1001^{999}$

43. $\sum\limits_{1\le i<j\le n}\sqrt{a_ia_j}\le\frac{n-1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ $(a_i>0)$.

44. Докажите, что любая функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ может быть представлена в виде $f=f_1+f_2$, где функция $f_1$ четная, а $f_2$ — нечетная.

45. Функции $f:\Delta_1\to\Delta_2$ и $g:\Delta_2\to\Delta_3$ монотонны ($\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3$ — промежутки). Докажите, что $g(f):\Delta_1\to\Delta_3$ — также монотонная функция и выснитe характер монотонности в зависимости от характера монотонности функций $f$ и $g$.

46. $a,\ b>0,\ k\in\mathbb{N}$. а) $(a+b)^k\le 2^k(a^k+b^k)$. b) $(a+b)^k\le 2^{k-1}(a^k+b^k)$

47. $a_1a_2^2a_3^3a_4^4\le(\frac{a_1+2a_2+3a_3+4a_4}{10})^{10}(a_i>0)$ **48.** $\sum_{i=1}^{n}\frac{S}{S-a_i}\ge\frac{n^2}{n-1}$ $(a_i>0,\ S=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)$.

$a,\ b,\ c\in\mathbb{N}$. **49.** $a^ab^bc^c\ge(\frac{a+b+c}{3})^{a+b+c}$. **50.** $(\frac{a+b+c}{3})^{a+b+c}\ge\frac{(b+c)^a(c+a)^b(a+b)^c}{2^{a+b+c}}$. **51.** $a^ab^bc^c\le(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c})^{a+b+c}$

52. $\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}\ge\frac{a+b+c}{3}$ $(a,\ b,\ c>0)$.

$m,\ n\in\mathbb{N}$. **53.** $\sqrt[m+n]{m^mn^n}\le\frac{m^2+n^2}{m+n}$. **54.** $\sqrt[m+n]{m^nn^m}\le\frac{m+n}{2}$.

55. $\frac{x^n}{1+x+x^2+\ldots+x^{2n}}\le\frac{1}{2n+1}$ $(x>0,\ n\in\mathbb{N})$. **56.** $mx^n+\frac{n}{x^m}\ge m+n$ $(x>0,\ m,\ n\in\mathbb{N})$.

57. $\sum\limits_{1\le i<j\le n}\frac{a_ia_j}{a_i+a_j}\le\frac{n-1}{4}$ $(a_i>0,\sum a_i=1)$. **58.** $(1-x)^3(1+3x)\le 1$ $(x\in\mathbb{R})$.

59. Приведите пример непостоянной периодической функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, не имеющей наименьшего (положительного) периода.

60. а) $\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\ge 1$ $(a,\ b,\ c>0)$ б) $\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\ge\frac{2}{3}$ $(a,\ b,\ c,\ d>0)$.

61. $(1-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^2+a\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\ge\frac{a}{n+a}$ $(x_i\in\mathbb{R},\ a>0)$. **62.** $2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}\ge 2\cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$ $(x>0)$

63. $\sqrt{\frac{a_1+a_2}{a_3}}+\sqrt{\frac{a_2+a_3}{a_4}}+\ldots+\sqrt{\frac{a_{n-1}+a_n}{a_1}}+\sqrt{\frac{a_n+a_1}{a_2}}\ge n\sqrt{2}$ $(a_i>0)$.

64. Неотрицательные числа $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ таковы, что $x_1+x_2+\ldots+x_k\ge 2k$ для всех $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Докажите, что $nx_1^2+(n-1)x_2^2+\ldots+x_n^2\ge 2n(n+1)$.

65. $(n/3)^n\le n!\le(n/2)^n$ $(n\ge 6)$. **66.** Найдите $\max_{x\ge 0}(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2$. **67.** Найдите $\max_{0\le x\le 1}x(1-x)^{2004}$.

68. $\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ac}{a^5+c^5+ac}\le 1$ $(a,\ b,\ c>0,\ abc=1)$.

69. Даны положительные числа $a_1<a_2<\ldots<a_n$ и $b_1<b_2<\ldots<b_n$. Докажите, что
$(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)\le(a_1+b_1')(a_2+b_2')\ldots(a_n+b_n')\le(a_1+b_n)(a_2+b_{n-1})\ldots(a_n+b_1)$, где $b_1',\ b_2',\ldots,b_n'$ — некоторая перестановка чисел $b_1,\ b_2,\ldots,b_n$.

70. $\sqrt{(a+b)(c+d)}+\sqrt{(a+c)(b+d)}+\sqrt{(a+d)(b+c)}\ge 6\sqrt[4]{abcd}$ $(a,\ b,\ c,\ d>0)$. **71.** $\frac{(m+2n-1)!}{m!}\le(m+n)^{2n-1}$ $(m,\ n\in\mathbb{N})$.

72. $(a+\frac{1}{a})^2+(b+\frac{1}{b})^2\ge\frac{25}{2}$ $(a,\ b>0,\ a+b=1)$ . **73.** $2\sqrt{2(a+b)\sqrt{ab}}\le(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ $(a,\ b>0)$.

74. $\frac{x_1^2}{2}+\frac{x_2^4}{4}+\ldots+\frac{x_n^{2^n}}{2^n}+\frac{1}{2^n}\ge x_1x_2\ldots x_n$ $(x_i>0)$. **75.** а) $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{k^2+2k})<2$ б) $\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{2}{k^2+3k})<3$.

76. (*Неравенство Юнга*). $\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\ge ab$ $(p,\ q>0;\ p,\ q\in\mathbb{Q};\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$

77. $a^n-b^n\ge n(a-b)(\sqrt{ab})^{n-1}$ $(a>b>0)$

78. $a,\ b,\ c$ — длины сторон треугольника, причем: а)$a,\ b,\ c\in\mathbb{N}$; б)$a,\ b,\ c\in\mathbb{Q}$. Тогда $(1+\frac{b-c}{a})^a(1+\frac{c-a}{b})^b(1+\frac{a-b}{c})^c\le 1$.

79. $px^{q-r}+qx^{r-p}+rx^{p-q}\ge p+q+r$ $(x,\ p,\ q,\ r>0)$, а) $p,\ q,\ r\in\mathbb{N}$; б)$p,\ q,\ r\in\mathbb{Q}$.

80. $S=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n-1}$. Известно, что $S>a_i>0$ $(i=1,\ 2,\ldots,n)$. Тогда $\prod\limits_{i=1}^{n}a_i\ge(n-1)^n\prod\limits_{i=1}^{n}(S-a_i)$.

81. $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{2-a_i}\ge\frac{n}{2n-1}$ $(a_i>0,\ \sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1)$. **82.** $\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{a_i}{a_{i+1}})^{n-1}\ge\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_{i+1}}{a_i}$ $(a_i>0,a_{n+1}=a_1)$.

83. $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2$ $(n\in\mathbb{N})$.

84. $\sqrt{x_1^2+(1-x_2)^2}+\sqrt{x_2^2+(1-x_3)^2}+\ldots+\sqrt{x_{n-1}^2+(1-x_n)^2}+\sqrt{x_n^2+(1-x_1)^2}\geq\frac{n}{\sqrt{2}}$ $(x_i\in[0,1])$.

85. Найдите $\min_{x,y,z>0,\,x+y+z=2004}\sqrt{x^2+3}+\sqrt{y^2+5}+\sqrt{z^2+7}$.

86. Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ задана рекуррентно: $x_1\in[0,1]$, $x_{k+1}=x_k-x_k^2$ при $k\geq 1$. Докажите, что $\sum\limits_{i=1}^{k}x_i^2<1$.

87. $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}<3/4$ . **88.** $2(\sqrt{n+1}-1)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\leq 2\sqrt{n}$. **89.** $\frac{2}{3}n\sqrt{n}\leq\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}\leq\frac{2}{3}(n+1)\sqrt{n+1}$.

90. $x_1^{k+1}+x_2^{k+1}+\ldots+x_n^{k+1}\geq x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k$ $(x_i>0,\ x_1x_2\ldots x_n=1,\ k\in\mathbb{N})$. **91.** $1\leq\sin x+\cos x\leq\sqrt{2}$ $(x\in[0,\pi/2])$.

92. (*неравенство Коши-Буняковского-Шварца*) $(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n)^2\geq(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2$ $(a_i,\,b_i\in\mathbb{R})$.

93. (*неравенство Морделла*) $(\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\ldots+\frac{x_n}{y_n})(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)\geq(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2$ $(x_i,\,y_i>0)$.

94. $(\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{y_n})(y_1+y_2+\ldots+y_n)\geq(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2$ $(x_i,\,y_i>0)$.

95. $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-b_i)^2}\leq\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}$ $(a_i,\,b_i\in\mathbb{R})$ **96.** $\left|\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}-\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}\right|\leq\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$ $(a_i,\,b_i\in\mathbb{R})$.

97. $\sqrt{a_1^2+b_1^2+\ldots+z_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2+\ldots+z_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2+\ldots+z_n^2}\geq\sqrt{(a_1+\ldots+a_n)^2+(b_1+\ldots+b_n)^2+\ldots+(z_1+\ldots+z_n)^2}$.

98. $(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{n-1}^2)(a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2)\geq(a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{n-1}a_n)^2$ $(a_i\in\mathbb{R})$.

99. $|a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}|\leq 1$ $(a,\,b\in[0,1])$.

100. Докажите, что из любых шести вещественных чисел найдутся два, $x$ и $y$, такие, что $0\leq\frac{x-y}{1+xy}\leq 1/\sqrt{3}$.

101. $(\sum a_i^3)(\sum b_i^3)(\sum c_i^3)\geq(\sum a_ib_ic_i)^3$ $(a_i,\,b_i,\,c_i>0))$.

102. $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+d}+\frac{d}{a+b}\geq 2.$ $(a,\,b,\,c,\,d>0)$. **103.** $\frac{x_1}{x_2+x_n}+\frac{x_2}{x_1+x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}+x_n}+\frac{x_n}{x_1+x_{n-1}}\geq 2$ $(x_i>0, n\geq 4)$

104. $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}$ $(a,\,b,\,c>0)$

105. $\frac{a_1}{p-2a_1}+\frac{a_2}{p-2a_2}+\ldots+\frac{a_n}{p-2a_n}\geq\frac{n}{n-2}$, где $a_i$ — стороны, $p$ — периметр $n$-угольника. **106.** Выразите $\sin 3x$ через $\sin x$.

107. $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2+mM\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2\leq(m+M)\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$ $(0<m\leq a_i/b_i\leq M)$

108. $x_1+x_2+\ldots+x_n-x_1x_2-x_2x_3-\ldots-x_{n-1}x_n-x_nx_1\leq[n/2]$ $(x_i\in[0,1])$ **109.** $\sum\limits_{1\leq i\leq j\leq n}|a_i-a_j|\leq\frac{n^2}{4}$ $(a_i\in[0,1])$.

110. (*неравенство Чебышева*) $n(a_1b_1+\ldots+a_nb_n)\geq(a_1+a_2+\ldots+a_n)(b_1+b_2+\ldots+b_n)\geq n(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1)$ $(\{a_i\}_{i=1}^n,\,\{b_i\}_{i=1}^n$ — одинаково упорядоченные наборы.)

111. $\sin x_1+\sin x_2+\ldots+\sin x_n\geq n\sin\frac{\sum x_i}{n}$ $(x_i\in[0,\pi])$ а) $n=2$. б)$n\in\mathbb{N}$. **112.** $\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}\leq\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$ $(a>0)$

Пусть $\Delta$ — промежуток. Будем называть функцию $f:\Delta\to\mathbb{R}$ *почти выпуклой* (вниз), если $\forall x,\,y\in\Delta: f(\frac{x+y}{2})\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}$

113. а) Докажите, что выпуклая функция почти выпукла.
б) Если функция $f:\Delta\to\mathbb{R}$ выпукла, то $\forall\alpha\in[0,1]\forall x,\,y\in\Delta:\ f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$
в) *Неравенство Йенсена* Если функция $f$ почти выпукла, то для любых неотрицательных рациональных $\alpha_1,\,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ таких, что $\sum\alpha_i=1$ и любых $x_i\in\Delta$ выполнено неравенство $f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n)\leq\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\ldots+\alpha_nf(x_n)$.
г) Если функция $f$ выпукла, то неравенство пункта в) верно без предположения рациональности чисел $\alpha_i$.

114. Если $\forall\alpha\in[0,1]\forall x,\,y\in\Delta:\ f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$, то функция $f:\Delta\to\mathbb{R}$ выпукла (вниз).

115. Докажите, что следующие функции почти выпуклы: а) $x^n$ $(n\in\mathbb{N})$ вниз на $\mathbb{R}_+$; б) $x^{-n}$ $(n\in\mathbb{N})$ вниз на $\mathbb{R}_+$; в) $\sqrt[n]{x}$ $(n\in\mathbb{N})$ вверх на $\mathbb{R}_+$; г) $e^x$ вниз на $\mathbb{R}$; д) $\ln x$ вверх на $\mathbb{R}_+$; е) $\sin x$ вверх на $[0,\pi]$; ж) $\cos x$ вверх на $[-\pi/2,\pi/2]$

Далее разрешается пользоваться тем, что функция $x^p$ выпукла на $\mathbb{R}_+$ вверх для $p\in(0,1)$ и вниз для $p>1$ или $p<0$.

116. Назовем *средним степенным порядка* $\alpha\in\mathbb{R}$ положительных чисел $x_1,\,x_2,\ldots,x_n$ величину $S_\alpha(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(\frac{x_1^\alpha+x_2^\alpha+\ldots+x_n^\alpha}{n})^{1/\alpha}$ для $\alpha\neq 0$ и $S_0(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$ для $\alpha=0$. Докажите, что если $\alpha\leq\beta$, то $S_\alpha(x_1,\,x_2,\ldots,x_n)\leq S_\beta(x_1,\,x_2,\ldots,x_n)$ для а)$\alpha=0$, $\beta\in\mathbb{N}$; б)$\alpha$ или $\beta$ равно 0; в)в произвольном случае.

117. $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}\leq\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n$ $(x_i>0,\ \alpha_i\geq 0,\ \sum\alpha_i=1)$. а) $\alpha_i\in\mathbb{Q}$; б) $\alpha_i\in\mathbb{R}$.

118. (*неравенство Гельдера*) $(a_1^p+a_2^p+\ldots+a_n^p)^{1/p}(b_1^q+b_2^q+\ldots+b_n^q)^{1/q}\geq a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$ $(a_i,b_i,p,q>0;\ 1/p+1/q=1)$. а)$p,\,q\in\mathbb{Q}$; б)$p,\,q\in\mathbb{R}$.

119. В треугольнике с углами $\alpha,\,\beta,\,\gamma$: а) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leq 3\sqrt{3}/2$; б) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq 3/2$; в) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma>1$.

120. Из всех $n$-угольников, вписанных а данную окружность, наибольший периметр имеет правильный. Докажите.

121. Докажите, что функции $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{ctg}x$ выпуклы вниз на $(0,\pi/2)$.

122. а) $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{b+a}\geq 3/2$ $(a,\,b,\,c>0,\ abc=1)$; б) $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(b+a)}\geq 3/2$ $(a,\,b,\,c>0,\ abc=1)$.

123. $a^3b+b^3c+c^3a\geq abc(a+b+c)$ $(a,\,b,\,c>0)$. **124.** $2(x^3+y^3+z^3)-(x^2y+y^2z+z^2x)\leq 3$ $(x,\,y,\,z\in[0,1])$.

125. $(1+\frac{a_1^2}{a_2})(1+\frac{a_2^2}{a_3})\ldots(1+\frac{a_n^2}{a_1})\geq(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)$ $(a_i>0)$.

126. $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$, $x_i\geq 0$, $n\geq 3$. Найдите максимум а)$x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n$; б) $x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n+x_nx_1$.

127. $f$ — многочлен с неотрицательными коэффициентами. Тогда $(f(xy))^2\leq f(x^2)f(y^2)$ $(x,\,y\in\mathbb{R}))$.

128. $a,\,b,\,c\in(0,1]$. а) $\frac{a}{1+b+c}+\frac{b}{1+a+c}+\frac{c}{1+a+b}\leq 1$; б) $\frac{a}{b+c+a^2}+\frac{b}{a+c+b^2}+\frac{c}{b+a+c^2}\geq 1$; в) $\frac{a}{1+b+c}+\frac{b}{1+a+c}+\frac{c}{1+a+b}+(1-a)(1-b)(1-c)\leq 1$

129. $\sqrt{n-1}(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\ldots+\sqrt{x_n})\leq\sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+\ldots+\sqrt{1-x_n}$ $(x_i\geq 0,\ \sum x_i=1)$

130. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geq\frac{64}{a+b+c+d}$ $(a,\,b,\,c,\,d>0)$. **131.** $\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geq\frac{1}{2}$ $(a_i\geq 0,\ \sum a_i=1)$

132. $\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geq\sqrt{a^2+ac+c^2}$ $(a,\,b,\,c>0)$

133. $\sqrt{a}(a+c-b)+\sqrt{b}(a+b-c)+\sqrt{c}(b+c-a)\leq\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}$ $(a,\,b,\,c$ — стороны треугольника).

134. $a,\,b,\,c$ — стороны треугольника. а) $\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{a+c-b}+\frac{c}{b+a-c}\geq 3$; б) $a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$.

135. $\sqrt{a(1-b)(1-c)}+\sqrt{b(1-c)(1-a)}+\sqrt{c(1-a)(1-b)}\leq 1+\sqrt{abc}$ $(a,\,b,\,c\in[0,1])$.

136. Дана последовательность $0<a_0<a_1<a_2<\ldots<a_{26}$, причем $a_n=2\sqrt{a_{n-1}^2-a_{n-1}^4}$ при $0<n\leq 26$. Докажите, что $a_0<10^{-7}$.

137. В треугольнике $\frac{\pi}{3}\leq\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}\leq\frac{\pi}{2}$.

138. $a_1=2$, $a_n=a_1a_2\ldots a_{n-1}+1$ $(n\geq 2)$. Докажите, что $1/a_1+1/a_2+\ldots+1/a_n<1$.

139. $\sqrt{(a+b)(c+d)}+\sqrt{(a+c)(b+d)}+\sqrt{(a+d)(c+b)}\geq\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}+\sqrt{cd}$ $(a,\,b,\,c,\,d>0)$.

140. $C_n^2\sum\limits_{1\leq i<j\leq n}\frac{1}{a_ia_j}\geq 4(\sum\limits_{1\leq i<j\leq n}\frac{1}{a_i+a_j})^2$ $(a_i>0)$

141. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f_k}{2^k} < 2$ ($f_i$ — числа Фибоначчи: $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$). **142.** $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{f_k f_{k+2}} < 1$ ($f_k$ — числа Фибоначчи).
143. $\frac{a_2^2}{a_1} + \frac{a_3^2}{a_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \geq 4(a_n - a_1)$ $(a_i > 0)$ **144.** $\sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdot \ldots \cdot \sin x_{100} + \cos x_1 \cdot \cos x_2 \cdot \ldots \cdot \cos x_{100} \leq 1$ $(x_i \in \mathbb{R})$.
145. $(1 + \frac{1}{\sin\alpha})(1 + \frac{1}{\cos\alpha}) \geq 3 + 2\sqrt{2}$ $(0 < \alpha < \pi/2)$. **146.** $\frac{1}{1+\sqrt{x_1}} + \ldots + \frac{1}{1+\sqrt{x_n}} \geq \frac{n}{1+\sqrt{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}}}$ $(x_i > 0)$.
147. $25(ab+cd)^2 \geq 16(a^2+d^2)(b^2+c^2)$ $(a,\ b,\ c,\ d \in [2,4])$. **148.** $(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n)^2 + (\cos\alpha_1 + \ldots + \cos\alpha_n)^2 \leq n^2$ $(\alpha_i \in \mathbb{R})$.
149. $a,\ b,\ c > 0$; $a + b + c \geq abc$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc$. **150.** а) $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$; б) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} < \ln 2$ $(n \in \mathbb{N})$.

## Вступительная олимпиада

1. Найдите все натуральные $n$, для которых $3^n + 5^n$ делится на $3^{n-1} + 5^{n-1}$.
2. Злоумышленник переставил кнопки в лифте 13-этажного дома. Теперь номер этажа, на который отправляется лифт при нажатии на кнопку, не всегда совпадает с числом, указанным на кнопке. Находясь на некотором этаже, пенсионер N нажимает кнопку с номером этого этажа и, возможно, перемещается на другой этаж. Он обнаружил, что с какого бы этажа не начать, после 1313 таких нажатий лифт возвращается на исходный этаж. Докажите, что действуя указанным образом, можно с любого этажа попасть на любой.
3. Дана трапеция $ABCD$ $(BC \| AD)$. Биссектрисы внешних углов $A$ и $B$ пересекаются в точке $P$, а внешних углов $C$ и $D$ — в точке $Q$. Докажите, что длина отрезка $PQ$ равна полупериметру трапеции.
4. Среди натуральных чисел от 1 до 99 выбрано 50 чисел. Известно, что никакие два из них не дают в сумме ни 99, ни 100. Докажите, что выбранные числа — это все числа от 50 до 99.
5. Даны положительные числа $a$, $b$, $c$. Докажите, что хотя бы одно из чисел $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ не превосходит $1/4$.
6. Из точки $P$, лежащей вне окружности $\leq$, проведены касательные к $\leq$ $PA$ и $PB$, а также секущая, пересекающая $\leq$ в точках $C$ и $D$. Точка $M$ — середина $CD$. Докажите, что $\angle PMA = \angle PMB$.
7. Клетчатая плоскость разбита на доминошки. Докажите, что существует другое разбиение этой плоскости на доминошки, в котором нет ни одной доминошки из первого разбиения.

## Заключительная олимпиада

1. По кругу сидят 2000 рыцарей (всегда говорящих правду) и лжецов (которые всегда лгут). Каждый из них заявил, что его соседи – лжец и рыцарь, но два рыцаря при этом ошиблись. Сколько среди них лжецов?
2. На гипотенузе $AC$ прямоугольного треугольника $ABC$ выбрана такая точка $D$, что $BC = CD$. На катете $BC$ взята такая точка $E$, что $DE = CE$. Докажите равенство $AD + BE = DE$.
3. $F(x) = x^{2000} - x^{1000} + 1$. Существуют ли такие различные натуральные числа $a_1$, $a_2$, …, $a_{2001}$, что $F(a_i)F(a_j)$ делится на $a_i a_j$ при всех $i \neq j$?
4. Дима и Федя играют в крестики-нолики на бесконечной клетчатой плоскости: Дима (он начинает) каждым ходом ставит в свободную клетку крестик, а Федя — нолик. Может ли Федя помешать Диме поставить 4 крестика в углах квадрата $2 \times 2$?
5. В остроугольном треугольнике $ABC$ проведены высоты $AA_1$, $BB_1$ и $CC_1$. На отрезке $A_1C_1$ выбрали точки $A_2$ и $C_2$ такие, что отрезок $B_1A_2$ делится высотой $CC_1$ пополам и пересекает высоту $AA_1$ в точке $K$, а отрезок $B_1C_2$ делится высотой $AA_1$ пополам и пересекает высоту $CC_1$ в точке $L$. Докажите, что $KL \parallel AC$.
6. На окружности отмечено 50 точек и проведено $50k + 1$ хорд с вершинами в этих точках. Докажите, что можно так выбрать $k + 1$ из этих хорд, что никакие две из них не имеют общих точек.
7. Число $N$ равно произведению 200 различных натуральных чисел. Докажите, что $N$ имеет не меньше 19901 различных натуральных делителей (включая единицу и само число).

## Матбой-1. СПб-Иногородние.

1. В множестве из $n$ элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выделено $n$ неупорядоченных пар $P_1$, $P_2, \ldots, P_n$ так, что пары $P_i$ и $P_j$ имеют общий элемент тогда и только тогда, когда $\{a_i, a_j\}$ – одна из выбранных пар. Докажите, что каждый элемент входит ровно в две пары.
2. Докажите, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует натуральное $n \leq k^4$, делящееся на $k$ и записываемое (в десятичной системе) не более чем четырьмя различными цифрами.
3. На сторонах $AB$, $BC$, $CA$ треугольника $ABC$ отмечены точки $C_1$, $C_2$; $A_1$, $A_2$; $B_1$, $B_2$ (порядок точек на периметре: $AC_1C_2BA_1A_2CB_1B_2$) таким образом, что $\angle AA_1A_2 = \angle AA_2A_1 = \angle BB_1B_2 = \angle BB_2B_1 = \angle CC_1C_2 = \angle CC_2C_1$. Прямые $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, пересекаясь, образуют треугольник; прямые $AA_2$, $BB_2$, $CC_2$ образуют другой треугольник. Докажите, что шесть вершин этих треугольников лежат на одной окружности.
4. Докажите, что для любых целых $A$ и $B$ существует такое целое $C$, что множества значений квадратных трехчленов $x^2 + Ax + B$ и $2x^2 + 2x + C$ в целых точках не пересекаются.
5. Найдите количество способов раскрасить клетки квадрата $n \times n$ $(n \geq 2)$ в красный и синий цвета так, чтобы в любом квадрате $2 \times 2$ было по две клетки каждого цвета.
6. Докажите неравенство $\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \leq 2$ $(a,\ b,\ c \in [0,1])$
7. Точка $D$ лежит на основании $AC$ равнобедренного треугольника $ABC$. Точки $E$ и $F$ таковы, что середина отрезка $DE$ лежит на отрезке $AB$, а середина отрезка $DF$ лежит на отрезке $BC$ и $\angle EDA = \angle FDC$. Середина отрезка $EF$ точка $K$ лежит внутри треугольника $ABC$. Докажите, что $\angle ABD = \angle CBK$.
8. Существуют ли четыре таких квадратных трехчлена, что, записав их в произвольном порядке, мы сможем найти число, при подстановке которого в эти трехчлены полученные значения будут записаны в строго возрастающем порядке?
9. На доске написаны числа 1, 2, …, 1999. Двое играют в игру: одним ходом разрешается стереть два числа и написать вместо них либо их сумму, либо произведение, либо разность (любого знака). Первый игрок хочет, чтобы последнее оставшееся число было кратно 1999. Сможет ли второй ему помешать?
10. На координатной плоскости проведена 101 прямая и отмечены все точки их пересечения друг с другом. Может ли быть так, что на каждой из проведенных прямых лежат 50 отмеченных точек с положительными первыми координатами и 50 — с отрицательными?

**Матбой-2, СПб-иногородние. Матбой-3, внутренний.**

1. На экране компьютера - число 123. Компьютер каждую минуту прибавляет к числу на экране 102. Программист Федя может в любой момент изменить число на экране, переставив произвольным образом его цифры. Может ли Федя действовать так, чтобы на экране всегда оставалось трехзначное число?
2. Обозначим через $\pi(n)$ количество простых чисел, не превосходящих $n$. Докажите, что $\pi(2n) + \pi(n!+n) \geq \pi(n) + \pi(n!+2n)$.
3. На планете 10000 городов, среди которых есть столицы государств. Некоторые города связаны дорогами так, что любая дорога соединяет ровно 2 города, и от любого города до любого другого можно добраться по дорогам. При этом, чтобы попасть из одной столицы в другую, нужно проехать не менее 200 дорог. Докажите, что на планете меньше 100 столиц.
4. На доске написаны числа 2, 3, 9. Можно заменять 2 числа $a$ и $b$ на числа $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ и $a+b-\sqrt{a^2+b^2}$. Может ли на доске появиться число, меньшее 1?
5. От картонного треугольника прямолинейными разрезами отрезают равные треугольники. Существует ли треугольник, для которого это удастся сделать хотя бы 13 раз?
6. При каком наибольшем $k$ существуют $k$ подряд идущих натуральных чисел таких, что их суммы цифр являются перестановкой $k$ подряд идущих натуральных чисел?
7. На описанной вокруг равностороннего треугольника $ABC$ окружности отмечена середина $P$ меньшей дуги $AC$, и на дуге $AP$ взята точка $M$. $N$ — середина отрезка $BM$. Наконец, $K$ — основание перпендикуляра, опущенного из $P$ на $MC$. Докажите, что треугольник $AKN$ — правильный.
8. Решите в простых числах уравнение: $p^2 + q = 37q^2 + p$.
9. Даны 3 отрезка, длины которых равны 1, 2, 3. Отрезок длины 3 как-то разбили на 100 других. Докажите, что среди получившихся 102 отрезков найдутся 3, из которых можно составить треугольник.
10. Две окружности с центрами $O_1$ и $O_2$ пересекаются в точках $A$ и $B$. Окружность, проходящая через точки $O_1$, $O_2$ и $B$, пересекает вторую окружность в точке $P$. Докажите, что точки $O_1$, $A$ и $P$ лежат на одной прямой.