Мате, мате, матика

1. За позитивне реалне бројеве $a_1, a_2, \ldots, a_{2005}$ важи $\sum_{i=1}^{2005} a_i = 2005$. Наћи минимум следећег израза:

$$\sum_{k=1}^{2005} \sqrt{(2k-1)^2 + a_k^2}.$$

2. Нека је AB пречник полукруга. Тачка C припада дужи AB. Над AC и BC као пречницима су конструисане полукружнице, а њихова заједничка тангента сече велики полукруг у D. Одредити однос површина полукруга са пречником CD и површине "српа".

3. На пољу је поређано n људи, тако да су сва међусобна растојања различита. Свака особа држи пиштољ и на дати сигнал, свако пуца у најближу особу. Да ли постоји особа која ће преживети обрачун?

4. Дат је полином $P(x)$ са целобројним коефицијентима. Ако ни један од бројева $P(1), P(2), \ldots, P(2005)$ није дељив са 2005, доказати да $P(x)$ нема целобројни корен.

5. Нека је p прост број и $Z_p = \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Колико бројева садржи скуп:

$$\{x^2 : x \in Z_p\} \bigcap \{y^2 + 1 : y \in Z_p\}?$$

6. Доказати да за $n \geqslant 2$, важи једнакост:

$$\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \cdot \ldots \cdot \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

7. Наћи све моничне полиноме $f(x)$ са целобројним кооефицијентима, тако да је $f(0) = 2006$ и ако је x ирационалан, тада је $f(x)$ ирационалан.

8. Нека су x, y и z позитивне реални бројеви, који нису сви међусобно једнаки. Бројеви a, b и c су одређени са

$$a = x^2 - yz, \quad b = y^2 - zx, \quad c = z^2 - xy$$

Изразити x, y, z у функцији од a, b, c.

9. За округлом столу седи n особа. Домаћин наздравља са првим гостом; затим прескочи његовог десног суседа, па наздрави следећем; затим прескочи два госта, па наздрави следећем, итд. За какву вредност броја n ће домаћин наздравити сваком госту тачно једном?

10. Ако је $a + b + c = 0$, доказати да је

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

11. Нека је p прост број облика $4k + 1$. Доказати

$$\lfloor\sqrt{p}\rfloor + \left\lfloor\sqrt{2p}\right\rfloor + \ldots + \left\lfloor\sqrt{\frac{p-1}{4}p}\right\rfloor = \frac{p^2 - 1}{12}$$

12. Дат је конвексан шестоугао $ABCDEF$, тако да је $AB = BC$, $CD = DE$ и $EF = FA$. Доказати неједнакост:

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geqslant \frac{3}{2}$$

13. Нека је $f(n)$ број јединица у бинарном запису броја n. Одредити суму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n(n+1)}.$$

14. У простору је дато $n \geqslant 4$ тачака, тако да никоје четири нису компланарне. Тачке су обојене бело и црно, тако да свака сфера која пролази кроз бар четири тачке скупа - садржи једнак број црних и белих тачака. Доказати да све тачке припадају једној сфери.

15. Нека је $P(x) = x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ полином са реалним коефицијентима. Доказати да постоји $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, такав да је $|P(z)| \geqslant 1 + |a_0|$.

16. Одредите све бројеве n са следећом особином: могуће је распоредити све делиоце од n веће од 1 на кругу, тако да ниједна два узастопна делиоца нису узајамно проста.

17. Нека је n природан број већи од 1. У равни је дато $2n$ тачака, тако да не постоје три колинеарне међу њима. Тачно половина је обојена плавом, а друга половина црвеном бојом. Права је "балансирајућа" ако пролази кроз једну плаву и једну црвену тачку и са сваке стране праве се налази једнак број црвених и плавих тачака. Доказати да постоје бар две "балансирајуће" праве.

18. Нека је $S(n)$ сума цифара природног броја n у децималном систему. Доказати да за сваки природан број k, постоји $m \in \mathbf{N}$, тако да једначина

$$x + S(x) = m$$

има тачно k решења.

19. Ако је дат природан број k, наћи најмањи природан број C, тако да је

$$\frac{C}{n+k+1}\binom{2n}{n+k}$$

цео број за $n \geqslant k$.

20. Дато је $2n$ карата, обележених бројевима од 1 до $2n$. Играчи А и Б играју следећу игру: карте се промешају и свако добије по n карата. Наизменично избацују по једну карту на сто. Игра се завршава ако је сума бројева на избаченим картама дељива са $2n+1$. Последња особа која је избацила карту је победник. Ако А и Б играју оптималном стратегијом, која је вероватноћа да први играч победи?

21. Дат је низ $a_0 = 1$, $a_{2n+1} = a_n$, $a_{2n+2} = a_n + a_{n+1}$. Доказати да се сваки рационалан број налази у скупу:

$$\left\{\frac{a_{n-1}}{a_n} : n \geqslant 1\right\} = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \ldots\right\}.$$

22. Показати да се сваки природан број може представити као сума једног или неколико бројева облика $2^a 3^b$, где су a и b ненегативни цели бројеви, тако да ниједан члан не дели другог. (На пример, $23 = 9 + 8 + 6$).

23. Нека је p прост број, већи од 3 и

$$n = \frac{2^{2p} - 1}{3}.$$

Доказати да је n дели $2^n - 2$.

24. Нека су $a, b \geqslant 2$ и X скуп од $\binom{a+b-4}{b-2}$ реалних бројева. Тада X садржи или растући низ $\{x_i\}_{i=1}^{a} \subseteq X$ дужине a тако да је

$$|x_{i+1} - x_1| \geqslant 2|x_i - x_1|, \quad i = 2, 3, \dots a - 1$$

или опадајући низ $\{x_i\}_{i=1}^{b} \subseteq X$ дужине b тако да је

$$|x_{i+1} - x_1| \geqslant 2|x_i - x_1|, \quad i = 2, 3, \dots b - 1.$$

25. У граду постоје $n \times n$ кућица, тако да је $(1,1)$ у горњем левом углу. У почетном тренутку $t = 0$, кућица на позицији $(1, c)$, где је $c \leqslant \frac{n}{2}$, се запалила. Током сваког сата ватрогасци могу да заштите једну кућицу, која се још увек није запалила. Ватра шири на сва суседна незаштићена поља (која деле заједничку ивицу), која су била запаљена у претходном сату. Када се кућица једном заштити, ватра се не шири преко ње. Процес се зауставља када ватра престане да се шири. Колико највише кућа могу ватрогасци да спасу?

26. У равни је дато n кругова $k_1, k_2, \dots, k_n$ једнаких полупречника 1. Свака тачка у равни је садржана у не више од 2003 кругова. Доказати да сваки круг k_i сече највише 14020 кругова.

27. Дат је круг k и тачка P ван њега, са тангентама PA и PB на круг. Права l сече круг k у тачкама C и D. Кроз тачку B је конструсана паралела $EF \| PA$, тако да сече праве AC и AD у тачкама E и F, респективно. Доказати да је $BE = BF$.

28. Доказати да за све позитивне реалне бројеве a, b, c, d важи:

$$(a+b+c+d)^3 \leqslant 4(a^3+b^3+c^3+d^3) + 24(abc+abd+acd+bcd).$$

29. Дат је скуп S, који садржи 2006 природних бројева. Одабрано је n различитих подскупова од S, тако да су њихове суме релативно просте по паровима. Наћи највећу могућу вредност за n.

30. Нека је S_n сума првих n простих бројева. Доказати да за свако n, постоји природан број k_n, тако да је

$$S_n < k_n^2 < S_{n+1}.$$

31. Дата је огрлица са n каменчића. Сваки каменчић је обележен целим бројем, тако да је сума свих бројева $n-1$. Доказати да је могуће пресећи огрлицу, тако да добијемо каменчиће са бројевима у реду $x_1, x_2, \dots, x_n$ тако да важи:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leqslant k - 1, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

32. За које природне бројеве n је могуће распоредити бројеве $\{1, 2, , \dots, n\}$ у низ, тако да за свака два броја аритметичка средина ових бројева се не налази између њих.

33. Нека је $\triangle ABC$ једнакостраничан троугао. Тачка P се налази унутар троугла тако да је $\measuredangle APC = 120^o$. Полуправа CP сече AB у тачки M, а полуправа AP сече BC у N. Одредити геометријско место тачака центара описаног круга око $\triangle MBN$, када P варира.

34. У сваком пољу таблице $n \times n$ се налази сијалица. На почетку су све сијалице угашене. Ако пипнемо неку сијалицу, све сијалице у истом реду и колони мењају стање (оне упаљене се угасе и обрнуто). Одредити минималан број пипања, тако да упалимо све сијалице.

35. Показати да једначина има бесконачно много решења

$$2a^2 - 3a + 1 = 3b^2 + b.$$

36. Неколико људи је данас посетило библиотеку. Свако од њих јебио у библиотеци тачно једном. Међу свака три човека постоје два која су се срела у библиотеци. Доказати да постоје тренуци T и T', тако да је свако од њих био у библиотеци у времену T или T'.

37. На кружници су дата четири цела броја. У сваком кораку, исотвремено замењујемо сваки број са разликом између њега и суседног броја у смеру казаљке на сату. После 2006 корака на кружници су били написани бројеви a, b, c, d. Да ли је могуће да су бројеви $|bc-ad|$, $|ac-bd|$ и $|ab-cd|$ прости?

38. Одредити све позитивне целе бројеве који не могу да се представе у форми:

$$\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}$$

где су a и b природни бројеви.

39. У сенату се налази 51 сенатор. Сенат се мора поделити у n комитета, тако да је сваки сенатор у тачно једном комитету. Сваки од сенатора мрзи тачно тројицу других сератора. Ипак, ако сенатор A мрзи сенатора B, то не значи да B мрзи A. Наћи најмању вредност за n, тако да је могуће организовати n комитета, тако да у истом комитету сенатори не мрзе међусобно.

40. Наћи све функције $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, тако да је за свако $n\geqslant m\geqslant 1$ важи:

$$f(n+m)f(n-m)=f(n^2).$$

41. Нека су E и F тачке на страницама AC и AB троугла $\triangle ABC$, такве да је $EF\|BC$. Доказати да пресечне тачке кругова над пречницима BE и CF припадају висини из темена A.

42. Нека су $a,b,c>0$ и $a+b+c\leqslant 3abc$. Доказати неједнакост:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leqslant a+b+c.$$

43. Дат је троугао $\triangle ABC$, а I је центар уписаног круга. Права AI сече описани круг око ABC у D. Нека су E и F подножја нормала из I на праве CD и BD, редом. Ако је $IE+IF=\frac{AD}{2}$, израчунати угао $\measuredangle BAC$.

44. Нека је X скуп од n елемената, а $A_1,A_2,\ldots,A_m$ су подскупови од X, тако да је:
(1) $|A_i|=3$ за свако $1\leqslant i\leqslant m$,
(2) $|A_i\bigcap A_j|\leqslant 1$ за свако $i\neq j$.
Доказати да постоји подскуп скупа X, који садржи бар $\lfloor\sqrt{2n}\rfloor$ елемената и не садржи ни један скуп A_i.

45. За које вредности n је могуће конструисати полигон са страницама дужина $1,2,\ldots,n$, у овом редоследу, тако да су су сваке две узастопне странице нормалне?

46. Наћи најмањи број t, тако да постоје цели бројеви

$$x_1^3+x_2^3+\ldots+x_t^3=2002^{2002}?$$

47. Дато је $n+1$ тегова целобројних тежина. Ако уклонимо неки тег, осталих n тегова се може поделити у две групе са једнаким бројем тегова, са једнаким тежинама. Доказати да су сви тегови исте тежине.

48. Квадрат 23×23 је комплетно прекривен квадратима 1×1, 2×2 и 3×3. Колико најмање квадратића 1×1 учествује у поплочавању?

49. Декадни запис броја a састоји се од n цифара, а декадни запис броја a^3 састоји се од m цифара. Да ли $m+n$ може бити једнако 2005?

50. Кутија садржи 111 лоптица, тако да је свака лоптица бела, плава, зелена или црвена. Ако се 100 лоптица извуче без гледања у кутију, постојаће 4 лоптице различите боје. Који је најмањи број лоптица који се мора извући тако да се гарантује да ће међу извученим лоптицама бити 3 различите боје?

51. Доказати да не постоје функције $f(x)$ и $g(y)$, тако да за произвољне реалне бројеве $x, y \in R$ важи:

$$x^2 + xy + y^2 = f(x) + g(y).$$

52. Кошаркаш Пеђа Стојаковић шутира слободна бацања и води статистику $s(n)$ - број погодака у првих n бацања. На почетку сезоне $s(n)$ је био мањи од 80 процената од n, а на Алл Стар мечу је био већи од 80 процената од n. Да ли је постојао тренутак када је $s(n)$ био једнак 80 процената n?

53. Нека су k и k' две концентрицне кружнице са центром у O и одговарајућим полупречницима $R < R'$. Права кроз O сече кругове k и k' у тачкама A и B редом, тако да је O између тачака A и B. Полуправа са почетком у O, различита од претходне праве, сече кругове k и k' у тачкама E и F редом. Доказати да се описани кругови око троуглова $\triangle OEA$ и $\triangle OBF$, и кругови са пречницима AB и EF, секу у једној тачки.

54. У равни је дат непаран број интервала дужине 1. Нека је S скуп свих бројева са реалне праве који се појављују у непарном броју интервала. Доказати да је S унија дисјункних интервала чија је укупна дужина већа или једнака од 1.

55. Нека је $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} = 0$ низ реалних бројева. Доказати неједнакост:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}).$$

56. Доказати да је $\cos \frac{2\pi}{5}$ ирационалан број.

57. Нека је $n > 1$ природан број. Број n је магичан ако важи: за свака два броја x и y који нису узајамно прости са n, број $x+y$ није узајамно прост са n. Одредити све магичне бројеве.

58. Дат је оштроугли троугао $\triangle ABC$ са $AB \neq AC$. Нека је H ортоцентар троугла $\triangle ABC$, F средина странице BC, тачка D је подножје нормале из A на дуж BC, а пресек праве AH и описаног круга око троугла $\triangle ABC$ означимо са E. Тангента на описани круг око троугла $\triangle DEF$ у тачки D сече праве AB и AC у тачкама M и N, редом. Доказати да је $DN = DM$.

59. Нека је $n \geq 2$ природан број и скуп $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. За сваки број $1 \leq k \leq n-1$ нека је

$$x_k = \frac{1}{n+1} \sum_{|B|=k, B \subset A} (\min B + \max B).$$

Доказати да су $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ природни бројеви, и да нису сви бројеви дељиви са 4.

60. Ако полиноми $P(x)$ и $Q(x)$ имају бар један реалан корен (не обавезно исти), и ако важи

$$P(1 + x + Q^2(x)) = Q(1 + x + P^2(x))$$

за свако $x \in R$, доказати да је $P \equiv Q$.