Gimnazija Svetozar Marković, Niš
Dodatna nastava iz matematike

predavač - Aleksandar Ilić
Niš 23.10.2004. godine

Matematička indukcija

1. Na kružnoj stazi dato je n kanti benzina razne zapremine. Poznato je da ukupna količina benzina u kantama tačno dovoljna da se obidje ceo krug. Dokazati da postoji mesto na stazi sa koga može da se krene i obidje ceo krug, sakupljajući benzin iz kanti na koje se naidje.

2. Dokazati jednakost:

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \cdot \frac{1}{2^k} = 2^n$$

3. U ravni je dato n krugova, koji dele ravan na delove. Dokazati da je moguće obojiti delove ravni sa dve boje, tako da su susedni delovi obojeni različitim bojama.

4. U ravni je dato n pravih, tako da nema paralelnih pravih i ne postoje tri prave koje se seku u jednoj tački. Dokazati da je moguće dodeliti regionima nenula cele brojeve po apsolutnoj vrednosti manji od n, tako da je suma brojeva sa svake strane bilo koje prave jednaka 0.

5. Iz table $2^n \times 2^n$ uklonimo jedno polje. Dokazati da se takva tabla može popločati sa L trominom.

6. Neka su $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$ prirodni brojevi i važi $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 1$. Dokazati da je $a_n < 2^{n!}$.

7. Dokazati da za prirodan broj n i realan broj x dokazati:

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{n} \rfloor + \ldots + \lfloor x + \frac{n-1}{n} \rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

8. Dokazati nejednakost $(a+b-ab)^m \ge a^m + b^m - a^m b^m$ za $a, b \in [0,1]$, a zatim ako je $x_i + y_i = 1$ za svako $1 \le i \le n$:

$$(1 - x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^m + (1 - y_1^m)(1 - y_2^m) \cdot \ldots \cdot (1 - y_n^m) \ge 1$$

9. Dokazati da je polinom $(x+1)^{2n+1} + x^{n+2}$ deljiv sa $x^2 + x + 1$ za svako $n \in N$.

10. Data je vrsta sa n polja. Novčić se nalazi na prvom polju. Dva igrača naizmenično pomeraju novčić za 1, 3 ili 8 polja udesno. Pobednik je onaj ko pomeri novčić na poslednje polje. Ko ima pobedničku strategiju u zavisnosti od n?

11. Dati su prirodni brojevi $x_1, \ldots, x_n$ i $y_1, \ldots, y_m$ i važi $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_m \le mn$. Dokazati da je moguće prešvrljati neke brojeve gornje jednačine, tako da ostane znak jednakosti na snazi.

12. Dat je niz definisan sa $a_1 = 2$ i $a_n = 2(n + a_{n-1})$. Dokazati da je $a_n \le 2^{n+2}$.

13. Na stolu se nalazi gomila kartica i na svakoj je zapisan broj od 1 do n. Suma svih brojeva na karticama je $k \cdot n!$. Dokazati da se kartice mogu podeliti u k grupa, tako da je suma brojeva u svakoj grupi jednaka $n!$.

14. Neka je A konačan skup prirodnih brojeva. Dokazati da postoji konačan skup B prirodnih brojeva, tako da je $A \subseteq B$ i $\prod_{x \in B} x = \sum_{x \in B} x^2$.

15. Dokazati da za svaki prirodan broj n postoji broj sa n cifara koji je deljiv sa 5^n i čije su sve cifre neparne.

16. Neka je a_n broj reči nad azbukom $\{0, 1\}$, koje ne sadrže dve jedinice na rastojanju 2. Naći a_n u funkciji od Fibonačijevih brojeva.

17. Dokazati da važi:

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}$$

18. Rešiti funkcionalnu jednačinu u skupu racionalnih brojeva: $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)$.

19. Dato je $n+1$ različitih brojeva iz skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Dokazati da medju njima postoje dva uzajamno prosta broja i dva broja a i b, tako da $a|b$.

20. Neka je n prirodan broj. Svaka celobrojna tačka (x, y) za koju je $x + y < n$ je obojena crveno ili plavo. Ako je (x, y) crvena, onda su i tačke (x', y') sa $x' \le x$ i $y' \le y$ crvene. Neka je A broj načina da se izaberu n plavih tačaka sa različitim x koordinatama, a B broj načina da se izaberu n plavih tačaka sa različitim y koordinatama. Dokazati da je $A = B$.