Olimpijske pripreme iz matematike
3. jul 2006. godine

predavač: Aleksandar Ilić
Matematička Gimnazija Beograd

Razni zadaci

1. U pravougaonoj koordinatnoj mreži $m \times n$, izabrano je $m + n$ tačaka. Svaki par tačaka koji su u istoj vertikali ili istoj horizontali je spojen ivicom. Dokazati da se mora pojaviti krug u takvom spajanju.

2. Data su dva niza prirodnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_k$ i $b_1, b_2, \ldots, b_m$ takvih da je $a_i \leqslant m$ i $b_j \leqslant k$. Dokazati da postoje podniz niza a odnosno podniz niza b tako da je zbir brojeva oba ova podniza jednak.

3. U polja table $n \times n$ postavljeno je nk žeton, u svaku vrstu i svaku kolonu tačno po k žetona. Dokazati da se žetoni mogu obojiti sa k boja, tako da žetoni svake vrste i svake kolone budu različito obojeni.

4. Dat je $\triangle ABC$ i tačka D na stranici AB. Posmatrajmo krug ω koji dodiruje duži BD, CD u tačkama M i N i krug opisan oko $\triangle ABC$. Dokazati da centar upisanog kruga $\triangle ABC$ leži na pravoj MN.

5. U trouglu $\triangle ABC$ tačke O i H su centar opisanog kruga i ortocentar, a $R = OA$. Tačke D, E, F su takve da su trouglovi DBC, AEC, ABF podudarni sa $\triangle ABC$. Dokazati da su D, E, F kolinearne akko $OH = 2R$.

6. Odrediti sve realne brojeve $r \in (0, 1)$, tako da za svaku neprekidnu funkciju $f : [0, 1] \to R$, za koju je $f(0) = f(1)$, postoje $\alpha, \beta \in (0, 1)$, tako da je $f(\alpha) = f(\beta)$ i $|\alpha - \beta| = r$.

7. Neka je $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, polinom sa kompleksnim koeficijentima. Dokazati da postoji $z \in C$, tako da je $|z| = 1$ i važi:

$$|P(z)| \geqslant |a_0| + \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{|a_k|}{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}.$$

8. U ravni je dato n krugova $D_1, D_2, \ldots, D_n$ koji sadrže dati figuru E. Za svako $i = \overline{1, n}$, neka je D_i' krug koji je koncentričan sa D_i, ali ima tri puta već i poluprečnik. Dokazati da je moguće odabrati nekoliko krugova iz skupa $\{D_1', D_2', \ldots, D_n'\}$, koji su disjunktni i koji sadrže u uniji figuru E.

9. Dat je skup A sa n elemenata i jedna familija F njegovih k-elementnih podskupova. Svaka dva člana iz familije F imaju neprazan presek. Dokazati da je za $n \geqslant 2k$

$$|F| \leqslant \binom{n-1}{k-1}.$$

10. Dat je sistem jednačina:

$$x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25, \quad \frac{y^2}{3} + z^2 = 9, \quad z^2 + zx + x^2 = 16.$$

Odrediti vrednost izraza $xy + 2yx + 3xz$.

11. Neka je $\triangle ABC$ proizvoljan trougao. Krug koji prolazi kroz B i C seče stranice AB i AC u C' i B', respektivno. Dokazati da su prave BB', CC' i HH' konkurentne, gde su H i H' ortocentri trouglova ABC i $AB'C'$.

12. Neka je $n > 1$ prirodan broj. Odrediti najmanji realna broj c_n sa sledećom osobinom: Za datih n realnih brojeva, postoje dva medju njima x i y, tako da je

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} \leqslant c_n.$$

13. Data je funkcija $f : R^n \to R^n$, sa

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1}{1 + x_2x_3 \ldots x_n} + \frac{x_2}{1 + x_1x_3 \ldots x_n} + \cdots + \frac{x_n}{1 + x_1x_2 \ldots x_{n-1}} + x_1x_2 \ldots x_n,$$

gde je $n \geq 2$ fiksiran prirodan broj. Odrediti, ako postoji,

$$\max_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in[0,1]^n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

14. Dat je jedinični kvadrat. Da li se može izvršiti particija datog kvadrata na disjunktne kvadratiće, ali tako da bar jedan od njih ima iracionalnu stranicu?

15. Dat je trougao $\triangle ABC$. Neka je centar upisanog kruga I, a upisani krug dodiruje stranice trougla BC, AC, AB u tačkama L, M, K, redom. Kroz tačku B je povučena paralela p sa duži KL. Presek pravih ML i p je tačka S, a presek MK i p je R. Dokazati da je ugao $\measuredangle RIS$ oštar i da važi nejednakost:

$$\tan RIS \geqslant \frac{\sin\beta}{\sin^3\frac{\beta}{2}}.$$

16. U svakom polju tablice $n \times n$ se nalazi sijalica. Na početku su sve sijalice ugašene. Ako pipnemo neku sijalicu, sve sijalice u istom redu i koloni menjaju stanje (one upaljene se ugase i obrnuto). Odrediti minimalan broj pipanja, tako da upalimo sve sijalice.

17. Igrač A je zamislio brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a igraču B je rekao sve sume od po dva elementa $a_1 + a_2, a_1 + a_3, \ldots, a_{n-1} + a_n$. Dokazati da igrač B može odrediti niz $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ako i samo ako n nije stepen dvojke.

18. Naći sve funkcije $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, tako da za sve za sve $x, y \in R^+$ važi:

$$f(x)f(yf(x)) = f(x+y).$$

19. U ravni je dato $2n + 1$ tačaka, tako da medju njima nikoje tri nisu kolinearne i nikoje četiri nisu konciklične. Krug koji prolazi kroz tri tačke je *dobar* ako sadrži tačno $n - 1$ tačaka u svojoj unutrašnjosti. Dokazati da je broj dobrih krugova paran ako i samo ako je n paran broj.

20. Permutacija brojeva od 1 do n je *dobra* ako ne sadrži podniz dužine 10 sa brojevima u neopadajućem poretku. Dokazati da je broj dobrih permutacija manji ili jednak od 81^n.

21. Upisani krug u $\triangle ABC$ dodiruje BC u tački K. Neka je AD visina iz temena A, a M njena sredina. Ako je N druga zajednička tačka upisanog kruga i prave KM, dokazati da se opisani krug oko $\triangle BCN$ i upisani krug u $\triangle ABC$ tangiraju u N.

22. Odrediti najveću konstantu A, tako da za svake pozitivne $x, y, z \in R$ važi:

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} > A.$$