Ликбез: 1) что такое степенной ряд, радиус сходимости, производящая функция, производящая функция степеней двойки, чисел Фибоначчи, производящая функция для чисел Каталана, пентагональная теорема (см. ЗМО)

2) что такое линейное пространство, линейная зависимость и независимость, базисы, скалярные произведения, линейные функционалы, теорема о ранге (гм, может быть, без доказательства)

3) что такое сумма по Минковскому, неравенство Минковского на плоскости по конспекту, в любой размерности по Бураго

4) теоремы о многогранниках, видимо, с упражнениями, пусть этим Димка занимается

5) графы: теорема Рамсея

6) усреднения

7) индикатриса ширин (пожалуй, достаточно дать определение, но потом ведь разбирать). В одном из разборов рассказть про триангуляции Делоне (может, попросить Дужина прислать отчет Антона?). Теорема Банга, тоже в одном из разборов.

8) теорема ВанДерВардена об арифметических прогрессиях

Порядок 2-6-1-3-4-5-8-7

Серия 1. Теорема Хелли.

1. Докажите *теорему Радона*: любые $n+2$ точки в ^{n} можно разбить на две группы, выпуклые оболочки которых пересекаются.

2. *Теорема Хелли.*

а) Докажите, что если любые $n+1$ из $n+2$ выпуклых мнжеств в ^{n} имеют общую точку, то и все $n+2$ множества имеют общую точку.

б) Докажите, что если любые $n+1$ из N выпуклых множеств в ^{n} имеют общую точку, то и все N множеств имеют общую точку.

в) Верно ли, что если любые $n+1$ из бесконечного количества выпуклых множеств в ^{n} имеют общую точку, то и все они имеют общую точку?

г) А если в предыдущем пункте потребовать, чтобы все множества были компактными?

3. В ^{n} дано N точек, причем любые $n+1$ можно накрыть шаром радиуса 1. Докажите, что и все точки можно накрыть шаром радиуса 1.

4. Докажите, что любое множество в ^{n} диаметра 1 можно покрыть шаром *Юнга* радиуса $\sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$ для случая

а) $n=2$

б) $n=3$

в) произвольного n.

Дальше в этой серии все, как правило, двумерно.

5. Докажите, что в любую выпуклую фигуру на плоскости ширины 1 можно вписать круг радиуса $\frac{1}{3}$ (*круг Бляшке*).

6. а) На плоскости дано n точек. Докажите, что суествует такая точка O, что по любую сторону от любой прямой, проходящей через O лежит не более $\frac{2n}{3}$ этих точек (точки, лежащие на прямой, не учитываются).

б) На плоскости дана (возможно несвязная) кривая K длины L. Докажите, что найдется такая точка O, что по каждую сторону от любой пярмой, проходящей через O, лежит часть кривой K длины не более $\frac{2L}{3}$.

в) На плоскости дана (возможно несвязная) фиигура F площади S. Докажите, что найдется такая точка O, что по каждую сторону от любой прямой, проходящей через O, лежит часть фигуры F площади не более $\frac{2S}{3}$.

7. Докажите, что внутри каждой ограниченной выпуклой фигуры F на плоскости существует точка такая, что любая хорда, проходящий через эту точку, делится этой точкой в отношении $\lambda :$ $1/2 \leq \lambda \leq 2$.

8. Докажите *теорему Красносельского:* если для любых трех точек произвольного многоугольника F существует точка внутри F, из которой видны все три, то многоугольник F полностью виден из одной из своих внутренних точек (то есть является *звездным*).

9. Докажите, что в любом выпуклом семиугольнике найдется точка, не принадлежащая ни одному из четырехугольников, образованных четверками его последовательных вершин.

10. На плоскости дано конечное число параллельных отрезков, любые три из которых можно пересечь одной прямой. Докажите *теорему Сантало:* все их можно пересечь одной прямой.

Серия 2. Усреднение.

1. а) Докажите, что если один из двух выпуклых многоугольников лежит в другом, то периметр внутреннего многоугольника не больше периметра внешнего.

б) Докажите, что если один выпуклый многогранник расположен внутри другого, то площадь поверхности внутреннего не больше площади поверхности внешнего.

2. В лесу растут деревья, высота каждого не больше 100 м. Расстояние между любыми двумя деревьями не превосходит разности их высот. Докажите, что лес можно обнести забором длины не более 200 м.

3. Выпуклые многоугольники с периметрами $P_1, P_2, \ldots, P_n$ расположены на плоскости так, что не существует прямой, разделяющих эти многоугольники (то есть для любой прямой l, не пересекающей эих многоугольников, все они лежат по одну сторону от l). Докажите, что все эти многоугольники можно поместить в многоугольник периметра $P_1 + P_2 + \ldots + P_n$.

4. а) Докажите, что периметр выпуклого многоугольника диаметра 1 меньше π.

б) Докажите, что периметр выпуклого многоугольника ширины 1 больше π.

5. а) На плоскости дано несколько векторов, сумма длин которых равна π. Докажите, что из них можно выбрать несколько, длина сумма которых не меньше 1.

б) В пространстве дано несколько векторов, сумма длин которых равна 4. Докажите, что из них можно выбрать несколько, длина сумма которых не меньше 1.

6. Докажите, что для любых точек A, B, C, D, E плоскости выполняется неравенство

$$AB + CD + DE + EC \le AC + AD + AE + BC + BD + BE.$$

7. На плосости даны векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, сумма которых равна $\mathbf{0}$. Докажите, что

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| + |\mathbf{d}| \ge |\mathbf{a} + \mathbf{d}| + |\mathbf{b} + \mathbf{d}| + |\mathbf{c} + \mathbf{d}|.$$

8. На плоскости даны n красных и n синих точек. Докажите, что сумма попарных расстояний между точками одного цвета не превосходит суммы расстоений между точками разных цветов.

9. Пусть d – сумма длин диагоналей, а p – периметр плоского выпуклого $n-$угольника ($n > 3$). Докажите, что

$$n - 3 < \frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right] - 2.$$

10. Многогранник с m вершинами расположен внутри многогранника с n вершинами. Докажите, что отношение суммы попарных расстояний между вершинами внутреннего к сумме попарных расстоянйи между вершинами внешнего не превосходит $\frac{m^2}{4(n-1)}$ при четном m и $\frac{m^2-1}{4(n-1)}$ при нечетном m.

11. Докажите, что сумма попарных углов между $2n$ лучами в пространстве не превосходит πn^2.

Серия 3. Производящие функции. Комбинаторные тождества.

Всюду в этой серии $p(n)$ обозначает количество разбиенйи целого неотрицательного числа n в сумму натуральных слагаемых без учета порядка.

1. Докажите, что количество способов разбить натуральное число в сумму нечетных слагаемых равно количеству способов разбить его же в сумму различных слагаемых.

2. Докажите, что

$$p(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sigma(k) p(n-k),$$

где $\sigma(k)$ – сумма делителей натурального числа k.

3. Найти сумму $\sum\limits_{i\in} C_n^{5i+3}$.

4. Докажите, что число целочисленных неотрицательных решений диофантова уравнения

$$x + 2y + 3z = n$$

есть ближайшее к $\frac{(n+3)^2}{12}$ целое число.

5. Автобусный билет состоит из шести цифр. Билет называется счастливым, если сумма трех первых цифр равна сумме трех последних (например, 020101). Докажите, что количество счастливых билетов равно

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin 10\varphi}{\sin\varphi}\right)^6 d\varphi.$$

6. Докажите, что сумма квадратов коэффициентов многочлена

$$P(x) = (x-1)^n(x+1)^m = \sum_{i=0}^{n+m} a_i x^i$$

равна $\dfrac{(2n)!(2m)!}{n!m!(n+m)!}$

7. Даны унитарные многочлены P и Q. Докажите, что сумма квадратов коэффициентов многочлена $P(x)Q(x)$ не меньше суммы квадратов свободных членов P и Q.

8. Докажите тождество

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{n+k+1} = \frac{n!\,n!}{(2n+1)!}.$$

9. Докажите, что для любого натурального числа N и любого действительного числа $\rho \in (0,1)$, найдется натуральное число $n \le N$ такое, что

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k}\rho^k(\rho-1)^{n-k} > 1 - \frac{20}{(N+1)^2}.$$

10. Докажите, что

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{k}]}(-1)^k C_n^{pk}$$

делится на p.

11. Докажите тождество

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_{2n-i}^{i} 4^{n-i} = 2n+1.$$

12. Пусть p — нечетное простое число. Найдите количество p—элементных подмножеств A множества $\{1, 2, \ldots 2p\}$ таких, что сумма всех элементов A делится на p.

13. Докажите, что если вершины правильного многоугольника разбиты в дизъюнктное объединение правильных многоугольников, то какие-то два из них имеют равное число сторон.

14. Докажите, что если натуральный ряд представлен в виде объединения арифметических прогрессий, то какие-то две из них имеют равную разность.

15. Для всех натуральных n докажите равенство

$$\sum \frac{1}{\left(\prod_{i=1}^{n} p_k!\right)\cdot k^{p_k}} = 1,$$

где суммирование производится по всем по всем наборам целых неотрицательных чисел $p = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ таких, что $\sum_{k=1}^{n} kp_k = n$.

16. Для натуральных n и k, $n \geq k$, обозначим $P_n^{(k)}$ количество разбиений числа n на k натураьлных слагаемых. Докажите, что для $n \geq 2k$

$$P_n^{(k)} = P_{n-1}^{(k-1)} + P_{n-k}^{(k)}.$$

17. Количество различных чмсел в некотором разбиении натурального числа n назовем *разбросом* этого разбиения. Докажите, что сумма $q(n)$ разбросов всех разбиений n равна $p(0)+p(1)+\ldots+p(n-1)$.

18. Пусть $p_n(k)$ — число персетановок множества из n элементов ($n \geq 1$), имеющих ровно k неподвижных точек. Докажите, что:

а) $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) = n!$

б) $\sum\limits_{k=0}^{n} (k-1)^2 p_n(k) = n!$.

19. Докажите *теорему Кэли*:

$$\sum_T \prod_{i=1}^{n} z_i^{\deg v_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} z_i\right) \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^{n-2},$$

где суммирование берется по всем деревьям T с помеченными числами $1, 2, \ldots, n$ вершинами степеней $v_1, v_2, \ldots, v_n$ соответственно.

20. Назовем конечную последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ p-уравновешенной, если все суммы вида $a_k + a_{k+p} + \ldots$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$ равны между собой. Докажите, что если 50-членная последовательность p—уравновешенна для $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$, то все ее члены равны нулю.

Серия 4, векторно-маразматическая.

Все разбиения подразумеваются в теоретико-множественном смысле.

1. Докажите, что

а) четырехугольник

б) треугольник

в) треугольник без точки

г) круг

д) плоскость

можно разбить на отрезки.

2. Докажите, что никакой выпуклый компакт на плоскости нельзя разбить на два равных подмножества.

3. Найдите все

а) конечные

б) компактные

множества M на плоскости такие, что серединный перпендикуляр к любому отрезку, соединяющему две точки M является осью симметрии M.

4. а) Пять отрезков таковы, что из любых трех можно составить треугольник. Докажите, что один из этих десяти треугольников остроугольный.

б) Девять отрезков таковы, что из любых трех можно составить треугольник. Докажите, что не менее 12 из них — остроугольные.

5. Точки $P_1, P_2, \ldots, P_{107}$ лежат на единичной окружности по одну сторону от некоторого диаметра. Докажите, что

$$|\overline{OP_1} + \overline{OP_2} + \ldots + \overline{OP_n}| \geq 1.$$

6. Точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ на единичной окружности таковы, что

$$\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \ldots + \overline{OA_n} = \mathbf{0}.$$

Докажите, что для любой точки плоскости M выполняется неравенство

$$MA_1 + MA_2 + \ldots + MA_n \geq n.$$

7. Дано восемь вещественных чисел a, b, c, d, e, f, g, h. Докажите, что одно из шести чисел $ac+bd$, $ae+bf$, $ag+bh$, $ce+df$, $cg+dh$, $eg+fh$ неотрицательно.

8. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ – векторы, длины которых не превосходят 1. Докажите, что в сумме $\mathbf{c} = \pm\mathbf{a}_1 \pm \mathbf{a}_2 \pm \ldots \pm \mathbf{a}_n$ можно выбрать знаки так, что $|\mathbf{c}| \leq \sqrt{2}$.

9. Докажите, что сумма квадратов попарных расстояний между n точками на единичной сфере не превосходит n^2.

10. $2n$-угольник $A_1A_2\ldots A_{2n}$ вписан в окружность с центром O и радиусом 1. Докажите, что

а) $|\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \cdots + \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}}| \leq 2$

б)

$$|\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \cdots + \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}}| \leq 2\sin\Big(\frac{1}{2}(A_1\widehat{O}A_2 + \ldots + A_{2n-1}\widehat{O}A_{2n})\Big).$$

11. На плоскости дано несколько векторов, сумма длин которых равна 1. Докажите, что их можно разбить на три группы (возможно, пустые) так, что сумма длин сумм векторов в этих группах будет больше $3\sqrt{3}/2\pi$.

Серия 5, про ширины и диаметры.

1. а) Найдите выпуклую фигуру максимального периметра данного диаметра.

б) Найдите фигуру максимальной площади данного диаметра.

2. Докажите, что ширина выпуклого $n-$угольника диаметра 1 не превосходит $\cos\frac{\pi}{2n}$.

3. Докажите, что у выпуклой фигуре площади $\frac{\pi}{4}$ существует хорда длины ≥ 1, делящая площадь пополам.

4. Выпуклую фигуру можно покрыть объединенем двух полос, одна из которых имеет ширину a, а другая – ширину b. Докажите, что ее можно покрыть одной полосой ширины $a+b$.

5. Пусть P – периметр (сумма длин ребер), а D — диаметр выпуклого многогранника. Докажите, что $P > 3D$.

6. Докажите, что количество диаметров n-точечного множества

а) на плоскости

б) в пространстве

не больше

а) n

б) $2n-2$.

7. На прямой дано n-точеченое множество диаметра 1. Каково наибольшее количество пар точек в этом множестве, расстояние между которыми равно фиксированному числу $a \in [0,1]$?

8. а) Докажите, что всякую ломаную длины 1 в пространстве можно поместить в шар диаметра 1.

б) Докажите, что всякую замкнутую ломаную длины 1 в пространстве можно поместить в шар диаметра 1/2.

9. а) Докажите, что множество на плоскости диаметра 1 можно поместить в правильный шестиугольник со стороной $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

б) Докажите, что любое множество на плоскости диаметра 1 можно разбить на три части меньшего диаметра.

в) Докажите, что круг нельзя разбить на две части меньшего диаметра.

10. Докажите, что отношение наибольшего из расстояний между n точками на плоскости к наименьшему не меньше

а) $\frac{\sqrt{n}-1}{2}$

б) $\sqrt{3}\frac{\sqrt{n}-1}{2}$.

11. Назовем *аффинным диаметром* выпуклого тела в ^{n} хорду, через концы которой можно провести параллельные опорные гиперплоскости. Докажите, что существует

а) аффинный диаметр, параллельный данной прямой

б) аффинный диаметр, проходящий через данную точку внутри тела

в) аффинный диаметр, проходящий через данную точку вне тела.

12. В выпуклом многоугольнике нет параллельных сторон. Для каждой стороны рассмотрим угол, под которым она видна из наиболее удаленной от прямой, содержащей эту сторону, вершину. Докажите, что сумма этих углов равна π.

13. На плоскости дан выпуклый $n-$угольник. Пусть a_k — длина его $k-$ой стороны, а d_k — длина его проекции на прямую, содержащую эту сторону. Докажите неравенство

$$2 < \frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \ldots + \frac{a_n}{d_n} \leq 4.$$

14. Докажите, что на поверхности выпуклого тела найдутся такие четыре точки, что тело лежит по одну сторону от каждой из четырех плоскостей, проходящих через одну из этих точек и параллельной плоскости, содержащей другие три.

15. Докажите, что $2n-$угольник минимального диаметра данной площади имеет две перпендикулярные диагонали.

Серия 6, простая техническая.

Если не оговорено противное, то a, b, c — стороны, α, β, γ — углы, m_a, m_b, m_c — медианы, l_a, l_b, l_c — биссектрисы, h_a, h_b, h_c — высоты, S — площадь, p — полупериметр, R, r, r_a, r_b, r_c — радиусы описанной, вписанной и трех вневписанных окружностей, O, I, I_a, I_b, I_c — центры тех же окружностей, H — ортоцентр, M — центр тяжести треугольника ABC.

1. Докажите неравенства:
а) $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq 27R^2/4$
б) $l_a + l_b + l_c \leq \sqrt{3}p$
в) $\frac{9r}{2S} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{9R}{4S}$
г) $\frac{r_a}{h_a} + \frac{r_b}{h_b} + \frac{r_c}{h_c} \geq 3$
д) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq 3\sqrt{3}/2$
е) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$
ж) $a^2 + b^2 + c^2 - (a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2 \geq 4\sqrt{3}S$

2. Докажите неравенства для отроугольного треугольника ABC:
а) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \geq 3\sqrt{3}$
б) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos\alpha\cos\beta + \cos\beta\cos\gamma + \cos\gamma\cos\alpha \leq 3/2$
в) $\frac{m_a}{h_a} + \frac{m_b}{h_b} + \frac{m_c}{h_c} \leq 1 + \frac{R}{r}$.

3. Докажите, что если в остроугольном треугольнике $h_a = l_b = m_c$, то этот треугольник равносторонний.

4. Докажите неравенство

$$\frac{\pi}{3} \leq \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a+b+c} \leq \frac{\pi}{2}.$$

5. Пусть $A_1A_2A_3A_4$ — тетраэдр, G — его центр масс, A_1', A_2', A_3', и A_4' — точки пересечения описанной сферы с лучами A_1G, A_2G, A_3G и A_4G соответственно. Докажите неравенства

$$GA_1 \cdot GA_2 \cdot GA_3 \cdot GA_4 \leq GA_1' \cdot GA_2' \cdot GA_3' \cdot GA_4'$$

и

$$\frac{1}{GA_1'} + \frac{1}{GA_2'} + \frac{1}{GA_3'} + \frac{1}{GA_4'} \leq \frac{1}{GA_1} + \frac{1}{GA_2} + \frac{1}{GA_3} + \frac{1}{GA_4}.$$

6. Пусть ABC — остроугольный треугольник, AO пересекает описанную окружность треугольника BOC второй раз в точке A', BO пересекает опсианную окружность треугольника COA второй раз в точке B', CO пересекает описанную окружнсоть треугольника AOB второй раз в точке C'. Докажите неравенство

$$OA' \cdot OB' \cdot OC' \geq 8R^3.$$

Серия 7, продолжающая предыдущую, но похитрее.

1. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник. Докажите, что

$$|AB - CD| + |BC - DA| \geq 2|AC - BD|.$$

2. Точка M лежит внутри треугольника ABC. Обозначим расстояния от M до вершин A, B, C и прямых, содержащих стороны BC, CA, AB соответственно через R_a, R_b, R_c и d_a, d_b, d_c. Докажите неравенства:

а) $R_aR_bR_c \geq 8d_ad_bd_c$

б) $R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c)$ (неравенство *Эрдеша-Морделла*)

в) $2(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c}) \leq \frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c}$

г) Докажите, что если R_a, R_b, R_c, R_d — расстояния от точки внутри тетраэдра до его вершин, а d_a, d_b, d_c, d_d — до плоскостей граней, то $R_aR_bR_cR_d \geq 81d_ad_bd_cd_d$.

3. Внутри правильного треугольника ABC взята точка O так, что $OA + OB < 3 \cdot OC$. Докажите, что

$$3\sqrt{3}(\operatorname{ctg}(BOC/2) + \operatorname{ctg}(AOC/2)) + \operatorname{ctg}(AOC/2)\operatorname{ctg}(BOC/2) > 5.$$

4. Докажите, что если α_1, β_1, γ_1 — углы некоторого треугольника, то

$$\frac{\cos\alpha_1}{\sin\alpha} + \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta} + \frac{\cos\gamma_1}{\sin\gamma} \leq \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma.$$

5. а) Докажите неравенство

$$(2a + 2b - c)(2b + 2c - a)(2c + 2a - b) > 25abc.$$

б) Из медиан остроугольного треугольника составлен другой треугольник. Пусть R и R_m — радиусы их описанных окружностей. Докажите, что $R_m > 5/6R$.

6. Докажите неравенство $ab \geq 4rR$.

7. Пусть $\triangle ABC$ — равносторонний треугольник, P — точка внутри него. Пусть лучи AP, BP, CP пересекают стороны BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Докажите, что

$$A_1B_1 \cdot B_1C_1 \cdot C_1A_1 \geq A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A.$$

8. Пусть $ABCDEF$ — выпуклый шестиугольник, имеющий три пары параллельных сторон. Пусть R_A, R_C, R_E — радиусы описаных окружностей треугольников FAB, BCD, DEF соответственно, а P — периметр шестиугольника. Докажите неравенство

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{P}{2}.$$

9. В треугольнике ABC на сторонах AB, $BC\,CA$ выбраны точки M, K, L соответственно. На сторонах треугольника MKL выбраны точки R, F, N (R — на стороне MK, F — на KL, N — на ML. площади треугольников AMR, CRK, BNM, CNL, BKF, AFL, ABC обозначим соответственно через S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S. Докажите, что

$$\left(\prod_{i=1}^{6} S_i\right)^{1/6} \leq \frac{1}{8}S.$$

10. Пусть точка O внутри треугольника ABC такова, что $\overline{OK} + \overline{OL} + \overline{OM} = 0$, где K, $L\,M$ — основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны AB, $BC\,CA$ соответственно. Докажите, что

$$\frac{OK + OL + OM}{AB + BC + CA} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

11. На плоскости имеются семь окружностей ω, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ радиусов R, R_1, $R_2, \ldots, R_6$ соответственно. При этому окружность ω касается всех остальных внешним образом, точки касания ее с

окружностями $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6$ расположены против часовой стрелки; а пары ω_1 и ω_2, ω_2 и ω_3, ..., ω_6 и ω_1 касаются друг друга внешним образом. Докажите неравенство

$$\frac{6}{\sum\limits_{i=1}^{6} \frac{1}{R_i}} \leq R \leq \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} R_i.$$

12. AB — наименьшая сторона остроугольного треугольника ABC. На стороноах BC и AC выбраны точки X и Y соответственно. Докажите, что длина ломаной $AXYB$ не меньше удвоенной длины AB.

Серия 8, более комбинаторная.

1. Дан треугольник ABC со сторонами 2, 3, 4. Имеющийся треугольник PQR разрешается заменить на треугольник P_1QR, если точки P_1, P, Q лежат на одной прямой и $RP = RP_1$. Докажите, что путем таких операций нельзя получить треугольник площади большей, чем $\frac{16\sqrt{3}}{5}$.

2. Внутри куба со стороной 1 находится несколько треугольников суммарной площадью 13. Докажите, что найдется прямая, пересекающая не менее пяти треугольников.

3. Внутри единичного квадрата расположен выпуклый $n-$угольник. Докажите, что какие-то три его вершины образуют треугольник площади не больше

а) $\frac{8}{n^2}$

б) $\frac{16\pi}{n^3}$.

в) Внутри единичного куба расположен выпуклый n-вершинник. Докажите, что какие-то четыре его вершины образуют тетраэдр объема $\leq \frac{100}{n\sqrt{n}}$.

4. Докажите, что в любой выпуклый многоугольник площадью 1 можно поместить треугольник площадью 3/8, одна из сторон которого горизонтальна.

5. Можно ли в единичном квадрате отметить n точек так, что все треугольники с вершинами в этих точках будут иметь площадь $> \frac{1}{10n^2}$?

6. Докажите, что площадь выпуклого $n-$угольника, все вершины которого лежат в целых точках, не меньше $\frac{n^3}{1000}$.

7. Существует ли в пространстве множество точек такое, что каждая плоскость пересекает его по непустому конечному множеству точек?

8. Множество M состоит из n точек плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Для каждого треугольника с вершинами из M подсчитали количество точек M внутри него. Докажите, что среднее арифметическое всех найденных чисел не превосходит $n/4$.

9. 21 девочка и 21 мальчик решали задачи. Никто не решил более 6 задач, но для каждого мальчика и каждой девочки найдется задача, которую они оба решили. Докажите, что некоторую задачу решили не менее трех мальчиков и не менее трех девочек.

10. 999 непересекающихся отрезков с концами в вершинах правильного 1998-угольника разбивают эти вершины на пары. Докажите, что на отрезках можно так расставить стрелки, что сумма полученных векторов будет равна нулю.

11. Часть подмножеств конечного множества выделена. Каждое выделенное подмножество состоит в точности из $2k$ (k — фиксированное натуральное число). Известно, что в каждом подмножестве, состоящем не более, чем из $(k+1)^2$ элементов, либо не содержится выделенных подмножеств, либо все содержащиеся в нем выделенные подмножества имеют общий элемент. Докажите, что все выделенные подмножества имеют обший элемент.

Серия 9, еще более комбинаторная.

1. Докажите, что существует натуральное K такое, что из любых K точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно выбрать 100 точек, являющихся вершинами выпуклого 100-угольника.

2. Докажите, что на плоскости можно так расположить 2^{n-1} точек так, что никакие три не будут коллинеарны, и никакие $2n$ не будут вершинами выпуклого $2n$-угольника.

3. Существуют ли на плоскости два непересекающихся бесконечных множества A и B такие, что выполняются два условия:

(i) Никакие три точки $M := A \cup B$ не лежат на одной прямой, а расстояние между любыми двумя точками M не меньше 1.

(ii) Любой треугольник с вершинами из A содержит точку из B, а любой треугольник с вершинами из B содержит точку из A?

4. а) Прямоугольник с целыми сторонами можно разрезать на полоски $1 \times n$. Докажите, что одна из его сторон делится на n.

б) Прямоугольник можно разрезать на полоски, одна из сторон каждой из которых равна 1. Докажите, что одна из сторон прямоугольника имеет целую длину.

5. Можно красить на белой доске $n \times n$ клетки в красный цвет по одному из следующих правил:

1°. Покрасить белые клетки (i, j) и $(i + 1, j + 1)$

2°. Покрасить белые клетки (i, j) и $(i, j + 2)$

3°. Покрасить белые клетки (i, j) и $(i + 2, j)$

4°. Покрасить белые клетки (i, j), $(i + 1, j)$ и $(i, j + 1)$.

При каких n можно закрасить всю доску?

6. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько камней (возможно, по нескольку в одной клетке). Разрешается выполнять следующие действия:

1°. Снять по одному камню с клеток $n - 1$ и n и положить один камень в клетку $n + 1$.

2°. Снять два камня с клетки n и положить по одному камню в клетки $n + 1$, $n - 2$.

Докажите, что при любой последовательности действий мы достигнем ситуации, когда указанные действия выполнять больше нельзя, и эта ситуация не зависит от последовательности действий (а зависит только от начальной раскладки камней по клеткам).

7. Функция $f : {}^2 \to$ такова, что для любого правильного $n-$угольника $A_1A_2 \ldots A_n$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n} f(A_i) = 0.$$

Докажите, что $f \equiv 0$.

8. Назовем *последовательностью типа Фибоначчи* рекуррентную последовательность, заданную соотношением $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n \geq 1$ и начальными членами a_0, a_1. Можно ли разбить натуральный ряд в объединение

а) конечного

б) бесконечного

числа последовательностей типа Фибоначчи?

Серия 10. Геометрия типа чисел.

1. Докажите *теорему Минковского*: выпуклое центрально-симметричное множество в ^{n} с центром в нуле объема, большего 2^n, содержит целую точку, отличную от нуля.

2. Докажите следующие *теоремы Бликфельда:*

а) если объем множества в ^{k} больше n, то его можно параллельно перенести так, что оно покроет хотя бы $n + 1$ целую точку.

б) если объем множества в ^{k} меньше 1, то его можно параллельно перенести так, что оно не будет содержать ни одной целой точки.

3. Несколько точек на плоскости расположены так, что расстояние между любыми двумя из них больше 2. Докажите, что любое множество площади меньше π можно параллельно перенести на вектор длины меньше 1 так, чтобы оно не содержало ни одной из точек.

4. В целых точках написаны вещественные числа. Дано центрально-симметричное относительно начала координат конечное множество целых точек A, $O \notin A$. Докажите, что существует целая точка X такая, что в множестве $A + \overline{OX}$ хотя бы половина чисел не меньше числа, написанного в X.

5. В целых точках написаны вещественные числа. Дано два конеченых множества целых точек. Известно, что при любом параллельном переносе первого множества сумма чисел в нем оказывается

положительной. Докажите, что в некотором параллельном переносе второго множества сумма чисел также положительна.

6. Докажите, что сумма Минковского двух выпуклых многоугольников, имеющих m и n сторон соответственно имеет не более $m+n$ сторон.

7. Назовем *многоугольником Ньютона* многочлена $P(x,y) = \sum\limits_{0\le k,l\le N} a_{kl}x^k y^l$ выпуклую оболочку точек $\{(k,l)\in {}^2 : a_{kl}\neq 0\}$. Докажите, что многоугольник Ньютона произведения двух многочленов — это сумма Минковского многоугольников Ньютона самих многочленов.

8. O — точка внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ площади S. K, L, M, и N — внутренние точки сторон AB, BC, CD и DA соответственно. Дкажите, что если $OKBL$ и $OMDN$ — параллелограммы, то $\sqrt{S}\ge\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}$, где S_1 и S_2 — площади четырехугольников $ONAK$ и $OLCM$ соответственно.

9. На доске написаны числа $0, 1, \sqrt{2}$. Разрешается к любому из этих чисел прибавлять разность двух других, умноженную на произвольное рациональное число. Можно ли такими операциями получить числа 0, 2, $\sqrt{2}$?

10. Дано N точек в ^{n}, не лежащих в одной гиперплоскости. При каком наибольшем N возможно, что через любые две из них проходят параллельные опорные гиперплоскости к выпуклой оболочке этих точек?

11. На листе клетчатой бумаги нарисована несамопересекающаяся замкнутая ломаная, не проходящая через узлы сетки. В области, ограниченной ломаной, лежит не менее 91 узла. Докажите, что ломаная пересекает линии сетки по крайней мере в 40 точках.

12. На листе клетчатой бумаги рисуют выпуклый 50-угольник с вершинами в узлах сетки. Какое наибольшее число диагоналей этого 50-угольника может идти по линиям сетки?

Серия 11, линейно-метрическая.

1. Сколько базисов в пространстве F^n, где F — поле из p элементов?

2. а) Дано $n+1$ трехэлементное подмножество множества из n элементов. Докажите, что пересечение каких-то двух из них состоит из одного элемента.

б) Дано $n+1$ подмножество множества из n элементов, каждое из которых состоит из нечетного числа элементов. Докажите, что пересечение некоторых двух из них также состоит из нечетного числа элементов.

3. а) Во всех клетках шахматной доски размером 8×8 стоят знаки “$+''$ или “$-''$. Разрешается, выделив на доске любой квадрат размером 3×3 или 4×4, поменять знаки во всех клетках этого квадрата. Мы хотим при помощи подобных операций добиться того, чтобы все стоящие на доске знаки стали знаками ”$+$”; всегда ли это возможно?

б) Во всех клетках (обыкновенной) шахматной доски стоят натуральные числа; разрешается увеличивать на единицу все числа, стоящие в клетках любого “малого” квадрата из четырех соседних клеток доски, или все числа, стоящие в (любых) двух соседних строках доски, или, наконец, все числа, стоящие в двух (любых) соседних столбцах доски. Всегда ли подобными операциями можно добиться того, чтобы все числа доски делились на 10?

4. 24 студента решали 25 задач. У преподавателя есть таблица 24×25, в которой записано, кто какие задачи решил. Оказалось, что каждую задачу решил хотя бы один студент. Докажите, что

а) можно отметить некоторые задачи “галочкой” так, что каждый из студентов решил четное число (в частности, быть может, нуль) из отмеченных задач;

б) можно отметить некоторые из задач знаком “+”, а некоторые из остальных - знаком“-” и приписать каждой задаче некоторое целое положительное число баллов так, что каждый студент набрал поровну баллов за задачи, отмеченные знаками “+” и “-”.

5. Участникам тестовой олимпиады было предложено n вопросов. Жюри определяет сложность каждого из вопросов: целое число баллов, получаемых участниками за правильный ответ на вопрос. За неправильный ответ начисляется 0 баллов, все набранные участниками баллы суммируются. Когда все участники сдали листки со своими ответами, оказалось, что жюри может так определять сложность вопросов, чтобы места между участниками распределялись любым наперед заданным образом.

При каком наибольшем числе участников это могло быть?

6. Пусть $n = 2k - 1$, $k \geq 6$ – целое число. Рассмотрим множество T всевозможных последовательностей длины n из нулей и единиц. Для двух таких последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ обозначим через $d(x, y)$ количество целых чисел j, для которых $x_j \neq y_j$. Предположим, что существует подмножество $S \subset T$ из 2^k последовательностей такое, что для любой последовательности $x \in T$ существует единственная последовательность $y \in S$, удовлетворяющая соотношению $d(x, y) \leq 3$. Докажите, что $n = 23$.

7. Докажите, что существует не более $\frac{2^n}{n+1}$ последовательностей длины n из нулей и единиц, любые две из которых отличаются по крайней мере в трех разрядах.

8. Построить пример метрического пространства M и двух его точек $x, y \in M$ таких, что $B(x, 3) B(y, 2)$, где через $B(z, r), z \in M, r \in {}_+$ обозначен замкнутый шар с центром в z радиуса r.

9. Докажите, что все нормы в конечномерном пространстве эквивалентны.

10. Докажите, что две нормы эквивалентны тогда и только тогда, когда они задают одну топологию.

Серия 12. Еще геометрические неравенства.

0. Докажите, что для всех натуральных k, n отношение $\frac{(k^n-1)(k^n-k)\ldots(k^n-k^{n-1})}{n!}$ является целым числом.

1. а) Докажите, что периметр остроугольного треугольника не меньше удвоенного диаметра описанной окружности.

б) Докажите, что сумма длин ребер тетраэдра, содержащего центр своей описанной сферы, не меньше утроенного диаметра описанной сферы.

2. Докажите, что для тетраэдра выполняется неравенство

а) $R \geq 3r$

б) $R^2 \geq 9r^2 + O_1O_2^2$,

где R r — радиусы, а O_1 и O_2 — центры описанной и вписанной сфер соответственно.

3. Докажите, что для точки внутри единичного круга выполянется неравенство $\prod_{i=1}^{n} ZA_i \leq 2$, где $A_1A_2 \ldots A_n$ — вписанный в этот круг правильный n-угольник.

4. Докажите, что для любых точек A, B C D пространства выполняется *неравенство Птолемея* $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$.

5. Внутри треугольника ABC взята точка M. Докажите неравенство:

$$\frac{BM \times CM}{BA \times CA} + \frac{CM \times AM}{CB \times AB} + \frac{AM \times BM}{AC \times BC} \geq 1.$$

6. Даны две концентрические окружности радиусов R_1 и R соответственно, $R_1 > R$. В меньшую вписан четырехугольник $ABCD$, в большую — $A_1B_1C_1D_1$, причем A_1 лежит на луче AB, B_1 — на луче BC, C_1 — на луче CD, D_1 — на луче DA. Докажите, что

$$\frac{S(A_1B_1C_1D_1)}{S(ABCD)} \geq \frac{R_1^2}{R^2},$$

где через $S(F)$ обозначается площадь четырехугольника F.

7. На плоскости дана точка O и многоугольник (не обязательно выпуклый). Пусть P обозначает периметр , D — сумму расстояний от точки O до вершин , а H — сумму расстояний от O до прямых, содержащих стороны . Докажите, что $D^2 - H^2 \geq P^2/4$.

8. Среди всех n-угольников, вписанных в данную окружность найдите n-угольник

а) максимальной площади

б) максимального периметра

9. Среди всех n-угольников, описанных вокруг данной окружности найдите n-угольник

а) минимальной площади

б) минимального периметра.

10. Докажите, что для точки M внутри треугольника ABC выполняется неравенство

$$\min(MA,\ MB,\ MC) + MA + MB + MC \leq AB + BC + AC$$

11. Докажите, что из всех выпуклых четырехугольников с данными длинами диагоналей и углом между ними наименьший периметр имеет параллелограм.

12. Пусть $ABCD$ – тетраэдр, в котором сумма любых двух противоположных ребер равна 1. Докажите, что

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 \le \frac{\sqrt{3}}{3},$$

где r_1, r_2, r_3, r_4 – радиусы окружностей, вписанных в грани тетраэдра.

Серия 13. То же, графы.

1. Докажите, что среди любых четырех вещественных чисел найдутся два таких числа x, y, что $|\frac{x-y}{1+xy}| \le 1$

2. Докажите, что для любых положительных чисел a, $b\,c$ справдливо неравенство

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \ge \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

3. а) На сторонах AB и AC правильного треугольника ABC взяты точки P и Q соответственно. Докажите, что из отрезков PQ, CP, BQ можно составить треугольник.

б) На гранях ABC и ABD тетраэдра $ABCD$ выбраны точки P и Q соответственно. Докажите, что из отрезков CQ, $QP\,PD$ можно составить треугольник.

4. Докажите, что в любом тетраэдре выполняется неравенство

$$r < \frac{ab}{2(a+b)},$$

где a и b — длины скрещивающихся ребер, r — радиус вписанного шара.

5. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle AXY = 2\angle ACB$, $\angle CYX = 2\angle BAC$. Докажите неравенство

$$\frac{S(AXYC)}{S(ABC)} \le \frac{AX^2 + XY^2 + YC^2}{AC^2}$$

($S(F)$ — площадь многоугольника F).

6. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M. P и Q — центры описанных окружностей треугольников AMB и CMD соответственно. Докажите, что $AB+CD \le 4PQ$.

7. Для любых трех точек P, Q, R плоскости обозначим через $m(PQR)$ наименьшую высоту треугольника PQR (если P, $Q\,R$ лежат на одной прямой, то $m(PQR) = 0$). Докажите, что для любых точек A, B, C, X имеет место неравенство

$$m(ABC) \le m(ABX) + m(BCX) + m(CAX).$$

8. Внутри правильного $2n$-угольника с центром O расположен правильный $2n$-угольник с вдвое меньшей строной. Докажите, что меньший $2n$-угольник покрывает центр большего.

9. Две пирамиды имеют общее основание, являющееся выпуклым многоугольником, причем одна лежит внутри другой. Докажите, что сумма плоских углов при вершине внешней пирамиды меньше, чем при вершине внутренней.

10. В связном бесконечном графе степени всех вершин конечны. Докажите, что найдется

а) сколь угодно длинный путь

б) бесконечный путь.

11. Все грани выпуклого многогранника — треугольники. Докажите, что его ребра можно покрасить в синий и голубой цвет так, что между двумя любыми вершинами будет как путь, проходящий только по синим ребрам, так и путь, проходящий только по голубым ребрам.

12. Докажите, что в любой компании, состоящей из четного числа людей, найдутся два человека, у которых в этой компании четное число общих знакомых.

Серия 14, вызванная сложившейся геополитической обстановкой.

1. На плоскости дан выпуклый n-угольник P, ограничивающий площадь меньше 1. Для каждой точки X на плоскости определяется величина $F(X)$, равная площади объединения всевозможных отрезков, соединяющих X с точками многоугольника (площадь *выпуклой оболочки*). Докажите, что множество точек X, для которых $F(X) = 1$, является выпуклым многоугольником с не более чем $2n$ сторонами.

2. Диаметры двух выпуклых многоугольников не превосходят 1, а расстояние от любой вершины первого до любой вершины второго больше $1/\sqrt{2}$. Докажите, что многоугольники не имеют общих внутренних точек.

3.Даны многоугольник, прямая l и точка P на прямой l в общем положении (то есть все прямые, содержащие стороны многоугольника, пересекают l в различных точках, отличных от P). Отметим те вершины многоугольника, для каждой из которых продолжения выходящих из нее сторон многоугольника пересекают l по разные стороны от точки P. Докажите, что точка P лежит внутри многоугольника тогда и только тогда, когда по каждую сторону от l отмечено нечетное число вершин.

4. В тетраэдр $ABCD$, длины всех ребер которого не более 100, можно поместить две непересекающиеся сферы диаметра 1. Докажите, что в него можно поместить одну сферу диаметра 1,01.

5.Дан выпуклый n-угольник ($n > 3$), никакие четыре вершины которого не лежат на одной окружности. Окружность, проходящую через три вершины многоугольника и содержащую внутри себя остальные его вершины, назовем описанной. Описанную окружность назовем граничной, если она проходит через три последовательные вершины многоугольника, описанную окружность назовем внутренней, если она проходит через три вершины, никакие две из которых не являются соседними. Докажите, что граничных окружностей на две больше, чем внутренних.

6. а) Выпуклый многоугольник переходит в себя при повороте на $\pi/2$. Докажите, что отношение радиусов его описанного и вписанного кругов не превосходит $\sqrt{2}$.

б) Выпуклый многоугольник переходит в себя при повороте на угол $\alpha(0 < \alpha < \pi)$. Докажите, что отношение радиусов его описанного и вписанного кругов не превосходит 2.

7. Докажите, что три выпуклых многоугольника нельзя пересечь одной прямой тогда и только тогда, когда каждый многоугольник можно отделить от двух других прямой (то есть существует прямая такая, что этот многоугольник и два других лежат по разные ее стороны).

8. На плоскости нарисовано некоторое семейство S правильных треугольников, получающихся друг из друга параллельными переносами так, что любые два треугольника пересекаются. Докажите, что найдутся три точки такие, что любой треугольник семейства S содержит хотя бы одну из них.

9. На плоскости даны два таких конечных набора выпуклых многоугольников P_1 и P_2, что любые два многоугольника из разных наборов имеют общую точку, и в каждом из двух наборов P_1 и P_2 есть пара непересекающихся многоугольников. Докажите, что существует прямая, пересекающая все многоугольники обоих наборов.

10. ABC — остроугольный треугольник, O — центр его описанной окружности, P — основание высоты из вершины A. Докажите, что если $\angle BCA \geq \angle ABC + \pi/6$, то $\angle CAB + \angle COP < \pi/2$.

11. I — центр вписанной окружности треугольника ABC, K, L, M — никакие не авиалинии, а точки касания вписанной окружности со сторонами BC, CA, AB соответственно. Прямая, проходящая через B параллельно MK пересекает прямые LM и LK в точках R и S соответственно. Докажите, что $\angle RIS$ острый.

12. На плоскости расположено $2n + 1$ прямых. Докажите, что существует не более $n(n + 1)(2n + 1)/6$ различных остроугольных треугольников, стороны которых лежат на этих прямых.

13. Набор геометрических фигур состоит из красных правильных треугольников и синих четырехугольников, все углы которых больше 80°, но меньше 100°. Из фигур этого набора сложили выпуклый многоугольник, все углы которого больше 60°. Докажите, что число (целиком) красных сторон этого многоугольника делится на 3.

14. Выпуклый многоугольник разбит на параллелограммы. Вершину многоугольника, принадлежащую только одному параллелограмму, назовем хорошей. Докажите, что хороших вершин не менее трех.

Серия 15. Графы.

1. Докажите *теорему Кенига*: если прямоугольная матрица составлена из нулей и единиц, то минимальное число линий (строк и столбцов), которые содержат все единицы, равно максимальному числу единиц, которые могут быть выбраны так, чтобы никакие две из них не лежали на одной и той же линии.

2. Множество X разбито на попарно непересекающиеся подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_n$, а также разбито на попарно непересекающиеся подмножества $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Известно, что объединение любых двух непересекающихся подмножеств A_i, B_j $(1 \leq i, j \leq n)$ содержит не менее n элементов. Докажите, что число элементов множества X не меньше $n^2/2$.

3. На каждом поле таблицы размером $n \times n\, (n \geq 2)$ стоит некоторая буква. Известно, что все строки таблицы различны. Докажите, что в таблице есть столбец, после удаления которого все строки останутся попарно различными.

4. В каждой клетке шахматной доски написано положительное число так, что в каждой горизонтали сумма чисел равна 1. Известно, что при любой расстановке восьми не бьющих друг друга ладей на доске произведение чисел под ними не больше произведения чисел на главной диагонали. Докажите, что сумма чисел на главной диагонали не меньше 1.

5. Даны k мальчиков и $2k-1$ конфета. Докажите, что можно дать каждому мальчику по конфете так, чтобы мальчику, которому не нравится его конфета, не нравились и конфеты остальных мальчиков.

6. Клетки шахматной доски $n \times n$ расскрашены $n^2/2$ красками так, что каждой краской покрашено ровно две клетки. Докажите, что можно так расставить на доске n не бьющих друг друга ладей, чтобы они стояли на клетках n различных цветов и не били друг друга.

7. а) В городе Незнакомске живут $3n$ человек, причем любые двое имеют общего знакомого. Докажите, что можно указать n человек таким образом, чтобы каждый из остальных был знаком хотя бы с одним человеком из этих n.

б) В городе Незнакомске миллион жителей, причем любые двое имеют общего знакомого. Докажите, что можно указать 5000 человек таким образом, чтобы каждый из остальных был знаком хотя бы с одним человеком из этих 5000.

8. В прямоугольной таблице строк больше, чем столбцов, а в некоторых клетках стоят звездочки. Докажите, что есть звездочка, в строке которой стоит меньше звездочек, чем в ее столбце.

9. На балу встретились юноши и девушки, причем их было поровну. Каждый юноша знаком с 7 девушками. Известно, что они могут танцевать вальс так, что танцующие в паре будут знакомы между собой. Докажите, что они могут таким образом разбиваться на пары не менее, чем 5000 способами.

10. В стране 2000 городов, каждые два из которых соединены дорогой. Строительные организации предтавили все возможные проекты введения одностороннего движения на всех дорогах. Министерство транспорта отвергло все проекты, не обеспечивавшие возможности добраться из любого города в любой другой. Докажите, что все же осталось более половины проектов.

11. В стране 1998 городов и из каждого осуществляются беспосадочные перелеты в три других города. Известно, что из любого города, сделав несколько пересадок, можно делететь до любого другого. Министерство Безопасности хочет объявить закрытыми 200 городов, никакие два из которых не соединены авиалинией. Докажите, что это можно сделать так, чтобы можно было долететь из любого незакрытого города в любой другой, не делая пересадок в закрытых городах.

Серия 16. Разное.

1. Можно ли отметить на плоскости 35 прямых и 35 точек так, чтобы через каждую отмеченную точку проходило ровно четыре отмеченные прямые, а на каждой отмеченной прямой лежало ровно четыре отмеченных точки?

2. В стране 21 город. Авиационное сообщение между ними осуществляют несколько авиакомпаний, каждая из которых обслуживает 10 беспосадочных авиалиний, связывающих попарно некоторые пять городов (при этом между двумя городами могут летать самолеты нескольких компаний). Каждые два города связаны по крайней мере одной беспосадочной авиалинией. При каком наименьшем количестве авиакомпаний это возможно?

3. Дано множество из 102 элементов. Можно ли в нем выбрать 102 17-элементных подмножества так, чтобы пересечение любых двух подмножеств содержало не более 3 элементов?

4. а) Докажите, что в n-вершинном графе без 4-циклов не более $\frac{1}{2}n(\frac{1}{2}+\sqrt{n-\frac{3}{4}})$ ребер.

б) Докажите, что для бесконечно многих существуют $n-$вершинные графы без 4-циклов, в которых не менее $n^{3/2}/2$ ребер.

5. Найдите наименьшее возможное количество ребер в $n-$вершинном графе, не содержащем реберно-пустых $k-$вершинных подграфов.

6. На плоскости расположено 100 точек так, что расстояние между любыми двумя из этих точек не превосходит 1. Любы две из этих точек, удаленные друг от друга более чем на $\frac{1}{2\cos 36^\circ}$, соединяются отрезком. Докажите, что число проведенных отрезков не превосходит 3750.

7. Функция f определена на множестве натуральных чисел и удовлетворяет следующим условиям:
(i) $f(1)=1$;
(ii) $f(3)=3$;
(iii) $f(2n)=f(n)$;
(iv) $f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n)$;
(v) $f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n)$.
Найдите количество всех таких значений n, для которых $f(n)=n$ и $1\leq n\leq 1988$.

8. В квадрате 70×70 размещены без наложений пять фигур: квадрат 30×30, прямоугольники $\frac{25}{15}$ и 20×10 и два круга радиусами 5.

а) Докажите, что найдется место, чтобы, не сдвигая имеющиеся фигуры, разместить еще один круг радиусом 5

б) найдите индикатрису ширину отрезка

в) найдите индикатрису ширин прямоугольника

г) докажите, что открытый прямоугольник 25×35 покрывает не более четырех узлов квадратной решетки со стороной 20

д) докажите, что открытый квадрат 40×40 покрывает не более 5 узлов квадратной решетки со стороной 20

е) докажите, что в условиях пункта а) найдется место даже для двух кругов радиуса 5.

9. На плоскости расположены 100 точек. Докажите, что их можно покрыть системой кругов так, что сумма диаметров кругов системы будет меньше 100, а расстояние между любыми двумя точками разных кругов системы будет больше 1.