Математичка гимназија у Београду
Додатна настава, шк.г. 2004/05

Припремни задаци

предавач: Марко Радовановић

1. (M305.*) На тетивама AB и $A'B'$ круга изабране су редом тачке C и C' тако да се праве AA', BB' и CC' секу у једној тачки. Нека је $AP \cdot AP' = t$, $AC \cdot CB = s$, $A'C' \cdot C'B' = s'$, $CP = q$ и $C'P' = q'$. Доказати да је

$$\sqrt{\frac{s'}{s}} = \frac{q'}{q} = \frac{s' + (q')^2}{t} = \frac{t}{s + q^2}.$$

2. (M378.*) Доказати да постоји бесконачно много природних бројева који се не могу представити у облику $x_1^n + x_2^n + \cdots + x_n^n$, где су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ природни бројеви, за произвољан природан број n. Такође доказати да се сваки рационалан број може представити у облику $x^3 + y^3 + z^3$, где су x, y, z рационални бројеви.

3. (M423.*) Нека су x, y и z произвољни реални бројеви. Доказати да важи неједнакост

$$\prod_{sym} (x^2 + y^2 - z^2) \le \prod_{sym} (x + y - z)^2.$$

(Упоредити овај задатак са задатком за 2.раз на савезном 2003.)

4. (M490.) Дато је $p - 1$ целих бројева који нису дељиви са p, где је p непаран прост број. Доказати да неколико бројева овог скупа можемо заменити бројевима помноженим са -1, тако да је збир новодобијеног скупа дељив са p.

5. (M494.) У квадрату странице 1 дато је n^2 тачака. Доказати да постоји линија која садржи све тачке и чија је дужина мања од: (а) $3n$; (б)* $2n$.

6. (M532.) Нека су низови (a_n) и (b_n) дефинисани су са $a_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ и $b_n = \sqrt{4n+2}$. Доказати да је:
(а) $[a_n] = [b_n]$; (б) $0 < a_n - b_n < \dfrac{1}{16n\sqrt{n}}$.

7. (M666.) Доказати да је НЗС бројева $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ бар na_1.

8. (M852.) Нека су x, y и z странице неког троугла. Доказати да је

$$\left| \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} \right|$$

мање од: (а)1 ; (б)*1/8.

9. (M865.*) Доказати да за све природне бројеве $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ важи

$$\frac{1}{[a_0, a_1]} + \frac{1}{[a_1, a_2]} + \ldots + \frac{1}{[a_{n-1}, a_n]} \le 1 - \frac{1}{2^n}.$$

10. (M951.) Све странице конвексног шестоугла $ABCDEF$ су једнаке и једнаке 1. Доказати да је полупречник описане кружнице бар једног од троуглова $\triangle ACE$ и $\triangle BDF$ мањи од 1.

11. (M994.*) Наћи највеће реално k за које неједнакост

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \ge k(ab + bc + ca)^2$$

важи за свака три реална броја a, b, c.

12. (M1108.) У конвексном n-тоуглу ($n > 4$) никоје три дијагонале не пролазе кроз исту тачку. Колико се највише дијагонали може повући у њему тако да су све области на које оне разлажу n-тоугао троуглови?

13. (M1244.) У сенату је укупно 30 сенатора и свако се дружи са њих 6. Одредити број тројки сенатора таквих да се унутар тројке свака два сенатора или друже или се свака два не друже.

14. (M1267.) Нека је $a_1, a_2, \ldots, a_n$ једна пемутација бројева $1, 2, \ldots, n$ и нека је r_k остатак при дељењу броја $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ са n. Доказати да међу бројевима $r_1, r_2, \ldots, r_n$ има бар $\sqrt{n}$ (за $n > 2$) различитих.

15. (M1289.) Сума целих бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$ једнака је 1. За свако k између 1 и n са N_k означавамо број позитивних међу n сума $a_k, a_k + a_{k+1}, a_k + a_{k+1} + \ldots + a_n + a_1 + \ldots + a_{k-1}$. Доказати да су сви N_k различити.

16. (M1305.) Дата је $2n$ различитих природних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$. Таблица $n \times n$ попуњена је тако да се у пресеку i-те врсте и j-те колоне налази број $a_i + b_j$. Доказати да ако је производ бројева у свим колонама исти, тада је и производ бројева у свим врстама исти.

17. (M1307.) Доказати да за сваки природан број n број

$$2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$$

има бар n различитих простих делилаца.

18. (M1314.) Нека је $ABCD$ конвексни четвороугао чије се дијагонале секу у тачки O. Нека су P и Q центри описаних кругова троуглова ABO и CDO. Доказати да је $AB + CD \leq 4PQ$.

19. Да ли једначина $w^4 + x^7 + y^9 = z^{11}$ има решења у скупу природних бројева?

20. Нека су x и y природни бројеви такви да је $3x^2 + x = 4y^2 + y$. Доказати да је $x - y$ потпун квадрат.

21. Нека су KI и KN две тангенте из тачке K на круг k. M је произвољна тачка на подужетку KN (преко N), а P је друга пресечна тачка круга k и круга описаног око троугла KLM. Q је подножје нормале из N на ML. Доказати да је угао MPQ два пута већи од угла KML.

22. У троуглу ABC, B и C су оштри углови. Висина из темена A сече BC у тачки D. Симетрале углова B и C секу AD у тачкама E и F редом. Ако је $BE = CF$, доказати да је троугао ABC једнакокраки.

23. У равни је дато 7 тачака $P_0, \ldots, P_7$ и троугао $A_0A_1A_2$. За свако $0 \leq i \leq 5$, P_i и P_{i+1} су симетричне у односу на тачку A_k, где је k остатак при дељењу i са 3.
(а) Доказати да је $P_0 = P_7$;
(б) Наћи геометријско место тачака P_0 за које P_iP_{i+1} не сече унутрашњост троугла $A_0A_1A_2$ за $0 \leq i \leq 5$.

24. Нека је $ABCD$ тангентан четвороугао, чији су унутрашњи и спољашњи углови бар 60^o. Доказати да је

$$\frac{1}{3}|AB^3 - AD^3| \leq |BC^3 - CD^3| \leq 3|AB^3 - AD^3|.$$

Када се достиже једнакост.

25. Доказати да за сваки природан број n постоји n-тоцифрен природан број дељив са 5^n чије су све цифре непарне.

26. Нека је ABC, а AK, BL, CM његове висине које се секу у H (ортоцентар). Нека је P средиште AH. Ако се BH и MK секу у S, а LP и AM у T доказати да је TS нормално на BC.

27. Нека је $ABCD$ четвороугао и нека су P, Q, R, S редом средишта страница AB, BC, CD, DA. Нека се AB и CD секу у X, а AD и BC у Y. Доказати да троуглови XRP и YSQ имају исти ортоцентар акко је $ABCD$ тетиван.

28. Израчунати суму $S = \sum_{i=0}^{101} \dfrac{x_i^3}{1 - 3x_i + 3x_i^3}$, где је $x_i = \dfrac{i}{101}$, за $0 \leq i \leq 101$.