Pripreme za IMO 2004

1. Dokazati da se od $2n+1$ celih brojeva može izabrati n tako da suma odabranih brojeva bude deljiva sa n, dok isto ne važi za $2n$ brojeva.

2. Ako su $3n+1$ i $4n+1$ potpuni kvadrati za prirodni broj n, dokazati da $56|n$.

3. U grupi od n ljudi, za svaka sva čoveka A i B postoji jedinstveni prijatelj C koji poznaje i A i B, i ne postoji čovek koji poznaje sve ostale. Dokazati da svi ljudi imaju jednak paran broj poznanika. Poznanstvo je simetrična relacija.

4. Ako za nenegativne realne brojeve važi $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$, dokazati da je

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \ldots + \frac{1}{n-1+x_n} \leq 1$$

5. Neka je p prost broj i $a \neq b$, prirodni brojevi manji od p. Dokazati da jednačina $ax+by=p$ ima rešenja ako i samo ako su disjunktni skupovi: $\{\lfloor \frac{p}{a} \rfloor, \lfloor \frac{2p}{a} \rfloor, \ldots, \lfloor \frac{(a-1)p}{a} \rfloor\}$ i $\{\lfloor \frac{p}{b} \rfloor, \lfloor \frac{2p}{b} \rfloor, \ldots, \lfloor \frac{(b-1)p}{b} \rfloor\}$.

6. Naći sumu svih razlomaka $\frac{1}{xy}$, gde su x i y uzajamno prosti brojevi i važi $x \leq n$ i $y \leq n$ i $x+y > n$.

7. Dat je oštrougli trougao ABC. Pripisani krug iza AB (tangira AB i produžetke stranica CA i CB), dodiruje stranicu AB u tački P. Dokazati da je poluprečnik kruga koji dodiruje AP, CP i opisani krug oko trougla ABC jednak poluprečniku upisanog kruga u ABC.

8. Dat je niz polinoma, koji zadovoljava sledeće uslove:

$$P_1(x) = x^2 - 1,\ P_2(x) = 2x \cdot (x^2-1)$$

$$P_{n+1}(x) \cdot P_{n-1}(x) = (P_n(x))^2 - (x^2-1)^2$$

Neka je S_n suma apsolutne vrednosti svih koeficijenata u $P_n(x)$. Naći najveći stepen dvojke koji deli S_n.

9. Neka su a, b, c, stranice trougla ABC, a t_a, t_b, t_c težišne duži i R poluprečnik opisanog kruga. Dokazati nejednakost:

$$\frac{a^2+b^2}{t_c} + \frac{b^2+c^2}{t_a} + \frac{a^2+c^2}{t_b} \leq 12R$$

10. Iz skupa $M = \{1, 2, 3, \ldots, 2n, 2n+1\}$ je izdvojen maksimalni podskup A, koji ne sadrži tri elementa tako da je $a_i + a_j = a_k$, gde a_i, a_j, a_k mogu biti isti brojevi. Odrediti koliko elemenata ima skup A i sve mogućnosti za A.

11. Prirodni brojevi $1, 2, \ldots, n$ se pojavljuju po n puta u matrici $n \times n$. Pokazati da postoji kolona ili vrsta koja sadrži bar $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ različitih brojeva.

12. Dat je niz: $a_1 = 3$ i $a_{n+1} = \frac{3{a_n}^2+1}{2} - a_n$. Ako je n stepen 3, dokazati da je $n|a_n$.

13. Naći sve funkcije $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, tako da $f(f(x)+y) = xf(1+xy)$, za sve $x, y \in R^+$.

14. Dato je 9 karata na stolu, numerisanih od 1 do 9. Dva igrača naizmenično povlače poteze. Pobednik je onaj ko ima tri karte, koje u sumi daju 15. Da li neko od igrača ima pobedničku strategiju?

15. Izvršena je particija konveksnog mnogougla na 27 paralelograma. Dokazati da je moguće podeliti ovaj poligon na 21 paralelograma.

16. Neka je A konačan skup prirodnih brojeva. Dokazati da postoji konačan skup B prirodnih brojeva, tako da je $A \subseteq B$ i $\prod_{x \in B} x = \sum_{x \in B} x^2$.

17. Neka je ABC trougao i D i E tačke na stranicama AB i AC redom, tako da je DE paralelno sa BC. Neka je P tačka unutar trougla ADE i prave BP i CP seku DE u tačkama F i G, redom. Krugovi opisani oko trouglova PDG i PFE se seku u tačkama P i Q. Dokazati da su tačke A, P, Q kolinearne.

18. Ako je p neparan prost broj i a i b iz N. Rešiti jednačinu: $(p+1)^a - p^b = 1$.

19. Dato je $n > 3$ pravih u ravni, tako da se svake dve prave seku i nikoje tri prave se ne seku u jednoj tački. Dokazati da se medju delovima na koje one razlažu ravan nalazi bar
a) $\lfloor \frac{2n-2}{3} \rfloor$ trouglova
b) $n-2$ trouglova.

20. Pokazati da ako je $(xy+1)(yz+1)(xz+1)$ potpun kvadrat, onda su i $xy+1$, $yz+1$ i $xz+1$ potpuni kvadrati.