Matematička gimnazija u Beogradu
Dodatna nastava za II razred, šk.g. 2004/05

Razni zadaci

1. Naći sve parove prostih brojeva p, q takve da je

$$\frac{p^{2n+1}-1}{p-1}=\frac{q^3-1}{q-1},$$

za neki prirodan broj $n>0$.

2. Data je tablica $n\times n$ realnih brojeva različitih od 0. Neka je C_i zbir brojeva u i-toj koloni, a R_i zbir brojeva u i-toj vrsti. Dokazati da postoji uređen par (k,l) takav da je $a_{k,l}>0$, $R_l\geq 0$ i $C_k\geq 0$ ili $a_{k,l}<0$, $R_l\leq 0$ i $C_k\leq 0$.

3. Naći sve proste brojeve p takve da je

$$\frac{2^{p-1}-1}{p},$$

potpun kvadrat celog broja.

4. (Koreja 2001) Neka važi $a\geq b\geq c>0$ i $x\geq y\geq z>0$. Dokazati nejednakost

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)}\geq\frac{3}{4}.$$

5. Odrediti sve trojke (x,y,z) racionalnih brojeva za koje su $x+1/y$, $y+1/z$ i $z+1/x$ celi.

6. Dokazati da su središta visina trougla kolinearna akko je trougao pravougli.

7. Neka su $x_1,x_2,\ldots,x_n$ realni brojevi za koje važi

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2+x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=1.$$

Za dato k $(1\leq k\leq n)$ odrediti maksimalno x_k.

8. Dokazati da ako $p\mid a+b$ da tada $p^2\mid a^p+b^p$.

9. Naći sve parove prostih brojeva p i q takve da je

$$p^2-p+1=q^3.$$

10. Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao kod koga AB nije paralelno sa CD. Dalje, neka krug koji prolazi kroz A i B i dodiruje CD u P i krug koji prolazi kroz C i D i dodiruje AB u Q. Dokazati da zajednička tetiva ova dva kruga polovi PQ akko je AD paralelno sa BC.

11. Neka su a,b,c stranice trougla, m_a,m_b,m_c odgovarajuće težišne duži, a D dužina prečnika kruga opisanog oko $\triangle ABC$. Dokazati nejednakost:

$$\frac{a^2+b^2}{m_c}+\frac{b^2+c^2}{m_a}+\frac{c^2+a^2}{m_b}\leq 6D.$$

12. Dokazati da za svaki prost broj važi

$$1^{p-1}+2^{p-1}+\ldots+(p-1)^{p-1}\equiv p+(p-1)!\pmod{p^2}.$$

13. Dokazati da u svakom trouglu sa ortocentron H, centrom opisanog kruga S i težištem T, važi $\angle HST>90^\circ$.