Matematička gimnazija u Beogradu
Dodatna nastava za IV razred, šk.g. 2004/05

Razni zadaci

1. (19. IMO, predlog) Dokazati da za sve realne brojeve a, b, z važi:
$$(z+a)^n = z^n + a\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(a-kb)^{k-1}(z+kb)^{n-k}.$$

2. Dokazati da broj
$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1},$$
nije ceo ni za jedan prirodan broj n.

3. (BMO 2002, 4.zad) Naći sve funkcija $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ koje zadovoljavaju:
$$2n+2001 \leq f(f(n)) + f(n) \leq 2n+2002.$$

4. Naći maksimum izraza $a+b+c+abc$, ako je $a^2+b^2+c^2+abc \leq 4$.

5. Neka je $(a^2+b^2)^3 = c^2+d^2$, gde su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokazati da je
$$\frac{a^3}{c}+\frac{b^3}{d} \geq 1.$$

6. Unutar kvadrata stranice 1 dato je m tačaka. Dokazati da je površina njihovog konveksnog omotača ne veća od $\frac{16\pi}{m^3}$.

7. Naći sve proste brojeve p takve da je
$$\frac{2^{p-1}-1}{p},$$
potpun kvadrat celog broja.

8. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokazati da je
$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

9. Naći sve funkcije $f : [1, +\infty) \to [1, +\infty)$ koje zadovoljavaju $f(x) \leq 2(x+1)$ i $f(x+1) = \frac{f(x)^2-1}{x}$.

10. Data je tablica $n \times n$ realnih brojeva različitih od 0. Neka je C_i zbir brojeva u i-toj koloni, a R_i zbir brojeva u i-toj vrsti. Dokazati da postoji uređen par (k, l) takav da je $a_{k,l} > 0$, $R_l \geq 0$ i $C_k \geq 0$ ili $a_{k,l} < 0$, $R_l \leq 0$ i $C_k \leq 0$.

11. (Koreja 2001) Neka važi $a \geq b \geq c > 0$ i $x \geq y \geq z > 0$. Dokazati nejednakost
$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{3}{4}.$$

12. Neka je $q = \sqrt{a}+\sqrt{b}$ realan broj koji nije prirodan, a a i b prirodni. Dokazati da je $2g^3\{q\} > 3$.

13. Neka je $A(x)^p+B(x)^q+C(x)^r = 0$, za uzajamno proste (u parovima) polinome A, B, C i prirodne brojeve p, q, r. Dokazati da je $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} \leq 1$.

14. Neka su $S_1, S_2, S_3, \ldots$ skupovi celih brojeva takvi da nijedan prirodan broj nije sadržan u vše od jednog S_n; svaki od S_n ima tačno dva elementa; i suma elemenata skupa S_n je n. Dokazati da postoji beskonačno mnogo n kakvih da je jedan od elemenata S_n veći od $13n/7$.