Поставке домаћих задатака бр. 1-12

Додатна настава у Математичкој гимназији- **I** разред, школска 2004./05.
Координатор: Растко Маринковић

1.1. Доказати да једначина: $x^2 + y^3 = z^5$,има бесконачно много решења у $\mathbb{N}$.

1.2. Са неконвексним многоуглом $A_1A_2...A_n$ спроводимо следећу операцију: ако су A_i и A_j $(i < j)$ два несуседна темена и цео многоугао лежи са једне стране праве A_iA_j, онда контуру $A_iA_{i+1}...A_j$, између тачака A_i и A_j, замењујемо њеном централно симетричном сликом у односу на средиште дужи A_iA_j. Доказати да се после коначног броја ових корака, нужно добија конвексни многоугао.

1.3. Дато је 100 природних бројева, $a_1, a_2..., a_{100}$, од којих ниједан није већи од 100. Њихов збир једнак је 200. Доказати да се међу њима може изабрати неколико (може бити и само један) чији је збир једнак 100.

2.1. Симетрала угла у темену A паралелограма $ABCD$ сече праве BC и CD у тачкама K и L, респективно. Нека је O центар кружнице описане око $\triangle CKL$. Доказати да тачке D, B, C и O леже на истој кружници.

2.2. Доказати да за свако $k \in \mathbb{N}$, постоји k узастопних природних бројева $m, m+1, ..., m+k-1$, таквих да ни за једно $n = m, m+1, ..., m+k-1$ једначина $x^2 + y^2 = n$ нема решења у $\mathbb{N}$.

2.3. Дати су бројеви: $\binom{n}{k}$, $\binom{n+1}{k}$,...,$\binom{n+k}{k}$. Доказати да је њихов највећи заједнички делилац 1.

2.4. На колико се начина 2005 ученика могу распоредити у 5 учионица, тако да у свакој учионици буде бар по један ученик?

3.1. Доказати да је број $a_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + ... + \sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}$, ирационалан за свако $n \geq 2$.

3.2. Нека су $x_1, x_2, ..., x_n$, реални бројеви из интервала $[0, 1]$. Доказати да важи неједнакост:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n + 1)^2 \geq 4(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)$$

У ком случају важи једнакост?

3.3. Дата је кружница, њен пречник AB и тачка C на том пречнику. Конструисати на кружници две тачке X и Y, узајамно симетричне у односу на пречник AB, за које су праве YC и XA међусобно нормалне.

3.4. Кроз произвољну тачку P на страници AC троугла ABC, повучене су праве паралелне њеним медијанама AK и CL $(K \in BC, L \in AB)$, које секу странице BC и AB у тачкама E и F ,редом. Доказати да медијане AK и CL деле дуж EF на 3 једнака дела.

3.5. Наћи све природне бројеве које је могуће претставити као збир 2 или више узастопна природна броја.

3.6. Дат је скуп бројева $\{1, 2, 3, ..., 2004\}$. Колико најмање бројева треба одстранити из овог скупа, тако да се од преосталих бројева у скупу не може наћи ни један који је једнак производу нека друга два од преосталих бројева.

3.7. Да ли постоји пермутација бројева $1, 2, 3, ..., n$ таква да за било која два броја a_i, a_j, у њој, ниједан од бројева који се налази између њих није једнак њиховом полузбиру (тј. $\frac{a_i+a_j}{2}$)?

4.1. Доказати да се сваки природан број n може представити у облику:

$$n = c_1 \cdot 1^2 + c_2 \cdot 2^2 + ... + c_k \cdot k^2$$

,за неко $k \in \mathbb{N}$, при чему сви коефицијенти c_i $(i = 1, 2, ..., n)$ узимају вредности -1 или 1.

4.2. Конструисати троугао ако су дате 3 тачке у којима продужеци висине, симетрале угла и тежишне линије из темена A секу описани круг.

4.3. Нека су $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$ реални позитивни бројеви који задовољавају услове:
(1) $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$
(2) $b_1 + b_2 + ... + b_n = 1$, доказати да онда важи неједнакост:

$$\frac{b_1^2}{a_1} + \frac{b_2^2}{a_2} + ... + \frac{b_n^2}{a_n} \geq 1$$

5.1. У троугао ABC уписан је квадрат $MNPQ$, при чему темена M и N леже на страници BC, P на AC, а Q на AB. Доказати да за страницу квадрата MN важи процена:

$$r\sqrt{2} < MN < 2r$$

,где смо са r означили полупречник уписаног круга троугла ABC.

5.2. Дат је $\triangle ABC$ и тачка D унутар њега тако да су задовољене следеће неједнакости међу дужинама дужи: $AC - AD > 1$, и $BC - BD > 1$. Доказати да за произвољну тачку E на страници AB такође важи неједнакост $EC - ED > 1$.

5.3. Нека су α и β ирационални позитивни бројеви за које важи: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Доказати да се међу свим бројевима $[n\alpha]$ и $[m\beta]$ $(n, m \in \mathbb{N})$ сваки природан број појављује тачно један пут.

5.4. Нека је НЗД$(m, k) = 1$. Доказати да постоје цели бројеви $a_1, a_2, ...a_m$ и $b_1, b_2, ...b_k$ такви да сваки производ $a_i b_j (i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., k)$ даје различит остатак при дељењу са mk. Да ли тврђење важи ако m и k нису узајамно прости?

5.5. Доказати да се сваки ненегативан цео број може претставити, и то на јединствен начин, у облику $\frac{(x+y)^2+3x+y}{2}$, где су x и y ненегативни цели бројеви.

5.6. Тачке O и S су центри описаног, односно уписаног круга једнакокраког троугла ABC $(AB = BC)$. Кружнице описане око троуглова ABC и OSA секу се у тачкама A и D. Доказати да је права BD тангента на кружницу описану око $\triangle OSA$.

6.1. У фабрици је отворен конкурс за $n \geqslant 3$ радних места, која су рангирана од 1 до n у растућем поретку према плати. Имамо и n кандидата за те послове, који су рангирани од 1 до n у растућем поретку према квалификацијама. Кандидат i је квалификован за посао j ако и само ако $i \geqslant j$. Кандидати долазе на конкурс један по један у произвољном редоследу. Сваки кандидат када пристигне бива распоређен на највиши могући по рангу посао за који је квалификован и који је мањи по рангу од било ког до тада попуњеног радног места. (Дакле према таквој процедури оног тренутка када посао 1 буде попуњен, након тога нико од новопридошлих кандидата неће добити посао). Којих редоследа (од могућих $n!$) долазака кандидата на конкурс има више: оних у којима кандидат n или оних у којима кандидат $n-1$ добија посао?

6.2. Нека су M, N, L редом подножја нормала из тачке P унутар оштроуглог троугла ABC на AB, BC, CA. Посматрајмо вредност израза:

$$f(P) = AM^2 + BN^2 + CL^2$$

Наћи положај тачке P за који је вредност тог израза минимална.

6.3. Да ли постоји природан број N, такав да се за сваки рационалан број q $(0 < q < 1)$ може наћи k $(k \leq N)$ природних бројева $a_1, a_2, ..., a_k$ (не обавезно различитих) таквих да важи:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_k} = q$$

6.4. Четвороугао $ABCD$ је тангентни. Нека су тачке додира страница AB, BC, CD, DA са уписаним кругом M, N, P, Q, редом. Доказати да се праве NP и MQ секу на продужетку дијагонале BD, или су јој евентуално паралелне.

6.5. Шифра за сеф је 3-оцифрен број у чијем запису учествују цифре од 1 до 8. Пошто је механизам на сефу покварен, довољно је да на било која 2 од 3 места поставимо праву цифру да би се брава отворила. Који је минималан број комбинација које треба да испробамо да би смо гарантовано отворили сеф? (Наравно ако нам "права" комбинација није већ позната).

6.6. Број N је потпун квадрат и његов декадни запис се не завршава нулом. Када избришемо његове две задње цифре, тај новодобијени број је опет потпун квадрат. Наћи највећи број N који има та својства.

6.7. Дат је једнакостранични троугао ABC. Круг чији је полупречник једнак висини троугла котрља се по страници AB (при томе су његов центар и тачка C са исте стране AB). Доказати да је дужина лука кружнице, који се налази унутар троугла, константна у сваком тренутку њеног кретања (тј. котрљања).

6.8. У $\triangle ABC$ страница BC једнака је полузбиру других двеју страница. Око $\triangle AB_1C_1$ описана је кружница (B_1 и C_1 редом средишта AC и AB). Из тежишта $\triangle ABC$ повучене су тангенте на ту кружницу. Доказати да је једна од тачака додира тих тангенти са кружницом AB_1C_1 центар уписане кружнице $\triangle ABC$.

6.9. Дат је низ бројева: $a_n = [\sqrt{(n+1)^2 + n^2}]$, $n = 1, 2, ...$, (наравно $[x]$ изначава цео део броја x). Доказати да:
а) Има бесконачно много природних бројева m, за које важи: $a_{m+1} - a_m > 1$;
б) Има бесконачно много природних бројева m, за које важи: $a_{m+1} - a_m = 1$.

6.10. На двору краља Артура скупило се $2n$ витезова. Ниједан од њих међу присутнима нема више од $n-1$ непријатеља. Доказати да их је могуће распоредити за округлим столом тако да никоја два непријатеља не седе један поред другог.

6.11. У реду, према растућем поретку записани су сви позитивни рационални бројеви којима је производ бројиоца и имениоца мањи од 2005 (наравно разломци су у нескративом облику, а целе бројеве k записаћемо као $\frac{k}{1}$). Доказати да онда за било која два суседна разломка $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ важи $bc - ad = 1$.

7.1. У свако поље квадратне таблице 2005×2005, треба да упишемо један од бројева 1 или -1, тако да производ бројева у било ком реду и у било ком ступцу те таблице буде 1. На колико начина то можемо учинити?

7.2. Дато је неколико природних бројева таквих да ниједан од њих не претставља почетак неког другог од њих у декадном запису. Нека је k_i број тих бројева са i цифара. Доказати да тада важи:

$$\frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{10^2} + ... \frac{k_n}{10^n} + ... \leqslant \frac{9}{10}$$

(Под тим да је број a почетак броја b подразумеваћемо или ако важи $a = b$, или ако дописивањем с' десна декадном запису броја a неких цифара можемо добити запис броја b, значи нпр. број 41 је почетак броја 4109873)

7.3. У унутрашњости датог троугла ABC конструисати тачку M такву да су површине $\triangle MAB$, $\triangle MAC$ и $\triangle MBC$ међусобно једнаке.

7.4. Нека су H_1 и H_2 подножја нормала из ортоцентра H, троугла ABC, на симетралу спољашњег, односно унитрашњег угла код темена C. Доказати да права H_1H_2 садржи средиште странице AB.

7.5. На тетиви AB кружнице k, са центром O, уочена је тачка M. Кружница кроз тачке A, O и M сече кружницу k у тачкама A и C. Доказати да је $MB = MC$.

8.1. Да ли је могуће наћи 8 природних бројева $n_1, n_2, ..., n_8$, који имају следећу особину: за свако цело k, $-2005 \leqslant k \leqslant 2005$, могуће је наћи коефицијенте $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_8$ тако да се k може претставити као $k = \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + +\alpha_3 n_3 + ... + \alpha_8 n_8$, при чему сви коефицијенти α_i припадају скупу $\{-1, 0, 1\}$.

8.2. Нека су AM и MB две тетиве неког круга и $AM > MB$. Нека је K средиште лука AB (и то оног који садржи тачку M), а H подножје нормале из K на AM. Доказати да важи: $AH = HM + MB$.

8.3. У равни је дато n $(n \geqslant 9)$ тачака у општем положају (тј. никоје 3 од њих нису колинеарне) . Неке од њих су обојене црвеном, а преостале плавом бојом. Доказати да је увек могуће наћи троугао коме су сва 3 темена исте боје и у чијој се унутрашњости не налази ни једна од преосталих $n-3$ тачака. Да ли тврђење важи ако је $n \leqslant\ 8$?

8.4. Са природним бројем a спроводимо следећу операцију: последњу цифру декадног записа броја a множимо са 4 и то саберемо са бројем који се добија брисањем последње цифре броја a (нпр. тако од броја 2005 добијамо: $4 \cdot 5 + 200 = 220$). Овај поступак настављамо и настављамо са сваким новодобијеним бројем, бесконачно пута (ако нпр. стигнемо до тога да је a једноцифрен број од њега се добија број $4 \cdot a + 0 = 4 \cdot a$). Ако смо у неком кораку добили број 2015, доказати да се у том низу бројева (претходно насталих и оних који ће тек настати) не појављује ни један прост број.

9.1. Дат је тетивни четвороугао $ABCD$. Доказати да центри уписаних кругова троуглова ABC, BCD, CDA и DAB претстављају темена једног правоугаоника.

9.2. У равни је дато $n \geqslant 3$ тачака, при чему не леже све на једној правој. Доказати да се свака тачка може спојити са неким бројем других тачака тако да се добијени одсечци не секу и да образују конвексан многоугао разбијен на троуглове.

9.3. Дато је $2n$ позитивних бројева: $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2n}$. Како их треба груписати у n дисјунктних парова тако да буде:
а) збир производа парова највећи?
б) збир производа парова најмањи?
в) производ збирова парова највећи?
г) производ збирова парова најмањи?

9.4. Колико решења $x_1, x_2, ..., x_k$ у скупу природних бројева има једначина: $x_1 + x_2 + \ldots x_k = n$.

9.5. Постоји ли такав природан број p да је број $n!$ дељив са 2^{n-p} за свако $n > p$?

10.1. Нека су реални бројеви $x, y, z \geqslant 0$. Доказати неједнакост:

$$x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geqslant (x+y-z)(x-z)(y-z)$$

Када важи једнакост?

10.2. Дат је једнакостранични троугао ABC странице a, и тачка O унутар њега. Праве AO, BO и CO секу странице BC, AC и AB у тачкама A_1, B_1 и C_1, редом. Доказати да важи: $OA_1 + OB_1 + OC_1 < a$

10.3. Наћи све парове (p, q), где су p и q прости бројеви за које је израз:

$$p^2 + 3pq + q^2$$

а) потпун квадрат природног броја. **б)** степен броја 5.

10.4. У $\triangle ABC$ нека су: $\measuredangle BAC = 40^\circ$, $\measuredangle ABC = 60^\circ$. Нека су даље, D и E тачке на страницама AC и AB, редом, тако да важи: $\measuredangle CBD = 40^\circ$, $\measuredangle BCE = 70^\circ$. Нека је F пресек BD и CE. Доказати да је $AF \perp BC$.

10.5. 20 чланова шаховског клуба су, тренирајући, међусобно одиграли укупно 14 партија. При томе је сваки члан одиграо бар једну партију. Доказати да је могуће наћи 6 партија у којима је укупно наступило 12 различитих играча.(Наравно у свакој шаховској партији учествују два играча, један против другог).

11.1. Доказати да једначина:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(x+y+z) + 5 = 0$$

нема решења у скупу рационалних бројева.

11.2. Нека у оштроуглом троуглу ABC важи; $AB < AC < BC$. Нека су I и O центри уписаног, односно описаног круга $\triangle ABC$. Доказати да права OI сече дужи AB и BC.

11.3. У равни је дат скуп S, од $2n+1$ тачака тако да никоје 3 нису колинеарне, и никоје 4 не леже на истој кружници. Круг ћемо звати „добар" ако на њему леже тачно 3 тачке из S, а унутар њега и ван њега по $n-1$ тачака из S. Доказати да је укупан број „добрих" кругова исте парности као број n.

11.4. Нека за ненегативне реалне бројеeве a, b, c, d важи: $a + b + c + d = 4$. Доказати неједнакост:

$$\sqrt{a+b+c} + \sqrt{b+c+d} + \sqrt{a+c+d} + \sqrt{a+b+d} \geqslant 6$$

Када ће важити једнакост?

11.5. Тачка D је на страници BC троугла ABC. Нека је тачка F пресечна тачка AD и друге заједничке спољне тангенте(осим BC) уписаних кругова $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$. Наћи геометријско место које описује тачка F како се тачка D креће по страници BC између тачака B и C.

12.1. Игру „Упомоћ!" играју два играча на правоугаоној таблици од 2000 квадратића, димензија 1×2000 на следећи начин: играчи наизменично уписују у неки од празних квадратића или слово S или слово O. Играч после чијег потеза се деси да уписана слова на нека 3 суседна квадратића формирају реч „SOS" добија игру. Таблица је на почетку игре празна. Уколико се деси да након уписивања свих 2000 слова никоја 3 суседна не формирају реч „SOS" партија се проглашава ремијем. Доказати да играч који је други на потезу има победничку стратегију.

12.2. Нека су $k_1 < k_2 < k_3 < .....$ природни бројеви међу којима никоја два нису узастопна. Нека су, даље, $S_m = k_1 + k_2 + ... + k_m$, за $m = 1, 2, 3.....$ Доказати да за свако природно n интервал $[S_n, S_{n+1})$ садржи бар један потпун квадрат природног броја.

12.3. Алпинистички клуб који има n чланова организује 4 планинарске експедиције за своје чланове. Означимо са E_1, E_2, E_3, E_4 тимове на те 4 експедиције. На колико начина је могуће извршити избор тих тимова тако да важе следећи услови: $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, $E_2 \cap E_3 \neq \emptyset$, $E_3 \cap E_4 \neq \emptyset$.

12.4. Ненегативни бројеви a, b, c, p, q, r задовољавају услове: $a + b + c = p + q + r = 1$ и $p, q, r \leqslant \dfrac{1}{2}$. Доказати да онда важи неједнакост: $8abc \leqslant pa + qb + rc$ и испитати када важи једнакост?

12.5. У равни једнакокраког трапеза $A_1A_2A_3A_4$ дата је тачка P. Доказати да се од дужина A_1P, A_2P, A_3P и A_4P као страницама може саставити конвексан четвороугао.

12.6. Доказати да је у оштроуглом троуглу збир растојања ортоцентра од темена двоструко већи од збира полупречника описане и уписане кружнице.