Matematička gimnazija, Beograd
Dodatna nastava za prvi razred, šk. 2005/06.

DIRIHLEOV PRINCIP

Dirihleov princip. Ukoliko je $n \cdot k + 1$ objekata raspoređeno u k skupova, tada se u jednom od tih skupova mora nalaziti barem $n + 1$ objekata.

1. U kvadrat površine S postavljeno je 2006 figura ukupne površine veće od $2005S$. Dokazati da postoji tačka kvadrata koja se nalazi u svakoj od figura.

2. Dokazati da među brojevima $574, 574574, 574574574, \ldots$ postoji bar jedan koji je deljiv sa 31.

3. (Opštinsko 2001, 1 raz) Da li je moguće, koristeći samo slova A i B, napraviti skup od: 3 reči od po 4 slova, 10 reči od po 5 slova, 30 reči od po 6 slova i 5 reči od po 7 slova, uz uslov da početak nijedne reči iz skupa ne sme i sam da bude reč iz skupa ?

4. Svaka tačka sa celobrojnim koordinatama u ravni označena je jednim od brojeva $1, 2, \ldots, n$. Dokazati da postoji pravougaonik čija su sva temena označena istim brojem.

5. Na pravoj je dato $mn + 1$ duži. Dokazati da postoji $m + 1$ duži koje se seku ili $n + 1$ duži koje su međusobno disjunktne.

6. (Savezno 1976, 1 raz) Dokazati da se u krug poluprečnika 9 ne može smestiti 400 tačaka, tako da rastojanje između svake dve tačke bude veći od 1.

7. (Savezno 1985, 1 raz) Dokazati da se među 39 uzastopnih prirodnih brojeva nalazi bar jedan sa zbirom cifara deljivim sa 11.

8. Dato je 100 celih brojeva. Dokazati da možemo izabrati neke od njih čija je suma deljiva sa 100.

9. Dokazati da postoji broj u čijem dekadnom zapisu učestvuju samo jedinice, deljiv sa 2003.

10. Iz skupa prvih $2n$ brojeva izbrano je $n + 1$ brojeva. Dokazati da među njima postoje dva takva da jedan od njih deli drugog.

11. Data su 52 cela broja. Dokazati da postoje dva čija je suma ili razlika deljiva sa 100.

12. (Savezno 1981, 2 raz) Skup $\{1, 2, \ldots, 100\}$ podeljen je na 7 delova. Dokazati da postoje brojevi a, b, c, d iz istog dela, među kojima su bar tri različita, takvi da je $a + b = c + d$.

13. (Savezno 1980, 2 raz) Dati su brojevi $a_1 < a_2 < \ldots < a_{19} \leq 200$ i $b_1 < b_2 < \ldots < b_{21} \leq 200$. Dokazati da postoje $i < j \leq 19$ i $k < l \leq 21$, takvi da je $a_j - a_i = b_k - b_l$.

14. Šahista igra svakog dana bar jednu partiju, ali odigra najviše 12 nedeljno. Dokazati da postoji nekoliko uzastopnih dana u toku kojih je odigrao tačno 20 partija.

15. U cilju pripreme za predstojeća takmičenja iz matematike učenik je rešavao zadatke u periodu od 5 nedelja. Tokom ovog perioda on je svakog dana radio bar jedan zadatak, ali ne više od 10 zadataka nedeljno.
(a) Dokazati da je učenik za nekoliko uzastopnih dana rešio tačno 19 zadataka.
(b) Ako je $1 \leq n \leq 34$ prirodan broj, dokazati da je tokom nekih uzastopnih dana učenik rešio tačno n zadataka.

16. Dat je pravougaonik koji ima 100 redova i 1997 kolona. Pravougaonik je popunjen nulama i jedinicana tako da je bar 75 jedinica u svakoj koloni. Dokazati da je moguće izbaciti 95 redova tako da je u ostatku najviše jednak kolona u kojoj su sve nule.

17. (Savezno 1977, 2 raz) Neka su $a_1 < a_2 < \ldots < a_{20} < 70$ prirodni brojeva. Dokazati da postoje $i < j < k < l \leq 20$, takvi da je $a_j - a_i = a_l - a_k$.

18. (Savezno 1980, 3 raz) Dato je 18 duži čije su dužine između 1 i 1980. Dokazati da postoje tri od kojih se može konstruisati trougao.

19. (Interno 2005) Neka su n i k prirodni brojevi za koje važi $n^k > (k+1)!$. Neka je $M = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid (\forall i)\ x_i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$. Dokazati da među svakih $(k+1)! + 1$ elemenata iz M postoje dva $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ takva da je

$$(k+1)! \mid (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \ldots (a_k - b_k)$$

20. (IMO 1985, 4 zad) Dat je skup M koji se sastoji od 1985 različitih prirodnih brojeva. Nijedan od njih nema prostog delioca većeg od 26. Dokazati da se iz skupa M mogu izabrati četiri međusobno različita broja čiji je proizvod četvrti stepen celog broja.

21. (SAD 2003) Dokazati da za svaki prirodan broj n postoji n-tocifren prirodan broj deljiv sa 5^n čije su sve cifre neparne.

© Marko Radovanović
radmarko@yahoo.com
decembar 2005.