Dodatna nastava iz matematike

Grafovi

Predavač: A.Pejčev

1. Dat je graf u kom je svaki čvor stepena barem 3. Dokazati da on sadrži zatvorenu konturu parne dužine.

2. Dato je n tačaka $A_1, A_2, \ldots, A_n$ i svaka duž njima odredjena je obojena u crveno ili plavo. Dokazati da je date tačke moguće označiti sa $B_1B_2, \ldots, B_n$ tako da za neko $1 \leq i \leq n-1$ važi jedan od sledeća dva uslova:

   (a) duži $B_1B_2, \ldots, B_iB_{i+1}$ plave, a duži $B_{i+1}B_{i+2}, \ldots, B_nB_1$ crvene;

   (b) sve duži pomenute pod a) su iste boje.

3. U svakoj od 3 škole ima po n učenika i svaki učenik iz svake škole poznaje bar $n+1$ učenika iz preostale dve. Dokazati da postoje tri učenika, svaki iz po jedne škole, koji se medjusobno poznaju.

4. Ako graf sa n čvorova ima barem n grana, onda on sadrži ciklus. Dokazati.

5. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ različiti podskupovi skupa $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Dokazati da postoji $x \in S$ tako da su skupovi $A_1 \backslash \{x\}, A_2 \backslash \{x\}, \ldots, A_n \backslash \{x\}$ takodje različiti.

6. U grafu od n temena za svaka dva temena koja nisu spojena važi da su u zbiru spojena sa barem n temena. Dokazati i upamtiti kao lemu da onda u tom grafu postoji put koji prolazi kroz svako teme grafa tačno jednom (Hamiltonov put).

7. U skupu od $2n$ ljudi svako ima barem n poznanika. Dokazati da ih je moguće smestiti u n dvokrevetnih soba tako da je svako u sobi sa svojim poznanikom.

8. Pretpostavimo da se u nekom društvu od n osoba svake dve osobe ili vole ili ne vole i da ima q parova koji se vole ($q \in N$). Ako u svakom društvu od 3 osobe postoje dve koje se ne vole, dokazati da postoji bar jedan član društva takav da medju onima sa kojima se ne voli ima najviše $q(1 - \frac{4q}{n^2})$ parova koji se vole. Pretpostavljamo i to da je "voljenje" simetrična relacija.

9. Zašto je sledeća priča kontradiktorna:
   U Srbiji se iz svakog grada može stići u neki drugi grad. Pri tome ako se iz proizvoljnog grada putuje po zemlji proizvoljnim putem do povratka u taj grad, onda se prodje kroz neparan broj usputnih gradova. Grad kroz koji se prodje više puta se broji onoliko puta koliko se kroz njega prodje. Iz svakog grada polazi jednak broj puteva, osim iz Paraćina iz kog polazi manj broj puteva.

10. Gradove $P_1, P_2, \ldots, P_{1983}$ povezuje 10 aviokompanija. Postoji direktna veza izmedju bilo koja dva grada (bez presedanja) i sve veze su dvosmerne. Dokazati da bar jedna aviokompanija može da ponudi kružno putovanje sa neparnim brojem sletanja.

11. Neka je A skup od n tačaka u prostoru. Iz familije svih segmenata sa krajevima u A, q segmenata je izabrano i obojeno u žuto. Pretpostavimo da svi žuti segmenti imaju različite dužine. Da se dokaže da postoji poligonalna linija sastavljena od m različitih žutih segmenata, poredjanih u rastući poredak po dužini, tako da važi $m \geq \frac{2q}{n}$.

12. U jednoj grupi za svakih $n \geq 3$ ljudi postoji tačno jedna osoba koja ih sve poznaje (poznanstva su uzajamna i niko nije poznanik sa samim sobom). Ako je X osoba sa najviše poznanika ,koliko poznanika ima X?

13. Na fudbalskom turniru na kojem učestvuje 18 ekipa odigrano je 8 kola. Dokazati da se mogu naći tri ekipe tako da se nikoje dve nisu srele u odigranim kolima.

14. Na šahovskom turniru svaki igrač je sa svakim odigrao po jednu partiju. Za pobedu se dobijao 1, za remi $\frac{1}{2}$ i za poraz 0 poena. Na kraju se ispostavilo da je svaki igrač polovinu svih osvojenih poena sakupio u partijma sa 10 poslednje plasiranih igrača, Koliko je ljudi učestvovalo na turniru?

15. U senatu ima 30 senatora. Svaki je prijatelj sa tačno 6 drugih. Na koliko se načina može formirati tročlana komisija u kojoj su svi prijatelji ili svi neprijatelji?

16. Skup M, koji se sastoji od n ljudi ima sledeće osobine:

    (a) svaka osoba iz M poznaje tačno k ljudi iz M;

    (b) svake dve osobe iz M koje se medjusobno poznaju imaju tačno l zajedničkih poznanika u M;

    (c) svake dve osobe iz M koje se medjusobno ne poznaju imaju tačno m zajedničkih poznanika u M.

    Podrazumeva se da je poznanstvo simetrična relacija. Dokazati jednakost

    $$m(n-k) - k(k-l) + k - m = 0.$$

17. Sve stranice i dijagonale konveksnog šestougla obojene su crveno ili plavo. Dokazati da postoje bar dva jednobojna trougla.
    Definicija: Orijentisan prost graf bez petlji se zove **turnir** ako za svaka dva njegova čvora tačno jedan od njih tuče onaj drugi (oznaka $x \to y$). Turnir je **jako povezan** ako za svaka dva čvora x i y, ako x tuče y, postoji prost orijrntisan put od y do x. Čvor a je **king** turnira ako za sve $b \neq a$ važi $a \to b$ ili postoji c tako da $a \to c \to b$.

18. Turnir je jako povezan akko ima Hamiltonovu konturu. Dokazati.

19. Turnir ima barem jednog kinga i ne može ih imati tačno dva. Dokazati.

20. Dokazati da su jedini parovi prirodnih brojeva $(n, k) n \geq k$ za koje ne postoji turnir sa n čvorova i k kingova. $(4, 4), (n, 0), (n, 2)$.