Malo kombinatorike

1. Mali Perica je na tabli 15×15 postavio 15 topova koji se ne tuku. Rekao je malom Jovici da može svakog topa da pomeri za jedan skok skakača u šahu i da će u novodobijenom rasporedu postojati dva topa koja se tuku. Da li je mali Perica u pravu?

2. Na gomili se nalazi n žetona. Dva igrača A i B igraju igru u kojoj naizmenično povlače po 5, 7 ili 11 žetona sa gomile. Gubi igrač koji ne može da povuče potez. Koji igrač ima pobedničku strategiju, ako je $n = 2001$, a koji ako je $n = 5000$?

3. Sledeća operacija je dozvoljena sa konačnim grafom: odabere se proizvoljna kontura dužine 4 (ako postoji), zatim proizvoljna ivica sa konture izbriše iz grafa. Za fiksirani prirodan broj $n \geq 4$, odrediti najmanji broj ivica grafa, koji se dobija primenom gornje operacije nad kompletnim grafom.

4. Data je matrica $n \times n$, popunjena realnim brojevima. Svaki broj je po apsolutnoj vrednosti manji ili jednak od 1 i suma svih elemenata matrice je 0. Ako je n paran broj, odrediti najmanju konstantu C, tako da za svaku matrica ima vrstu ili kolonu čija suma ne prelazi C po apsolutnoj vrednosti.

5. U senatu se nalazi 51 senator. Senat se mora podeliti u n komiteta, tako da je svaki senator u tačno jednom komitetu. Svaki od senatora mrzi tačno trojicu drugih seratora. Ipak, ako senator A mrzi senatora B, to ne znači da B mrzi A. Naći najmanju vrednost za n, tako da je moguće organizovati n komiteta, tako da u istom komitetu senatori ne mrze medjusobno.

6. Dato je $n+1$ različitih tročlanih podskupova skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dokazati da medju njima postoje dva čiji je presek jednočlan.

7. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_{19}$ pozitivni brojevi, gde je svaki od njih manji od 93. Neka su $y_1, y_2, \ldots, y_{93}$ pozitivni brojevi gde je svaki manji ili jednak od 19. Dokazati da postoji neki neprazan podskup od x_i i neki podskup od y_j, sa jednakim sumama.

8. Neka su S skup od n tačaka u ravni, tako da su bilo koje dve tačke udaljene bar za 1. Dokazati da postoji podskup T sa bar $\frac{n}{7}$ tačaka, tako da su bilo koje dve tačke udaljene bar za $\sqrt{3}$.

9. Neka je $F = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ familija podskupova od S, tako da je $|S| = n$. Za svako $1 \leq i, j \leq k$ važi da je $|A_i \cap A_j| \neq 1$. Dokazati da se elementi skupa S mogu obojiti sa dve boje, tako da nijedan skup iz F nije monohromatski.

10. Dato je 2005 pravougaonika, čije su stranice celi brojevi manji od 2005. Dokazati da medju ovim pravougaonicima postoje tri A, B i C tako da se A može ubaciti u B, a B se može smestiti u C.

11. Dato je n realnih brojeva, čija je suma 0, ali nisu svi nule. Dokazati da ih možemo urediti brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tako da je

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n + a_na_1 < 0$$

12. Na stolu se nalazi gomila kartica i na svakoj je zapisan broj od 1 do n. Suma svih brojeva na karticama je $k \cdot n!$. Dokazati da se kartice mogu podeliti u k grupa, tako da je suma brojeva u svakoj grupi jednaka $n!$.

13. Unutar kvadrata je uočeno nekoliko tačaka, koje su medjusobno spojene dužima i spojene sa temenima kvadrata, tako da se konstruisane duži ne seku. Posle toga kvadrat je bio podeljen na trouglove. Svakoj od uočenih tačaka, kao i temenima kvadrata, pridružen je broj koji predstavlja broj duži koje polaze iz te tačke. Da li je moguće da su svi pridruženi brojevi parni?

14. Svaki od brojeva $1, 2, \ldots, n$ se pojavljuje po n puta u matrici $n \times n$. Pokazati da postoji vrsta ili kolona, koja sadrži bar $\sqrt{n}$ različitih brojeva.

15. Dokazati da za svaki prirodni broj n postoji Fibonačijev broj deljiv sa n. Dokazati da je indeks najmanjeg takvog broja manji od n^2.

16. Dokazati da od proizvoljnih 39 uzastopnih brojeva, moguće je odabrati jedan od njih, čija je suma cifara deljiva sa 11. Naći prvih 38 uzastopnih brojeva, tako da im suma cifara nije deljiva sa 11.

17. Naći sve parove brojeva (m, n), tako da je moguće pravougaonik dimenzija $m \times n$ popločati sa figuricama tipa L, sastavljenih od 3 kvadratića.

18. Dat je pravilni $2n$-tougao. Proizvoljna n temena su obojena plavo, a ostala su obojena crvenom bojom. Konstruisana su dva niza brojeva: u jednom se nalaze sve dužine duži koje imaju krajeve crvene boje, a u drugom sve dužine duži koje imaju krajeve plave boje. Dokazati da su ova dva niza jednaka.

19. Na svakom jediničnom polju kvadrata 9×9 je postavljena buva. U jednom trenutku svaka buva skoči na polje koje ima samo jedan zajednički čvor sa polaznim kvadratićem (dijagonalno). Neke buve mogu skočiti na isto polje. Odrediti najmanji broj praznih polja na tabli posle svih skokova.

20. U skupu od $2n$ ljudi postoje dva čoveka sa parnim brojem zajedničkih prijatelja.

21. U kompaniji radi $2n + 1$ ljudi. Za svakih n ljudi postoji čovek koji ih sve poznaje. Ako je poznanstvo uzajamno, pokazati da postoji čovek koji poznaje sve ostale.

22. Temena pravilnog 2005-ugla su obojena crno ili belo. Dokazati da postoji jednakokraki trougao čija su sva temena iste boje. Da li isto važi i za pravilni osmougao?

23. Vlada Republike Srbije se seli u novu zgradu oblika kvadrata sa 2005×2005 soba. Predsednik vlade Aleksandar Veliki, želi da postavi vrata izmedju susednih soba, tako da svaka soba ima tačno dvoja vrata. Da li on može to da izvede?

24. Dato je n tegova $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ i vaga sa dva tasa. Tegovi se na tasove stavljaju jedan po jedan. Svako merenje se obeležavaja jednim slovom iz skupa $\{L, R\}$. k-to slovo u reči je L ili R ako je pretegnula leva, odnosno desna strana vage. Dokazati da se može napisati bilo koja reč dužine n od slova $\{L, R\}$.

25. Brojevi od 1 do 101 su napisani na tabli u proizvoljnom redosledu. Dokazati da se mogu precrtati 90 brojeva, tako da na tabli ostane monotono rastući niz ili monotovono opadajući niz.

26. Dato je 50 segmenata na realnoj pravoj. Dokazati da postoje 8 segmenata koji imaju zajedničku tačku ili 8 koji su medjusobno disjunktni po parovima.

27. Permutaciju $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ brojeva $1, 2, \ldots, 2n$ nazivamo "dobrom" ako je $|x_i - x_{i+1}| = n$ za bar jedno $i \in \{1, 2, \ldots, 2n - 1\}$. Dokazati da je bar polovina permutacija "dobra" za svako n.

28. Posmatrajmo sve kvadratiće (x, y) u celobrojnoj beskonačnoj mreži, gde se koordinate posmatraju u levom donjem uglu. Obeležimo polja $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (1, 1), (0, 2)$. Ako je na polju (x, y) žeton, a polja $(x + 1, y)$ i $(x, y + 1)$ su slobodna, tada je dozvoljeno ukloniti žeton sa (x, y) i staviti po jedan žeton na polja $(x + 1, y)$ i $(x, y + 1)$. Da li je moguće ukloniti sve žetone sa obeleženih kvadratića, ako sva obeležena polja sadrže žeton na početku?

29. Na sferi je dato 5 tačaka. Dokazati da postoji zatvorena polusfera koja sadrži bar 4 tačke.

30. Na stolu se nalaze 2005 novčića, okrenutih glavom ili pismom nagore. Grupa od 2005 osoba radi sledeće: prva osoba okreće jedan novčić, druga osoba okreće proizvoljna dva novčića,..., poslednja osoba okreće ukupno 2005 novčića. Dokazati da kako god bili postavljeni novčići na početku, 2005 osoba mogu okretati novčiće tako da na kraju budu svi okrenuti na istu stranu. Dokazati da ako se svi mogu okrenuti pismom nagore, onda se ne mogu okrenuti glavom nagore i obrnuto.