Теорија графова

Лука Милићевић
децембар 2012.
lukavert@gmail.com

Увод

Дефиниција 1. Граф је уређени пар (V, E) где је V коначан скуп, а E подскуп скупа $V^{(2)} = \{(u, v) : u, v \in V, u \neq v\}$. Елементе скупа V називамо чворовима, а чланове скупа E гранама.

Напомена: Будући да у овом предавању има доста појмова са очигледним дефиницијама нећемо их наводити овде. Читаоцима су оне лако доступне на интернету, нпр.
http://math.fon.rs/skladiste/dms/nastava/7/slajd-grafovi.pdf.

Пример 2. (Иран 2006) Нека је G турнир, чије су гране обојене у две боје, плаву и црвену. Доказати да постоји чвор v такав да ка сваком другом чвору имамо једнобојан пут из v.

Пример 3. (Турнир градова 2009) Ана и Борис су одлучили да посете архипелаг који се састоји од 2009 острва. Између неких парова острва постоје чамци који могу превести путнике у оба правца. Током путовања, Ана и Борис обилазе острва играјући следећу игру:
Прво Ана бира острво на које ће допутовати авионом. Затим Борис бира следеће острво које ће посетити, користећи чамац како би се превезли. У сваком следећем потезу, наизменично, свако од њих бира острво које пре тога нису посетили, и на које заједно путују чамцем. Када стигну на острво са ког чамцем могу отићи само на острва на којима су већ били, особа која би требало да изабере следеће путовање, губи. Доказати да Ана има победничку стратегију.

Пример 4. Нека је G 3-повезан граф, са граном e чији крајеви имају степене бар 4. Тада је један од графова G/e и $G - e$ такође 3-повезан.

Екстремне конфигурације

Пример 5. Нека је G граф са бар $n^2/4 + 1$ грана, где је $n = |G|$. Тада G има троугао.

Пример 6. Нека је G 2-повезан граф, и нека је l максимална дужина контура у датом графу. Тада G не садржи пут дужине $\lfloor l^2/4 \rfloor + 1$.

Пребројавања

Пример 7. (ММО 2004 SL) За дати граф G, обележимо са $f(G)$ број троуглова, а са $g(G)$ број тетраедара које праве гране у G. Наћи најмању константу c такву да $g(G)^3 \leq cf(G)^4$ важи.

Пример 8. (Турска 2009) На окупљању се нашло 2009 људи. Свака два човека имају тачно једног заједничког пријатеља. Која минимална вредност разлике броја пријатеља између особа које познају највише и најмање људи?

Пример 9. Доказати да је у кубном графу свака грана садржана у парном броју Хамилтонових контура.

Рамзијева теорема

Теорема 10 (Рамзијева Теорема) Нека су k, l природни бројеви. Тада постоји природни број $R(k, l)$ такав да за свако $n > R(k, l)$, свако бојење K_n у две боје, рецимо плаву и црвену, садржи или плав K_k или црвен K_l.

Пример 11. (ММО 1990 SL) На десет локација постоје међународни аеродроми на којима саобраћају две авио компаније. Између било која два аеродрома постоји директна линија у оба правца за бар једну компанију. Показати да бар једна авио компанија која нуди две (по летовима) дисјунктне кружне туре око градова које служи, обе са непарним бројем летова.

Пример 12. (ММО 1992) Нека је дато 9 тачака у простору, тако да никоје четири не леже у истој равни. Наћи најмањи природни број n такав да за било којих n дужи између ових тачака, и било које бојење тих дужи у две боје, постоји једнобојни троугао.

Пример 13. (Уопштена Банахова теорема) Нека је (X, d) комплетан метрички простор и нека је f непрекидна функција на X таква да постоје природан број n и $\lambda \in (0, 1)$ такви да за сваки две тачке x, y у X постоји $i \in [n]$ такво да $d(f^i(x), f^i(y)) \leq \lambda d(x, y)$. Показати да тада f има јединствену фиксну тачку.

Измене графова

Пример 14 (ММО 2002 SL) У друштву од 120 људи, неки парови се међусобно познају. Под *слабом четворком* мислимо на четири човека међу којима постоји тачно једно познанство. Колико највише може бити *слабих четворки*?

Пример 15 Доказати скуп чворова било ког графа G може да се подели у дисјунктне скупове V_1 и V_2 такве да:
(i) $G[V_1]$ и $G[V_2]$ имају само парне степене чворова,
(ii) $G[V_1]$ има парне степене чворова, а $G[V_2]$ има непарне.

Пример 16 (ММО 2007) На математичком такмичењу неки ученици су пријатељи; ако је А пријатељ са Б, тада је и Б пријатељ са А. Група ученика се назива дружина ако су свака два ученика у тој групи пријатељи. (Специјално, свака група са мање од два ученика је дружина.) Број ученика у дружини назива се њеном величином.
На овом такмичењу максимална величина дружине је паран број. Доказати да се ученици могу распоредити у две собе, тако да је максимална величина дружине у једној соби једнака максималној величини дружине у другој соби.

Пример 17 Нека је G минималан граф по броју грана који је повезан и нема мостова, међутим који се не може прекрити контурама тако да је свака грана садржана у тачно две контуре. Тада је G кубни граф.

Теорија бројева

Пример 18 За подскуп $S \subset \mathbb{Z}_n$ кажемо да је Сидонов уколико једначина $a + b \equiv c + d \pmod{n}$имa само тривијална решења у S. Доказати да је $|S| \leq \sqrt{n} + 1$.

Пример 19 Нека је k природан број и $n = 2^k + 1$. Показати да је n прост број ако и само ако је следећи услов задовољен:
Постоји пермутација $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ скупа $[n-1]$ и низ целих бројева $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}$ таквих да n дели $g_i^{a_i} - a_{i+1}$ за све i у $[n-1]$, где је $a_n = a_1$.