Игре
логичко–комбинаторни задаци

Предавач: Владимир Балтић

1. Правоугаоник димензија $1 \times n$ састављен је од n јединичних квадрата ($n \geqslant 4$), редом нумерисаних са $1, 2, \ldots, n$. На пољима $n-2$, $n-1$ и n налази се по један жетон. Два играча играју следећу игру: наизменично пребацују по један жетон на произвољно празно поље са мањим редним бројем. Игру губи играч који је на реду, а не може одиграти потез. Доказати да први играч може тако да игра да сигурно победи, без обзира како играо други.

2. На шаховској табли формата 8×8 налази се на првом и осмом реду 8 белих и 8 црних жетона респективно. Бели почиње игру. Играчи наизменично померају по један жетон за једно или више поља по свом ступцу у било којем смеру, али најдаље до руба табле или противничког жетона. Игру губи онај који први дође у ситуацију да не може повући потез. Доказати да црни може да победи ма како бели играо.

3. Дата је правоугаона табла која има m колона и n врста, где је $m > n$, а m и n су исте парности. У доњем левом углу налази се бели ловац, а у горњем десном углу налази се црни ловац. Играчи B и C наизменично повлаче потезе ловцима по правилима шаховске игре. Игру почиње B и он увек игра белим ловцем, а играч C увек игра црним ловцем. Игру добија играч који постави свог ловца под удар противничког ловца. Одредити који од играча добија игру и описати победничку стратегију.

4. Дате су две гомиле, свака са по 1991 куглицом. Два играча наизменично вуку потезе на следећи начин: у једном потезу играч уклања једну гомилу (коју жели), а другу гомилу дели на две нове непразне гомиле. Игру губи онај играч који не може да одигра исправан потез. Одредити који играч (први или други) са сигурношћу може да победи и на који начин.

5. Два играча играју следећу игру: први играч записује једну цифру. Затим други дописује са леве или десне стране једну цифру. Затим први дописује са леве или десне стране једну цифру. Затим други дописује са леве или десне стране једну цифру итд. Доказати да први играч може играти тако да никад после потеза другог записани број није потпун квадрат.

6. Два играча наизменично стављају на правоугаони сто новчиће од једног динара тако да се они не преклапају. Игру губи играч који више не може да стави новчић на сто. Како треба да игра први играч да би победио?

7. Два такмичара наизменично узимају куглице из две кутије. Када дође на ред, такмичар узима из једне од кутија произвољан број куглица (обавезно бар једну). Победник је онај такмичар који последњи узме куглицу. Како треба да игра први такмичар да би победио, ако у првој кутији има 19, а у другој 96 куглица?

8. На столу се налази 1996 жетона. Два играча узимају жетоне наизменично. Првим потезом први играч узима колико хоће, али не све. У сваком следећемо потезу сваки играч може узети само број који је делилац броја жетона које је узео противник у претходном потезу. Победник је онај играч који узме последњи жетон. Како треба да игра први играч да би победио?

9. Поља шаховске табле 8×8 нумерисана су бројевима $1, 2, 3, \ldots, 64$. Играчи A и B играју игру у којој наизменично повлаче потезе, а у сваком потезу могу поставити један или неколико жетона на поља шаховске табле по следећем правилу: играч који је на потезу бира поље шаховске табле на којем се не налази жетон и које је означено (нпр. са n), а затим ставља по један жетон на изабрано поље и свако поље које је слободно и које је нумерисано бројем који није узајамно прост са n. На почетку на табли нема жетона, први потез има играч A, а побеђује играч који последњи стави жетон. Који играч може да победи у овој игри независно од игре противника? Одредити победничку стратегију.

10. У углу шаховске табле $n \times n$ стоји фигура. Два играча наизменично померају фигуру на суседно поље (по једно поље навише, наниже, лево или десно) али тако да фигура не сме двапут да се нађе на истом пољу. Игру губи играч који не може да одигра следећи потез. У зависности од n испитати да ли неки од играча може тако да игра да побеђује независно од игре другог играча.

11. Дат је израз $*1*3*3^2*3^3*\cdots*3^{1997}*3^{1998}$. Аркадије и Бранислав наизменично замењују по једну звездицу са $+$ или са $-$. Бранислав настоји да број који се добије, после замене и последње звездице, буде дељив са 7. Може ли Аркадије да га спречи у томе ако он први игра?

12. На табли је написан израз $f(x) = x^3+ax^2+bx+c$. Два ученика играју следећу игру: први избрише произвољан од параметара a, b или c и замени га неким реалним бројем. Затим други то исто уради са неким од преосталих параметара. На крају први замени последњи параметар реалним бројем. Ако добијени полином нема позитивних корена онда је победио ученик који први игра. У супротном игру добија други ученик. Који од ученика може да победи и како треба да игра?

13. Миљан и Младен играју следећу игру: наизменично бирају делиоце броја n, али тако да број који изаберу не дели ни један од претходно изабраних бројева. Игру губи онај играч који каже броје n. Миљан почиње игру. Како треба да игра да би победио Младена? **а)** $n = 1000$; **б)** $n = 200$.

14. У кутији се налазе 4 куглице нумерисане бројевима 1, 2, 3 и 4. Два играча играју игру у којој наизменично бирају са враћањем једну куглицу из кутије. Избори су међусобно независни, а свака куглица има вероватноћу $\frac{1}{4}$ да буде изабрана у сваком кораку. Игра се завршава у тренутку када је збир свих до тада изабраних бројева дељив са 3, победом играча који је последњи бирао куглицу. Одредити вероватноћу догађаја да се игра заврши победом играча који је први бирао куглицу.

15. У кутији се налази n куглица. Два играча наизменично извлаче куглице из кутије. У једном потезу играч сме извући најмање једну, а највише k куглица ($k < n$). Победник је играч који извуче последњу куглицу. Како играчи треба да играју, да би обезбедили победу, уколико је то могуће?

16. На кружници је распоређено 40 фигура, што белих, што црних. Два играча играју следећу игру: први узима све црне фигуре које имају белог суседа, након тога други узима све беле фигуре које имају црног суседа, онда опет први итд. Игра се завршава када на кружници остану само фигуре исте боје. Да ли је могуће да на крају остане само једна бела фигура? Да ли је могуће да на крају остане само једна црна фигура?

17. Дат је полином $x^{10} + *x^9 + *x^8 + \cdots + *x + 1$. Два играча играју следећу игру: први замењује једну од звездица реалним бројем, други чини исто са једном од преосталих звездица итд. све док не замене све звездице. Ако добијени полином има реалних корена други играч побеђује, а ако нема први. Да ли постоји стратегија којом други добија?

18. Дата је гомила са n шибица. Два играча наизменично вуку потезе на следећи начин: у једном потезу играч узима са гомиле $1, 2, 3, \ldots, k$ шибица. Игру губи онај играч који узме последњу шибицу. Да ли постоји победничка стратегија за неког играча?

19. *НИМ* — На столу је дато n гомила шибица. У сваком потезу играч може са неке гомиле да узме произвољан број шибица. Победник је онај играч који узме последњу шибицу. Да ли постоји победничка стратегија за неког играча?

20. На шаховској табли формата 8×8 Бранко ставља 8 белих пешака на прва четири реда, тако да у свакој колони буде по један пешак. Независно од њега, истовремено, Цане ставља 8 црних пешака у редове 5–8, тако да у свакој колони буде по један пешак. Бранко почиње игру. Играчи наизменично померају по један свој жетон за једно или више поља у својој колони ка противничком жетону, али најдаље до противничког жетона. Игру губи онај који први дође у ситуацију да не може повући потез. Да ли постоји победничка стратегија за неког играча?

21. (на руском *Цзянщицзы* — Дате су две гомиле шибица и два играча наизменично узимају или произвољан број шибица из једне гомиле или по једнак број шибица из обе гомиле. Победник је онај играч који узме последњу шибицу. Да ли постоји победничка стратегија за неког играча? Како би требало да одигра први играч ако има две гомиле са 19 и 99 шибица?

22. Дате су три гомиле жетона: I се састоји од једног жетона, II од два, а III од три. Амелиа и Бела играју следећу игру: сваки играч када је на потезу узима или само један жетон или све жетоне са једне гомиле. Игру губи играч који узме последњи жетон. Амелија је прва на потезу. Како она треба да игра да би добила?

23. Два играча играју следећу игру: пред њима су две гомиле жетона. Играчи наизменично узимају

произвољан број жетона са једне гомиле. Игру губи онај после чијег потеза је на обе гомиле једнак број жетона. Који играч има победничку стратегију ако је на једној гомили 1974, а на другој 1991 жетона?

24. *ИКС–ОКС* (на енглеском *Tic-tac-toe*, а на руском *Крестики–нолики*) — Игра икс–окс се игра у квадрату 3×3 (који је подељен на 9 квадратића). Два играча стављају наизменично своје знаке (уобичајено X и O) у квадратиће. Побеђује играч који први стави три своја знака у исту линију (хоризонталу, вертикалу или по дијагонали). Играчи ће увек ставити свој знак у линију која већ садржи *(а)* два његова знака или *(б)* два противникова знака – где (а) има већи приоритет у односу на (б). Само последњи знак у ове две партије није дат. Који играч, X или O, добија партију?

X	O	
X		
O	O	X

O	O	
O	X	
X	X	

25. Два играча играју подморнице на табли $n \times n$, где су подморнице димензија $n \times 1$ (или $1 \times n$) и подморнице се не поклапају. Који је минималан број поља за која пита играч одједном и кад добије одговор зна где су све подморнице? Зна се да има мање од n подморница.

26. Дат је хомоген систем линеарних једначина $\begin{array}{l} *x + *y + *z = 0 \\ *x + *y + *z = 0 \\ *x + *y + *z = 0 \end{array}$. Два човека играју следећу игру: један за другим уписију бројеве уместо звездица. Први добија уколико систем има нетривијална решења, а други ако систем има само тривијално решење $x = 0, y = 0, z = 0$. Који играч може да победи у овој игри независно од игре противника? Одредити победничку стратегију.

27. Који је најмањи број гађања потребан за сигурно "потапљање подморнице" у игри подморница, ако су димензије "мора" 8×8, а "подморнице" 1×4? (После сваког гађања играчу се саопштава да ли је погодио "подморницу". За "потапање" потребно је погодити све квадратиће који чине "подморницу".)

28. На папиру на квадратиће означено је 100 тачака – темена квадратића који образују квадрат 9×9. Два играча наизменично спајају вертикалним или хоризонталним дужима две суседне означене тачке. Играч, после чијег потеза се образује квадратић 1×1, боји тај квадратић својом бојом. Побеђује играч који обоји више квадратића. Који играч има победничку стратегију? Која је то стратегија?

29. Андреј дели по свом нахођењу гомилу од 200 шибица на 6 гомилица (од којих свака садржи бар једну шибицу), а затим Борис изједначава број шибица у две гомилице, тако што узима неколико шибица из једне гомилице. Број шибица, које узме Борис, називамо Андрејевим добитком. Борис тежи да узме што је могуће мање шибица. Како треба да игра Андреј, да би обезбедио максимални могући добитак?

30. Двоје играју следећу игру. На столу се налази гомила од 12 шибица; играчи наизменично узимају једну или две шибице са стола или враћају једну или две шибице од раније узетих, после чега записују, сваки на свом листу папира, број шибица на гомили који је остао након тог потеза. Забрањено је одиграти потез након кога се на листу појаве два једнака броја. Игру губи онај играч који не може да одигра потез. Ко побеђује у овој игри при правилној стратегији? Шта се дешава ако је на почетку на столу 13 шибица?

31. На табли 1×100 на пољу бр. 50 стоји жетон. Двоје играју следећу игру. Сваки својим потезом може померити жетон за једно или два поља у леву или у десну страну. Забрањено је ставити жетон на поље на ком је жетон већ био. Губи онај играч који не може да одигра свој потез. Који играч добија при правилној игри?

32. Аца и Бојан играју на табли 1×9. Аца нумерише поља табле бројевима од 1 до 9, после чега Бојан ставља жетон на неко поље. Затим играчи наизменично премештају жетон у сваком кораку на једно од суседних поља. На сваком пољу жетон може бити не више пута од броја који је написан у том пољу. Губи играч који не може да одигра потез. Ко побеђује при правилној игри?

33. На табли 1×100000 (на почетку празној) два играча играју наизменично. Први кад је на потезу може ставити два знака икс у произвољна два поља табле. Други кад је на потезу може обрисати произвољну количину узастопних иксева (који иду један за другим – без празних поља међу њима).

Ако се после потеза првог формира 13 или више узастопних иксева он добија. Може ли први да добије при правилној игри обе стране?

34. Дато је 1800 куглица – по 100 куглица у 18 различитих боја. Први играч бира једну куглицу и даје је другоме, који је ставља на једно поље табле 9×9. Ако се добије да су 5 куглица исте боје једна до друге у истој врсти, колони или на дијагонали, они се скидају са табле и више не учествују у игри. Ако други играч нема где да постави куглицу он губи. Ако први играч "истроши" све куглице он губи. Ко добија при правилној игри?

35. Двоје наизменично повлаче дијагонале у правилном 1995–тоуглу. Забрањено је повући дијагоналу, ако би она секла неку већ повучену. Губи онај играч, након чијег потеза се образује четвороугао код кога дијагонале нису повучене. Ко добија при правилној игри?

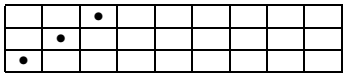
36. На бесконачној решетки двоје наизменично боје ивице бесконачне решетке. На располагању имају 8 боја. Први тежи ка томе да се добије затворена изломљена линија, чије су сваке две суседне ивице обојене различитим бојама. Може ли други да га спречи у томе?

37. На табли је написан израз $ax = b$. Први играч говори два различита броја, а други по свом нахођењу ставља један од тих бројева уместо a, а други уместо b. Добија се једначина. Уколико је првоизговорен број решење једначине, добија први играч, а иначе други. Ко добија при правилној игри?

38. Из табле $m \times n$ удаљено је свих $(m-2)(n-2)$ унутрашњих поља $(m, n \geqslant 3)$. На добијеној траци двоје играју следећу игру. Кад је играч на потезу може истестерисати неколико поља, која образују правоугаоник (могуће је да се правоугаоник састоји само од једног поља), тако да се део који остаје не распадне на два парчета. Побеђује играч који начини последњи потез. Ко добија при правилној игри: играч који почиње или његов супарник?

39. Дата је табла 1×1997, која је на почетку празна. Два играча имају врећу са 1997 жетона. У потезу играч може или да узме жетон из вреће и стави на произвољно празно поље или да премести било који од жетона са табле у десно на најближе празно поље (уколико такво постоји). Играчи играју наизменично и добија онај који стави последњи жетон. Ко добија при правилној игри: играч који почиње или његов супарник?

40. На столу је дато 13 картица нумерисаних бројевима од 1 до 13. Пера и Васа наизменично узимају по једну картицу. Почиње Пера и он хоће да му је сума бројева на узетим картицама на крају прост број. Може ли Васа да га спречи у томе?

41. На табли 3×9 стоје три жетона:  . Двоје играју следећу игру: наизменично премештају по један од жетона удесно по хоризонтали. Губи играч који не може да одигра потез, тј. онај који је на потезу кад су сви жетони у последњој десној колони. Доказати да при правилној игри добија играч који почиње.

42. У доњем десном и горњем левом углу шаховске табле 8×8 налазе се бели и црни скакач. Играчи повлаче потезе наизменично. Бели почиње игру, а циљ игре је узети противничког скакача. Игра се завршава нерешено када се иста позиција понови три пута. Доказати да се игра мора завршити ремијем уколико оба играча играју најбоље.

43. На пољу А1 шаховске табле 8×8 налази се краљ. Играју двоје и потезе вуку наизменично, померајући при том краља за једно поље у неком од следећих смерова: горе–лево, горе, горе–десно, десно или доле–десно (сваким потезом се удаљује од поља А1). Побеђује онај играч који својим потезом доведе краља на поље Х8. Како треба да игра онај који игру почиње да би победио?

44. На пољу Ф8 шаховске табле 8×8 постављена је дама. Играју двоје и потезе вуку наизменично. Сваки од играча, кад је на потезу, може померати даму за колико жели поља наниже (по вертикали), лево (по хоризонтали) или лево–доле (по дијагонали). Губи онај играч који нема где да иде. Значи, победник ће бити онај играч који први дотера даму на поље А1. Познато је да у овој игри играч који је први на потезу, уколико игра правилно, увек побеђује ма како играо његов партнер. Како то треба да игра? А ко ће победити при правилној игри ако се дама налази на пољу Е8?

45. *Вук и овце* На шаховској табли 8×8 на црна поља у првом реду постављена су 4 бела пешака и они ће у овој игри за двоје представљати овце. Сем тога, на било које друго црно поље постави се црни пешак који ће представљати вука. После тога, у току игре, вук и по једна овца могу се кретати наизменично само са једног црног поља на "суседно" црно поље, и то овце идући само напред – полулево или полудесно, а вук, било напред или назад, само дијагонално. Први потез имају овце. У овој игри вук није крволочан и не може да поједе ниједну овцу. Он побеђује ако успе да се пробије између оваца и да стигне на први ред шаховске табле, са којег овце полазе. Овце побеђују ако успеју тако да опколе вука, да он не може никуда даље да крене. Показати да овце могу увек да победе вука.

46. *Марсејски шах* или *Двоструки шах* Уобичајени начин играња шаха је да сваки играч наизменично помера по једну фигуру. Међутим, марсејски шах се од обичног разликује само у томе што играчи редом повлаче један за другим по два потеза (изузев уколико играч у првом потезу да шах противнику – тада губи право на други потез). Сва остала правила су иста. Постоји ли таква стратегија црног играча (бели почиње партију) којом он добија сваку партију?

47. Објаснићемо једну игру за коју није потребан ни посебан прибор ни посебна даска, па чак ни оловка и папир. Играју двојица играча: први каже било који број који није већи од 10, након чега други играч каже било који већи број, али који није већи за више од 10 (нпр. ако први играч каже 7, тада други играч може рећи било који број између 8 и 17, укључујући и њих). На исти такав начин сада први играч каже нови број (нпр. ако је други играч рекао 13, тада први може рећи било који број између 14 и 23). Према наведеном правилу играчи даље наизменично говоре бројеве и победник је онај који успе рећи 100. Показати да први играч увек може бити победник (занимљиво је да пут до победе, тј. избор бројева, уопште не зависи од тога како игра други играч).
Малом, али битном променом могуће је добити нову игру: играчи говоре бројеве од 1 до 100 по истим правилима, али партију губи онај који каже број 100. Може се ли се и у тој игри увек победити?

48. На столу се налази седам гомилица пасуља, тако да је у свакој једнак број зрна. Сваки од двојице играча, кад је његов ред, узима из само једне, али било које гомилице, колико хоће и може зрна. Победник је онај који узме и последње зрно пасуља са стола. Ако се смисли добра стратегија, онда играч који игра први увек може победити. Како?

49. Двоје играју следећу игру. Са гомиле од 25 шибица играчи, наизменично, узимају једну, две или три шибице. Побеђује играч код кога се на крају игре (када све шибице буду узете) нађе паран број шибица. Ко побеђује при правилној игри – онај који почиње или његов противник? Како он треба да игра да би победио?
Како се мења одговор ако је победник играч који је узео непаран број шибица?
Размотрите игру у општом случају, када има $2n + 1$ шибица и дозвољено је узети било који број шибица између 1 и m.

50. Два мудраца играју следећу игру. На табли су написани бројеви $0, 1, 2, \ldots, 1024$. Први мудрац прецрта по свом избору 512 бројева, други прецрта 256 од преосталих бројева, затим поново први прецртава и то 128, затим други – још 64 броја итд. Својим последњим (петим) потезом други прецрта један број. Остају два непрецртана броја и други плаћа првом разлику та два броја. Како треба да игра први да би зарадио што је могуће више? Како треба да игра други да би платио што је могуће мање? Колико ће платити други првом играчу, уколико обојица играју најбоље?

51. Двоје играју икс–окс на бесконачној табли. Први играч ставља икс, X, у произвољно поље. У сваком следећем потезу он мора да стави икс у неко слободно поље, које је суседно са неким пољем у коме је већ икс (поља су суседна уколико имају заједничку ивицу или заједничко теме). Други играч у сваком свом потезу ставља одједном три знака окс, O, у било која три слободна поља (не морају бити суседна). На слици је приказана једна позиција до које може доћи после три потеза. Доказати да други може да добије игру, без обзира како игра први, тако што ће "заробити" првог (тј. први неће моћи да одигра свој потез).

	O_3		O_2	O_2		
		X_3	X_2			
	O_3	O_2		X_1	O_3	
		O_1		O_1	O_1	

Истражите аналогне игре, у којима други кад је на потезу не може да стави три, него само два или један окс. Какав је тада резултат при обостраној правилној игри: полази ли за руком оксевима да "заробе" иксеве (и који је тада највећи број иксева који може да се постави) или игра може да се

продужи до у бесконачност? Пробајте и друге варијанте ове игре: када су суседна само поља која имају заједничку страницу; када је раван разбијена на правилне шестоуглове уместо квадрата; када први може да стави p иксева, а други q оксева за потез.

52. Двоје играју следећу игру. Први играч говори цифру, а онда је други ставља по свом нахођењу уместо једне од звездица у следећој разлици: $\begin{array}{r} * \ * \ * \ * \\ - \ * \ * \ * \ * \\ \hline \end{array}$. Затим први говори још једну цифру, а други је ставља и тако осам пута док све звездице нису замењене цифрама. Први играч тежи да добијена разлика буде што већа, а други да буде што мања. Доказати да: **а)** други може да поставља цифре тако да добијена разлика не прелази 4000, независно од тога које је цифре говорио први; **б)** први може да говори цифре тако да добијена разлика не буде мања од 4000, независно од тога где је цифре стављао други.

53. Двоје играју следећу игру. Први замишља природан број n, а други поставља питања типа "Да ли је $n \geqslant x$?" (x бира по свом нахођењу) и добија одговоре "да" и "не". Произвољној стратегији T другог играча придружимо функцију $f_T(n)$, која је једнака броју питања до одгонетања који је задати број n. Ако се, нпр, стратегија T састоји да се на почетку постављају питања: "Да ли је $n \geqslant 10$?", "Да ли је $n \geqslant 20$?" итд. док на питање "Да ли је $n \geqslant 10(k+1)$?" не добије одговор "не", а затим поставља питања "Да ли је $n \geqslant 10k+1$?", "Да ли је $n \geqslant 10k+2$?" итд. Тада је $f_T(n) = \dfrac{n-a}{10} + a + 2$, где је a последња цифра броја n, тј. $f_t(n)$ расте приближно као $n/10$.
а) Предложите стратегију, за коју функција $f_T(n)$ расте што је могуће спорије. **б)** За упоређивање две стратегије, погодно је увести уместо функције $f_T(n)$ функцију $f'_T(n) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} f_T(n)$ – она показује колико је најмање питања потребно да би се нашао произвољан број који не прелази n. Оцените одоздо $f'_T(n)$ за произвољну стратегију T.

54. У углу шаховске табле $n \times n$ ($n \geqslant 4$) стоји фигура. Први играч може да игра том фигуром два пута заредом као са обичним коњем (два поља у једну страну, а затим једно поље нормално на тај смер), а други – једанпут као са коњем са продуженим кораком (три поља у једну страну, а затим једно поље нормално на тај смер). Они играју наизменично. Први тежи да фигуру стави у супротан угао, а други да га спречи у томе. Ко од њих побеђује?

55. Дато је неколико гомила камења. Двоје играју игру у којој у сваком потезу играч дели сваку гомилу, која се састоји од више од једног камена, на две мање гомиле. Играчи играју наизменично, док на свакој гомили не остане по један камен. Победник је играч који је одиграо последњи потез. Како треба да игра први, уколико је на почетку у свакој гомили било између 80 и 120 камена?

56. Два играча играју следећу игру. Први задаје два броја од 1 до 25, а други треба да их погоди. Други говори нека два броја од 1 до 25, а онда му први одговори колико се казаних бројева – 0, 1 или 2 – поклапа са задатим. Колики је минималан број питања која други мора да постави да би са сигурношћу могао да одреди задата два броја?

57. Двоје играју на табли $m \times n$ следећу игру. Свако од њих, наизменично, прецртава сва поља произвољног реда (или колоне), у којем има непрецртаних поља. Добија играч који прецрта последње поље. Ко добија при правилној игри: играч који почиње или његов супарник? (Одговор, наравно, зависи од m и n!)

58. На табли 1×30 на скроз десном пољу стоји бели жетон, а на скроз левом пољу – црни. Свако од два играча наизменично помера свој жетон за једно поље лево или десно. (Пропуштање потеза није дозвољено.) Губи играч који не може да одигра потез. Ко добија: играч који почиње или његов супарник?
Решите задатак, ако је уместо 30 у услову n.

59. Дате су две гомиле шибица: у једној је m, а у другој n шибица, $m > n$. Два играча наизменично узимају из једне гомиле произвољан (различит од нуле) број шибица, који је садржалац броја шибица у другој гомили. Добија играч који узме последњу шибицу са једне гомиле. **а)** Докажите, да уколико је $m > 2n$, први играч може да победи. **б)** За које бројеве α важи тврђење: ако је $m > \alpha n$, тада играч који је први на потезу може да обезбеди себи победу?

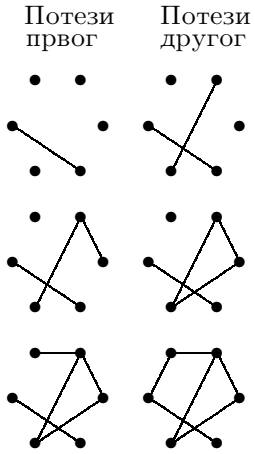
60. Жетон стоји у углу шаховске табле $n \times n$. Сваки од два играча, наизменично, га премешта на

суседно поље (то је поље које има заједничку страну са пољем на којем је жетон). Забрањено је довести жетон на поље на ком је већ био. Губи играч који не може да одигра свој потез.
а) Докажите, да ако је n парно, тада први играч може добити противника, а ако је n непарно, други.
б) Ко побеђује, ако на почетку жетон није у углу, него на пољу које суседно са угаоним?

61. Двоје играју следећу игру. Први каже природан број између 2 и 9. Други помножи тај број са произвољним природним бројем између 2 и 9. Затим први помножи резултат са произвољним природним бројем између 2 и 9 итд. Добија онај играч који први добије производ већи од **а)** хиљаду; **б)** милион. Ко добија при правилној игри?

62. Квадрат је подељен на $n \times n$ квадратића. Два играча исцртавају наизменично по једну ивицу неког квадратића. Ко побеђује при правилној игри ако је: **а)** победник играч који први направи затворену линију; **б)** губи играч који први начини затворену линију?

63. Двојица везиста играју следећу игру. Дато је n телефонских чворишта и везисти наизменично спајају каблом два од њих по свом избору. Игру добија онај, после чијег потеза се са произвољног чворишта може успоставити веза са произвољним другим чвором (ако треба и са неколико "преседања"). Пример игре је дат на слици.
а) Објасните, за $n = 4, 5, 6, 7, 8$, ко добија први или други.
б) Какав је одговор за произвољно n?
в) Нека играч који повеже сва чворишта губи. Одговорите на питања из делова под а) и б) за ову нову игру.
г) Нека су у почетку сви чворови (сваки са сваким) спојени каблом, а везисти наизменично уклањају по једну везу између нека два чвора. Играч који наруши повезаност телефонске шеме губи. Питање је исто: ко побеђује при правилној стратегији за $n = 4, 5, 6, 7, 8$? А за произвољно n?
Напомена. Могуће је размотрити и четврту варијанту игре: исто као у делу под д), само играч који наруши повезаност побеђује. Потпуна анализа ове варијанте није позната.



64. Степенице се састоје од $2n+1$ степеника. На n доњих степеника стоји по један камен. Два играча наизменично вуку каменове. Први може да пренесе било који камен уз степенице до првог слободног степеника, а други да премести камен за једну степеницу ниже, ако је она слободна. Циљ првог је да стави камен на врх степеница. Може ли други да га спречи у томе?

65. Један од два играча (први) стави коња на неко поље шаховске табле. Затим играчи наизменично играју коњем по обичним правилима (слово Г), при чему је забрањено ставити коња на поље где је већ био. Губи играч који не може да одигра потез. Ко може да победи (независно од игре противника) на табли **а)** 8×8; **б)** $m \times n$, где је $m \geqslant n \geqslant 3$?

66. Два играча наизменично пишу на табли природне бројеве који нису већи од p. Правилима игре забрањено је написати на табли делилац неког од већ написаних бројева. Губи играч који не може да напише број. **а)** Објасните који од играча има добитну стратегију за $p = 10$ и дајте је. **б)** Објасните који од играча има добитну стратегију за $p = 1000$.

67. На табли је нацртан терен за игру са цифрама: (((((((((__$*$__)$*$__)$*$__)$*$__)$*$__)$*$__)$*$__)$*$__)$*$__)$*$__)
Први играч на почетку записује на месту првог (сасвим лево) размака (__) било коју цифру. Сваки следећи корак се састоји у следећем: заменити прву следећу звездицу ($*$) знаком плус или пута ($+$ или $\cdot$) и уписати цифру у следећи размак. При том ниједна цифра не може да се појави двапут. На крају игре се израчуна вредност добијеног израза. Ако је то паран број добија први играч, а ако је непаран – други. Ко добија при правилној игри?

68. На кружници је дато n тачака, нумерисаних редом бројевима $1, 2, \ldots, n$. Двоје играју следећу игру. Свако од њих наизменично повлачи тетиву, која спаја две тачке нумерисане бројевима исте парности и не сме да има заједничких тачака (чак ни крајеве) са неком раније повученом тетивом. Добија онај играч који одигра последњи потез. За свако $n = 4, 5, 6, \ldots$ објасните који играч има добитну стратегију: онај који почиње или његов противник.

69. Дечак и девојчица играју следећу игру: дечак црта у равни многоуглове који се не преклапа-

ју, а девојчица их боји. Ако два многоугла имају заједнички део странице, она мора да их обоји у различите боје. Колико најмање боја девојчица мора да има на располагању, да би могла да следи та правила, уколико дечак црта само **а)** једнакостраничне троуглове; **б)** једнакокраке правоугле троуглове; **в)** једнаке квадрате?

70. Дата је гомила од M шибица и лист папира, на којем је написан број M. Двоје играју следећу игру. На почетку су све шибице у гомили – код играча нема шибица. Играчи играју наизменично. У сваком кораку, играч може да узме са гомиле од 1 до k шибица или да врати од 1 до k већ узетих шибица на гомилу и затим запише на листу колико је шибица остало на гомили. Губи онај који не може да одигра потез или би требало да на листу напише број, који се већ налази на листу. Ко од играча добија при правилној игри, ако је **а)** $k = 2$; **б)** $k = 5$?

71. **а)** На табли је написана једначина $*x^2 + *x + * = 0$. Први од два играча каже нека три броја, које други ставља по свом избору на место звездица. Може ли први да добије да дата једначина има различите рационалне корене или други увек може да га осујети у томе?
б) На табли је написана једначина $x^3 + *x^2 + *x + * = 0$. Први од два играча каже неки број, који други ставља на место неке од звездица; затим први каже неки број, који други ставља на место неке од преостале две звездице; на крају, први стави неки број уместо преостале звездице. Може ли први да успе да добијена једначина има три различита цела корена?

72. На табли је написано n једначина облика $*x^2+*x+* = 0$ (n је непаран број). Двоје играју следећу игру. Играчи играју наизменично. У сваком кораку, играч може да замени неку од звездица бројем, различитим од нуле. Кроз $3n$ корака се добије n квадратних једначина. Први тежи да што је могуће више тих једначина нема корене, а други хоће да га омете у томе. Који највећи број једначина, које немају корене, може да направи први играч независно од игре другога?

73. Коле и Пера деле $2n+1$ ораха, $n \geqslant 2$, при чему сваки хоће да узме што више. Предложена су три начина за деобу (сваки се састоји од три етапе, од чега су прва и друга заједничке за сва три начина). <u>I етапа</u>: Пера дели све орахе на два дела, тако да у сваком има бар два ораха. <u>II етапа</u>: Коле дели сваки део поново на два дела, тако да у сваком има бар један орах. <u>III етапа</u>: при првом начину Коле узима највећи и најмањи део; при дугом начину Коле узима оба средња дела; при трећем начину Коле узима или највећи и најмањи део или оба средња дела, али за право избора даје Пери један орах. Одредите који је начин најпогоднији за Колета.

74. Дата је табла од 3×3 поља и 9 картица, величине једног поља, на којима су написани неки бројеви. Два играча наизменично стављају те картице на поља табле. Када су све картице стављене, први играч одређује суму шест бројева који се налазе у горњем и доњем реду, а други одређује суму шест бројева који се налазе у левој и десној колони. Побеђује онај играч који је израчунао већу суму. Доказати, да при правилној игри првог, други играч не може победити, независно од тога који су бројеви написани на картицама.

75. Написано је првих 20 бројева: 1 2 3 ... 20. Двоје наизменично стављају испред неког неозначеног броја знак + или −. Првоме је циљ да после стављања свих 20 знакова сума тих бројева буде што је могуће мања по модулу. Која је највећа по модулу сума коју може да постигне други?

76. *Краљ–самоубица* На шаховској табли димензија 1000×1000 стоји бели краљ и 499 црних топова који га не "туку" (тј. у врсти и колони у којој је краљ нема топова). Циљ белог краља је да се постави под удар неког црног топа. Доказати да он може то да учини независно од почетног распореда фигура, као и игре црног. (Краљ и топови се крећу по правилима шаха.)

77. На табли је написана једначина $x^3 + *x^2 + *x + * = 0$. Двоје играју следећу игру. Први играч замени неку од звездица целим бројем, различитим од нуле (позитивним или негативним). Затим други ставља цео број уместо једне од преосталих звездица. На крају, први играч ставља цео бој уместо преостале звездице. Докажите да први може да игра тако да сва три корена добијене једначине буду цели бројеви.

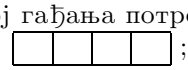
78. На шаховској табли 8×8 двоје играју игру "*мачке–миша*". Први има један бели жетон – миша, а други има неколико црних жетона – мачака. Сви жетони се померају на исти начин: горе, доле, лево или десно за по једно поље. Ако се миш домогне ивице табле, следећим потезом ће скочити са табле. Уколико се мачка и миш нађу на истом пољу мачка ће појести миша. Играчи играју наизменично,

при чему други кад је на потезу помера све своје мачке одједном (разне мачке се могу померати у разним смеровима). Почиње миш. Његов циљ је да побегне са табле, а мачке хоће да га поједу.
а) Нека има само две мачке. Миш је постављен на било које поље сем крајњих. Да ли је могуће поставити мачке на ивицу табле тако да оне могу да поједу миша?
б) Нека су три мачке, али зато миш има додатни корак: у првом потезу он чини два корака. Доказати да миш може да побегне од мачака, без обзира на почетну позицију.

79. Дат је троугао $\triangle ABC$ површине 1. Први играч бира тачку X на страници AB, други – Y на страници BC и затим први – Z на страници AC. Циљ првога је да добије троугао XYZ што веће површине, а другога – што мање. Колика је највећа површина коју први играч може себи да обезбеди?

80. Сваком темену коцке је придружен неки ненегативан реалан број, тако да је сума свих тих бројева једнака 1. Двоје играју следећу игру. Први бира произвољну страну коцке, други бира неку другу страну и на крају први бира трећу страну коцке. Забрањено је бирати страну која је паралелна некој већ одабраној страни. Доказати да први играч може да игра тако да број, придружен заједничком темену одабраних страна, не прелази 1/6.

81. Дата је коцка и две боје: црвена и зелена. Двоје играју следећу игру. Први бира 3 ивице коцке и боји их у црвену боју. Други бира 3 ивице коцке, од оних необојених, и боји их у зелено. После тога поново први боји 3 ивице у црвено, а затим други 3 ивице у зелено. Забрањено је два пута бојити исту ивицу. Добија играч који први обоји својом бојом све ивице неке стране. Да ли први, при правилној игри, обавезно добија?

82. Игра "подморница" се игра на табли 7×7. Који је најмањи број гађања потребно извршити да би сигурно ранили четвороделну подморницу, ако: **а)** она има облик  ; **б)** се она састоји од четири поља која су спојена једно са другим странама?

83. Десет играча почели су игру, сваки са истом сумом новца. Један за другим, сваки од њих бацао је пет коцкица. После сваког бацања, играч који је бацао коцкице исплатио је сваком од својих девет противника суму једнаку n–том делу суме коју је тај противник имао до тог тренутка, где је n збир бројева које су показале коцкице. Када је последњи, десети играч бацио коцкице збир бројева на њима је износио 12, а пошто је извршено исплаћивање, показало се да сваки играч има исту суму новца као на почетку игре. Одредити, ако је могуће, збирове које су показивале коцкице у претходних девет бацања.

84. Три играча А, Б, Ц, Играју следећу игру. Случајно се бира k–елементни подскуп скупа $\{1, 2, \ldots, 1986\}$, где су једнаке вероватноће сваког избора, а k је фиксиран природан број, $k \leqslant 1986$. Победник је А, Б или Ц, ако сума изабраних бројева даје остатак 0, 1 или 2 при дељењу са 3. За које вредности k је ово фер игра? (Под фер игром подразумевамо да су сва три исхода једнако вероватни.)

85. Дат је почетни природан број $n_0 > 1$. Два играча, А и Б, наизменично бирају природне бројеве $n_1, n_2, n_3, \ldots$ у складу са следећим правилима. А зна број n_{2k} и бира било који природан број n_{2k+1} који задовољава $n_{2k} \leqslant n_{2k+1} \leqslant n_{2k}^2$. Б зна n_{2k+1} и бира било који природан број n_{2k} тако да је $\dfrac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ позитиван степен простог броја. Играч А добија ако изабере број 1990, а играч Б ако изабере број 1. За које n_0: **а)** А има добитну стратегију; **б)** Б има добитну стратегију; **в)** ниједан играч нема добитну стратегију?

86. Два играча се играју на табли 3×3 белим и црним жетонима. У сваком потезу играч ставља три жетона, који не морају бити исте боје, на три поља у истој врсти или колони. Ниједно поље не може да садржи жетоне различитих боја: нпр. ако играч стави бели жетон на поље које има црне жетоне, тада се са тог поља одстрањују по један бели и један црни жетон. Игра се завршава када централно и угаона поља садрже један црни жетон, а остала поља су празна. У једном ступњу игре x поља садржи један црни жетон, а остала поља су празна. Одредити све могуће вредности за x.

87. У крајњем левом пољу табле 1×100 налази се жетон. Два играча наизменично премештају жетон, тако да у једном кораку могу да га преместе за 1, 10 или 11 поља удесно. Губи онај играч који не може да одигра потез. Ко добија при правилној игри: онај играч који почиње или његов противник?

88. Дрвена табла $n \times n$ подељена је на квадратиће 1×1 (на њој је означена мрежа). Два играча наизменично тестером праве резове дужине 1 по линијама мреже, који почињу или од краја табле или

од неког чвора на неком од већ направљених резова. Губи онај играч после чијег потеза се табла распада на два дела. Ко добија при правилној игри: онај играч који почиње или његов противник?

89. Двоје играју следећу игру: сваки од њих кад је на потезу ставља икс или окс (по свом нахођењу) на било које слободно поље табле 10×10. Добија играч после чијег потеза се на табли појави ред од три узастопна знака (по било којој линији). Ко добија при правилној игри? (Да ли може да буде нерешено?)

90. Двоје играју следећу игру: на централном чвору квадратне решетке 10×10 стоји жетон. У потезу сваки од играча премешта жетон на било који чвор решетке, али тако да дужина тог корака (тј. растојање између чвора на ком је био и чвора на који је дошао жетон) мора бити већа него дужина претходног корака, који је начинио његов противник. Губи онај играч који не може да одигра потез. Који играч добија при правилној игри?

91. Двоје играју следећу игру. На табли је написан број 2. Сваки од играча, кад је на потезу, замењује број n, који је записан на табли, бројем $n + d$, где је d произвољан делилац броја n, који је мањи од њега. Губи онај играч који напише на табли број већи од **а)** 19 891 989; **б)** 19 891 990. Ко добија при правилној игри?

92. Вук и Зец играју следећу игру. На табли је записан број и у сваком потезу играчи од њега одузимају неку његову цифру различиту од нуле и добијени број записујемо на месту старог. Играчи играју наизменично. Победник је играч који као резултат одузимања добије нулу. Нека је на почетку на табли написан број 1234 и први игра Вук. Ко добија при правилној игри?

93. Дат је скуп бројева $S = \{1, 3, 5, 7, -8, -12, 13, -14, -16, 21\}$. Иван и Јелена играју следећу игру: наизменично узимају по један број из скупа S. Победник је играч који на крају има већу апсолутну вредност збира изабраних бројева. Ако Јелена игра прва, може ли изабрати такву стратегију да обавезно побеђује?

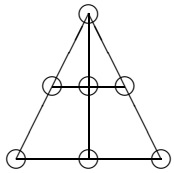
94. На табли су написани сви природни бројеви од 1 до 1000. Два играча A и B наизменично бришу по један број, а почиње играч A. Игра се завршава када на табли остану два броја. Ако је збир та два броја дељив са три, победник је A, а ако њихов збир није дељив са три, победник је B. Доказати да играч B има победничку стратегију.

95. Два играча наизменично уписују природне бројеве од 1 до 25 у поља квадратне таблице 5×5, при чему се сваки број може написати само једанпут. Ако је после попуњавања таблице збир бројева у некој врсти или некој колони једнак 70, победник је први играч, у противном – други. Који играч може да обезбеди победу и како треба да игра?

96. Два играча наизменично попуњавају бројевима различитим од 0 таблицу $(2n+1) \times (2n+1)$. После попуњавања целе таблице, први броји врсте у којима је збир бројева једнак 0, а други колоне у којима је збир бројева једнак 0. Победник је играч који добије већи број. Да ли неки од играча може да обезбеди победу, без обзира на то како игра његов противник?

97. На столу се налази n бомбона. Пера и Никола наизменично узимају бомбоне са стола по следећем правилу. Пера почиње први. Он првим потезом може узети једну бомбону, Никола затим може узети i бомбона, где је i делитељ броја 2, Пера затим може узети i бомбона, где је i делитељ броја 3 итд, у k-том узимању број узетих бомбона мора бити делитељ броја k. Победник је играч који узме и последњу бомбону са стола. Који играч има победничку стратегију, тј. који играч може да обезбеди победу у игри, без обзира на то како игра његов противник?

98. Два играча наизменично уписују целе бројеве од 1 до 7 у кружна поља таблице представљене на доњој слици. После попуњавања таблице различитим бројевима, израчунају се збирови дуж сваке праве представљене на цртежу. Ако међу тим збировима постоје 3 једнака, победник је први играч (који почиње игру); у противном – други. Који играч може да обезбеди победу, без обзира на игру његовог противника?



99. На тањиру се налазе 4 јабуке: од 600, 400, 300 и 250 грама. Пера узима једну јабуку, а затим Никола узима другу. Они почињу да једу по команди истовремено. Следећу јабуку сваки од њих може узети само кад поједе претходну. Они једу истом брзином (која се изражавау грамима у секунди).

Како треба да поступи Пера да би појео што већу количину јабука? (Колико највише грама може да обезбеди за себе Пера?)

100. Дата је непразна гомила жетона. Пит и Бил играју следећу игру. На почетку Пит дели гомилу на две или три (по свом избору) гомиле. Затим Бил дели једну од добијених гомила на две или три итд. Игра се завршава кад се на свакој гомили налази тачно један жетон (играч на потезу нема на располагању потез). Који од играча може да обезбеди победу, без обзира на то како игра његов противник?

101. На гомили се налази 3^n жетона, где је n природан број. Том и Џери играју следећу игру. На почетку Том дели гомилу на 3 једнаке гомиле. Затим Џери дели неку од добијених гомила на 3 једнаке (уколико је то могуће) итд. наизменично. Игра се завршава кад се више ниједна гомила не може поделити на 3 једнака дела. За које бројеве n Том може да постигне победу, без обзира на начин игре његовог противника?

102. На гомили се налази N жетона, при чему је број N дељив са 3. Том и Џери играју следећу игру. На почетку Том дели (ако је то могуће) гомилу на 2 или 3 једнаке гомиле (непразне). Затим Џери дели неку од добијених гомила на 2 или 3 једнаке, итд. наизменично. Игра се завршава кад се више ниједна гомила не може поделити ни на 2 ни на 3 једнака дела. За које бројеве N Том може да постигне победу, без обзира на начин игре његовог противника?

103. Полазећи од броја 2 играчи наизменично повећавају број, при чему се једним потезом број може повећати за 2 или удвостручити. Који играч има победничку стратегију (тј. могућност да победи, без обзира на то како игра његов противник), ако
а) губи играч који пређе дати број n;
б) добија играч који пређе дати број n?

Порекло задатака

1. II 4. – Савезно Југ 1983. у Приштини
2. IV 4. – Савезно Југ 1974. у Београду; 57. – "Шах и математика", Милан Јовчић, Богољуб Маринковић
3. III,IV 4. – Савезно Југ 1991. у Ваљеву
4. III,IV 1. – Међуопштинско 1991. у Војводини
5. II 4. – Савезно Југ 1992. у Подгорици
6. II 1. – Општинско 1992; 85 – "Математички проблеми за радозналце", Мирко Полонијо
7. I 5. – Општинско 1996; I 3 – Републичко 1976. (БиХ); 17. – "Математические задачи", Е.Б.Динкин, С.А.Молчанов, А.Л.Розенгаљ, А.К.Толпиго
8. IV 1. – Републичко 1996. у Новом Саду
9. II 2. – Републичко 1997. у Београду
10. III 4. – Општинско 1998.
11. I 3. – Републичко 1998. у Крагујевцу
12. II А 3. – Републичко 1999. у Чачку
13. **а)** I Б 1. **б)** I А 2. – Окружно 2000.
14. IV А 4. – Републичко 2001. у Београду
15. I 5. – Покрајинско 1988. у Суботици; VI 2. – "Забавна математика", Дане Клепић: $n = 15, k = 3$; 126. – "В царстве смекалки", Е.И.Игнатев
17. 458. – задачник "Кванта" Математика,
X 4, 1977 (XI) ; 242 – "Задачи всесојузних математических олимпиад", Н.Б.Васиљев, А.А.Јегоров
18. мало промењен 126. – "В царстве смекалки", Е.И.Игнатев
19. 130. – "В царстве смекалки", Е.И.Игнатев
20. "Крестики–нолики", Мартин Гарднер (стр 200.)
21. 12.-14. – "Числа Фибоначчи", Н.Н.Воробев (стр 125.-134.)
22. "The Great Book of Mind Teasers & Mind Puzzlers", George J. Summers (стр 76.)
23. предавање Ивице Бошњака на Палићу 10.4.1991.
24. "The Great Book of Mind Teasers & Mind Puzzlers", George J. Summers (стр 18. и стр 172.)

25. предавање Ивице Бошњака на Палићу 10.4.1991.
684. – задачник "Кванта" Математика,
26. 83 (стр. 259.) - "Задаци из математике са пријемних испита на техничким факултетима ", Р.Јанић, Д.Тошић
1. задатак, VII разред, XXI московска олимпијада (1958.)
27. (Мехмат) 4. (стр 81.) – "Задачи студенческих математических олимпиад", В.А.Садовничиј, А.А.Григорјан, С.В.Коњагин
28. 7. – "Квант" дља младших школьников, С.Савчев
29. 20. – "Квант" дља младших школьников, Х.Хаимов
30. 64. – "Квант" дља младших школьников, К.Кохас
31. 83. – "Квант" дља младших школьников, А.Савин
32. 113. – "Квант" дља младших школьников, С.Костин
33. 171. – "Квант" дља младших школьников, А.Шоповалов
34. 200. – "Квант" дља младших школьников, Р.Женодаров
35. 209. – "Квант" дља младших школьников, О.Крижановскиј
36. 215. – "Квант" дља младших школьников, Р.Женодаров
37. 281. – "Квант" дља младших школьников, А.Шоповалов
38. 296. – "Квант" дља младших школьников, Д.Калинин
39. 327. – "Квант" дља младших школьников, А.Шанин
40. 335. – "Квант" дља младших школьников
41. 18. заочниј конкурс – "Квант" дља младших школьников
42. IV 4. – Републичко 1975. (Србија); 84. "Шах и математика", Слободан Диков Новчић
43. 169. – "Шах и математика", Слободан Диков Новчић
44. 172. – "Шах и математика", Слободан Диков Новчић
45. 173. – "Шах и математика", Слободан Диков Новчић
46. 174. – "Шах и математика", Слободан Диков Новчић; 166 – "Математички проблеми за радозналце", Мирко Полонијо
47. 41 – "Математички проблеми за радозналце", Мирко Полонијо
48. 114 – "Математички проблеми за радозналце", Мирко Полонијо
49. 8. – задачник "Кванта" Математика,
50. 61. – задачник "Кванта" Математика,
51. 91. – задачник "Кванта" Математика,
52. 153. – задачник "Кванта" Математика;
VIII 6, 1972 (VI) ; 168 – "Задачи всесојузних математических олимпиад", Н.Б.Васиљев, А.А.Јегоров
53. 180. – задачник "Кванта" Математика,
54. 268. – задачник "Кванта" Математика,
55. 324. – задачник "Кванта" Математика,
56. 347. – задачник "Кванта" Математика,
57. 361. – задачник "Кванта" Математика,
58. 376. – задачник "Кванта" Математика,
59. 519. – задачник "Кванта" Математика,
IX 3, 1978 (XII) ; 256 – "Задачи всесојузних математических олимпиад", Н.Б.Васиљев, А.А.Јегоров
60. 523. – задачник "Кванта" Математика,
VIII 7, 1978 (XII) ; 262 – "Задачи всесојузних математических олимпиад", Н.Б.Васиљев, А.А.Јегоров
61. 731. – задачник "Кванта" Математика,
62. 847. – задачник "Кванта" Математика,
63. 680. – задачник "Кванта" Математика,
64. 1008. – задачник "Кванта" Математика,
65. 1048. – задачник "Кванта" Математика,
66. 1057. – задачник "Кванта" Математика,
VIII 8, X 5, 1987 (XXI) ; 455 – "Задачи всесојузних математических олимпиад", Н.Б.Васиљев, А.А.Јегоров
67. 1071. – задачник "Кванта" Математика,
68. 1098. – задачник "Кванта" Математика,
69. 1205. – задачник "Кванта" Математика,
70. 1210. – задачник "Кванта" Математика,
71. 1243. – задачник "Кванта" Математика; **а)** IX 6 **б)** XI 7 – 1990 (XXIV) всесојузна олимпијада, А.Берзинш

72. 1406. – задачник "Кванта" Математика,
73. IX 5, 1961 (I всеросијскаја) ; 10 – "Задачи всесојузних математических олимпиад", Н.Б.Васиљев, А.А.Јегоров
74. VIII 2, 1965 (V всеросијскаја) ; 57 – "Задачи всесојузних математических олимпиад", Н.Б.Васиљев, А.А.Јегоров
75. X–XI 5, 1966 (VI всеросијскаја) ; 83 – "Задачи всесојузних математических олимпиад", Н.Б.Васиљев, А.А.Јегоров
76. III,IV 4. – Међуопштинско 1991.
X 3, 1967 (I) ; 91 – "Задачи всесојузних математических олимпиад", Н.Б.Васиљев, А.А.Јегоров
77. X 4, 1969 (III) ; 125 – "Задачи всесојузних математических олимпиад", Н.Б.Васиљев, А.А.Јегоров
78. VIII 6, 1974 (VIII) ; 199 – "Задачи всесојузних математических олимпиад", Н.Б.Васиљев, А.А.Јегоров
79. VIII 2, 1975 (IX) ; 206 – "Задачи всесојузних математических олимпиад", Н.Б.Васиљев, А.А.Јегоров
80. VIII 4, 1982 (XVI) ; 330 – "Задачи всесојузних математических олимпиад", Н.Б.Васиљев, А.А.Јегоров
81. IX 2, 1984 (XVIII) ; 376 – "Задачи всесојузних математических олимпиад", Н.Б.Васиљев, А.А.Јегоров
82. VIII 4, 1987 (XXI) ; 444 – "Задачи всесојузних математических олимпиад", Н.Б.Васиљев, А.А.Јегоров
83. 5 – такмичење у Луксембургу 1980. (уместо ИМО), 2. предлог Холандије
84. 10 – предлози за ИМО 1986 (XXVII), 2. предлог Мађарске
85. 5 – ИМО 1990 (XXXI), 2. предлог Западне Немачке
86. 73 – предлози за ИМО 1988 (XXIX), 1. предлог Шведске
87. IX 4 – 1991 (XVII) всеросијскаја олимпијада
88. IX 7 – 1991 (XVII) всеросијскаја олимпијада
89. V, 2 – 1989 Лењинградска олимпијада
90. VII, 6 – 1989 Лењинградска олимпијада
91. VIII, 20 – 1989 Лењинградска олимпијада
92. VI, 4 – 1990 Лењинградска олимпијада
93. VIII, 3 – 1999 Изборно такмичење за учешће на 3. Јуниорској Балканијади; 609 – 1000 задатака
94. IX – 1997 Русија; 26 – Ратко Тошић, "Математички проблеми '97"; VII, 3 – 2003 Савезно; 1041 – 1000 задатака
95. VIII – 1997 Русија; 8 – Ратко Тошић, "Математички проблеми '97"
96. XI – 1997 Русија; 64 – Ратко Тошић, "Математички проблеми '97"
97. VIII – 1997 Украјина; 82 – Ратко Тошић, "Математички проблеми '97"
98. VIII – 1997 Украјина; 84 – Ратко Тошић, "Математички проблеми '97"
99. IX – 1997 Украјина; 87 – Ратко Тошић, "Математички проблеми '97"
100. VIII – 1997 Белорусија; 116 – Ратко Тошић, "Математички проблеми '97"
101. VIII – 1997 Белорусија; 122 – Ратко Тошић, "Математички проблеми '97"
102. IX – 1997 Белорусија; 143 – Ратко Тошић, "Математички проблеми '97"
103. 364 – Ратко Тошић, "Математички проблеми '97"