ЛОГИЧКО–КОМБИНАТОРНИ ЗАДАЦИ СА БОЈЕЊИМА

(Додатна настава у Математичкој гимназији, 2004.)
предавач: Владимир Балтић

1. Две квадратне плоче 5×5 прислоњене су једна уз другу тако да им се четири квадратића додирују, док је по један слободан. Да ли се таква плоча може покрити доминама 2×1?

18. Савезно 1977, I 4.

2. Из квадрата димензија 7×7 исечен је квадратић до угаоног (у шаховској нотацији Б1). Доказати да се добијена фигура не може поделити на 8 подударних делова, тако да је сваки од тих делова унија 6 квадратића димензија 1×1.

Републичко 1988, I 1.

3. Може ли се табла 50×50 исећи на делове облика ?

Ратко Тошић, "Решени задаци из математике за младе математичаре", 280.

4. Може ли скакач, померајући се на прописани начин, направити пут од левог доњег угла шаховске плоче до десног горњег угла, а да при томе дође на свако поље шаховске плоче тачно једанпут?

Ратко Тошић, "Решени задаци из математике за младе математичаре", 292.

5. Један миш грицка парче сира у облику коцке са ивицом 3. Коцка сира подељена је на 27 мањих коцкица са ивицом 1. Миш грицка сир на тај начин што почиње са коцкицом у једном од темена. Појевши целу коцкицу, прелази на суседну, која са тек поједеном коцкицом има заједничку страну. Да ли миш може појести цело парче сира тако да последња коцкица коју поједе буде она у центру коцке?

22. Савезно 1981, I 4.

6. Може ли се 27 "цигли" димензија $1cm \times 2cm \times 4cm$ сложити у коцку димензија $6cm \times 6cm \times 6cm$?

Ратко Тошић, "Решени задаци из математике за младе математичаре", 297.

7. Квадрат величине 5×5 подељен је на 25 поља. У свако поље постављен је по један жетон. Један потез се састоји у премештању било која два жетона, сваког од њих на суседно поље. Уочимо неко поље. Да ли се може постићи да се после извесног броја потеза свих 25 жетона нађу у уоченом пољу?

27. Савезно 1986, I 4.

8. Из шаховске плоче 8×8 изрезана су: **а)** два поља исте боје; **б)** два поља различите боје. Може ли се плоча са 62 поља, добијена на тај начин, покрити доминама, тј. правоугаоницима 1×2 од којих сваки покрива два суседна поља?

Ратко Тошић, "Решени задаци из математике за младе математичаре", 277.

9. Из шаховске плоче 8×8 изрезано је неколико поља. Одредити највећи број поља који треба да остане на плочи, тако да се на њу не може поставити ниједна домина. (Домина треба да покрије два суседна поља.)

Ратко Тошић, "Решени задаци из математике за младе математичаре", 285.

10. Квадрат је подељен на квадратну мрежу 100×100 и у њој је повучено неколико самонепресецајућих линија које иду по страницама квадратића и које немају заједничких тачака. Те линије су строго унутар квадрата, а крајеви им на њиховој граници. Доказати да осим темена квадрата постоји чвор мреже (унутра или на граници) који не припада ни једној линији.

11. Свесовјетска олимпијада 1977, IX 5.

11. Замак има облик (посматрано у равни) једнакостраничног троугла са страницом 100 метара. Он је подељен на 100 троугаоних соба и све имају једнаку страницу – 10 метара. На средини сваког зида између соба су врата. Доказати да ако је човек приликом обиласка замка прошао кроз сваку собу највише једном онда је видео највише 91 собу.

6. Свесовјетска олимпијада 1972, VIII 5.

12. На свим белим пољима првих 6 редова шаховске табле налазе се пешаци. У сваком потезу пешак прескаче једног од пешака који му је суседан по дијагонали и тиме се помера за два поља по дијагонали долазећи на слободно поље, а прескочени пешак се склања са табле. Да ли је могуће играти тако да после неког броја потеза на табли остане само један пешак?

20. Савезно 1979, III 4.

13. Може ли скакач, померајући се на прописани начин, обићи "шаховску плочу" **а)** 7×9; **б)** 4×8, тако што ће поћи од једног угаоног поља, стати на свако поље тачно једанпут и вратити се на полазно поље?

Ратко Тошић, "Решени задаци из математике за младе математичаре", 293.

14. Колико се највише скакача може поставити на шаховску плочу 8×8, тако да се никоја два међусобно не нападају?

Ратко Тошић, "Решени задаци из математике за младе математичаре", 294.

15. На пољима табле 9×9 налазе се бубице, по једна на сваком пољу. На сигнал свака од бубица прелази у једно од суседних поља по дијагонали. При томе у неком пољу може бити више бубица, а нека могу бити празна. Наћи најмањи могућ број слободних поља.

15. Сверуска олимпијада, IX 2.

16. Дат је правоугаоник димензија 12×11.

а) Доказати да је могуће прекрити га са правоугаоницима димензија 1×6 и 1×7 који се не преклапају, али тако да тих правоугаоника има тачно 20.

б) Доказати да је немогуће прекрити га са 19 таквих правоугаоника који се не преклапају.

18. Сверуска олимпијада, X 6.

17. На шаховској табли 8×8 постављен је 21 правоугаоник димензија 3×1, тако да је остало непокривено само једно поље шаховске табле. Одредити које то поље може бити.

33. Савезно 1992, I 4. | Ратко Тошић, "Решени задаци из математике за младе математичаре", 287.

18. Назваћемо делфином фигуру која се по шаховској табли креће једно поље на горе ($\uparrow$), у десно ($\rightarrow$) или лево доле ($\swarrow$). Може ли делфин да полазећи из доњег левог угла обиђе тачно једанпут свако поље и затим се врати на полазно?

24. Савезно 1983, I 4.

19. У свим пољима, осим једног, квадратне таблице $n \times n$ стоје знаци $+$, а у једном пољу знак $-$:

а) $n = 4$ и знак $-$ стоји уз ивицу табле, али не у углу.

б) $n = 8$ и знак $-$ не стоји у углу.

Дозвољено је мењати истовремено све знаке у једној произвољно изабраној врсти, колони или малој дијагонали (низ поља паралелан некој од дијагонала таблице). Угаоно поље се узима као низ од једног поља. Доказати да је оваквим изменама немогуће добити таблицу са свим знацима $+$.

6. Свесовјетска олимпијада 1972, X 6. | Јаглом, Шкљарски 181.

20. Табла 9×10 прекривена је доминама 2×1 тако да свака домина прекрива тачно 2 поља. Доказати да се табла не може прекрити тим доминама тако да свака домина која је била хоризонтално буде вертикално и обрнуто.

21. Конвексан шестоугао је подељен на троуглове од којих су суседни различито обојени (види слику) двема бојама. Да ли је могуће за десетоугао такво бојење да троуглови који садрже ивице десетоугла буду обојени истом бојом?

22. Да ли се бесконачна шаховска табла може обојити са 5 боја тако да свака фигура облика $+$ (5 квадратића) садржи свих 5 боја, а свака фигура облика $\boxed{\square}$ (у квадрату 3×3 је избачен централни квадрат) не садржи тачно једну боју?

Лењинградска олимпијада 1980, VI 6.

23. Колико се највише једнакокраких крстића површине 5 може изрезати из табле 6×6?

Републичко 1999, III 3, IV 5.

24. У таблици 3×3 уписани су редом бројеви од 1 до 9. Дозвољена операција је одузимање мањег од два броја из суседних квадратића од оба та броја. Да ли се може доћи до свих нула?

Републичко 1992, IV 1.

25. Из квадрата 11×11 извађено је централно поље. Показати да се преосталих 120 квадратића не могу прекрити помоћу 15 правоугаоника 8×1.

26. Колико се највише фигура подударних са може поставити у таблу 2003×2003 без преклапања тако да свака фигура покрива тачно 4 јединична поља?

Републичко 2003, III 5.

27. Краљ обилази шаховску таблу димензија 8×8 тако да преко сваког поља прелази само једном, и својим последњим потезом се враћа на полазно поље. Притом је његов пут такав да путања, добијена спајањем центара поља преко којих је краљ прешао, представља изломљену линију која не сече саму себе. Коју најмању, а коју највећу дужину може имати ова линија, узимајући да је ивица шаховског поља једнака 1?

28. Који је најмањи број гађања потребан за сигурно "потапљање подморнице" у игри подморница, ако су димензије "мора" 8×8, а "подморнице" 1×4? (После сваког гађања играчу се саопштава да ли је погодио "подморницу". За "потапање" потребно је погодити све квадратиће који чине "подморницу".)

4. Мехмат – руско студентско такмичење

29. Игра "подморница" се игра на табли 7×7. Који је најмањи број гађања потребно извршити да би сигурно ранили четвороделну подморницу, ако: **а)** она има облик ; **б)** се она састоји од четири поља која су спојена једно са другим странама?

21. Свесовјетска олимпијада 1987, VIII 4.

30. На пољима шаховске плоче 8×8 постављени су бројеви, тако да збир у било која четири поља, која се могу покрити фигуром (фигура се може закретати и превртати) буде исти. Колико бројева може бити употребљено при оваквим условима?

Ратко Тошић, "Решени задаци из математике за младе математичаре", 288.

31. Да ли је могуће на пољима "шаховске" плоче 10×10 исписати бројеве од 1 до 100, тако да збир бројева на делу плоче од четири поља, који се може покрити фигуром (фигура се може закретати) буде паран број?

Ратко Тошић, "Решени задаци из математике за младе математичаре", 289.

32. Да ли је могуће на пољима "шаховске" плоче 6×6 исписати бројеве од 1 до 36, тако да збир бројева на делу плоче од четири поља, који се може покрити фигуром (фигура се може закретати и превртати) буде дељив са 9?

Ратко Тошић, "Решени задаци из математике за младе математичаре", 290.

33. На сваком пољу шаховске плоче 8×8 написан је број. Познато је да је збир бројева на свака три поља, која се могу покрити фигуром (фигура се може закретати) једнак 3. Доказати да је на сваком пољу написан број 1.

Ратко Тошић, "Решени задаци из математике за младе математичаре", 291.

34. Да ли је могуће таблу 8×8 попунити бројевима $1, 2, \ldots, 64$ (сваки број се појављује једном) тако да је збир бројева у свакој фигури F дељив са 4.
а) фигура F је ;
б) фигура F је једна од , . (Фигуре F се могу ротирати!)

Предлог за БМО 2003.

35. Комарац се налази у доњем левом углу правоугаоне таблице формата 2003×2004. Комарац лети изнад ове таблице на следећи начин: када полети из неког поља и прелети 99 поља, он слети на 100-то да се одмори (линија којом се комарац креће не мора да буде права линија, може бити и изломљена и сме да сече саму себе, али сваки "корак" комарца мора бити паралелан ивицама таблице). Затим комарац поново полеће са тог поља, прелеће преко 99 поља и слеће на 100-то... Да ли комарац може слетети у горњи десни угао?

Општинско 2004, I,II 5.

36. Дата је бела табла 2002×2003 и доста црвене и беле боје.
а) Дозвољено је у једном кораку променити боју ма која четири поља која чине квадрат 2×2. Да ли се после неколико корака може добити исти број белих и црвених поља?
б) Дозвољено је у једном кораку променити боју ма којих девет поља која чине квадрат 3×3. Да ли се после неколико корака може добити исти број белих и црвених поља?

Окружно 2004, II 5.

37. Шаховска табла димензија 2004×2004 је поплочана доминама димензија 1×4. Може ли број хоризонталних домина да буде једнак броју вертикалних домина?

Републичко 2004, I 4.

38. Дата је коцка са страницом дужине 4. Могу ли се њене три пљосни са заједничким теменом потпуно облепити са 16 папирних правоугаоних трака 1×3?

Русија 1997, X

39. Нека је *кука* фигура састављена од шест јединичних квадрата као на слици или ма која фигура добијена од ове фигуре применом ротација и осних симетрија. Одредити све $m \times n$ правоугаонике који се могу покрити кукама тако да

- правоугаоник буде покривен без празнина и без преклапања;
- ни један део куке не буде изван правоугаоника.

ИМО 2004, 3.

40. *Дијамант* реда n је вертикално симетричан скуп јединичних квадрата који у врстама има $1, 3, \ldots, 2n-3, 2n-1, 2n-3, \ldots, 3, 1$ квадрата редом (видети слику). Нека је $A(n,k)$ број начина на које може да се постави k дисјунктних 2×2 квадрата у $(2n-1) \times (2n-1)$ квадратну мрежу, а $B(n,k)$ број начина на које може да се постави k дисјунктних домина на дијамант реда n. Симетрична постављања се сматрају различитим. Доказати да је $A(n,k) < B(n,k)$ за $2 \leqslant k \leqslant (n-1)^2$.

Предлог за БМО 2004.

41. На бесконачној шаховској табли игра се следећа игра. На почетку је у поља квадрата $n \times n$ распоређено n^2 фигура. У сваком потезу једном од фигура прескаче се фигура на суседном пољу (по хоризонтали или вертикали) и доскаче се на њој суседно слободно поље. Прескочена фигура се уклања са табле.
За које n игра може да се заврши тако што на табли остаје тачно једна фигура?

ИМО 1993, 3.

42. На дно правоугаоне кутије $m \times n$, где су m и n непарни природни бројеви, постављене су домине величине 2×1 (без препокривања), тако да је остао непокривен само квадрат 1×1 (рупа) у углу кутије. Ако домина належе на рупу краћом страном, дозвољено је да се помери тако да покрије рупу (при томе се добија нова рупа). Доказати да се помоћу таквих померања домина рупа може преместити у било који угао кутије.

Русија 1997, XI