# Одабрани задаци из комбинаторике

Додатна настава у Математичкој гимназији

Предавач: Растко Маринковић

**1.** Наћи број затворених изломљених линија дужине $2n$ повучених дуж линија целобројне квадратне мреже са почетком и крајем у једном истом фиксираном чвору. (Изломљена линија може пролазити кроз један исти чвор и чак дуж једног истог отсечка више пута).

**2.** Квадрат димензија $n \times n$ је издељен на јединичне квадратиће. Колико има изломљених линија дужине $2n$, дуж линија мреже из једног темена квадрата до дијаметрално супротног, а при том се налазе у потпуности испод дијагонале квадрата?

**3.** На неким изборима од два кандидата $A$ и $B$, кандидат $A$ је добио $a$ гласова, а $B$ $b$ гласова, при чему $a > b$. На колико се начина може спровести пребројавање гласачких листића тако да у сваком тренутку кандидат $A$ има више гласова него $B$? (познати Бертранов проблем гласања)

**4.** Парламент неке државе има 2005 места и три политичке странке. На колико начина је могуће расподелити њихове мандате, тако да ни једна странка сама нема апсолутну већину?

**5.** Дат је $n-$тоугао $A_1A_2...A_n$. Колико има $k-$тоуглова чија су темена нека од темена датог $n-$тоугла а странице неке дијагонале (дакле само дијагонале, а не странице) тог $n-$тоугла?

**6.** Дата је нека фамилија $\mathcal{F}$ различитих подскупова неког $n-$точланог скупа $S$, таква да ма која њена два члана имају непразан пресек. Доказати да је $\mid \mathcal{F} \mid \leqslant 2^{n-1}$ . Ако је $\mid \mathcal{F} \mid < 2^{n-1}$, доказати да се онда $\mathcal{F}$ може проширити до фамилије од $2^{n-1}$ подскупова од $S$ са очуваним својством пресецања.

**7.** Посматрајмо све бинарне бројеве дужине $n$ (при том ћемо „дозволити" да могу почињати и са 0). Рећи ћемо да број $a_1a_2...a_n$ покрива број $b_1b_2...b_n$ ако је $a_i \geqslant b_i$ за свако $i = 1, 2..., n$. Колико максимално бинарних бројева дужине $n$ можемо одабрати тако да међу њима никоја два не покривају један другог?

**8.** На двору краља Артура скупило се $2n$ витезова. Сваки од њих међу присутнима има тачно по једног непријатеља. На колико начина их је могуће распоредити за округлим столом тако да никоја два непријатеља не седе један поред другог? (При том ћемо распореде који се могу добити један из другог неком ротацијом или симетријом сматрати различитим).

**9.** Колико има $n-$тоцифрених бројева састављених само од цифара 1,2 и 3 који у свом запису нигде не садрже две суседне цифре 1?

**10.** Нека је $n$ дат природан број. Посматрајмо скуп $S$ свих $2n+2$-очланих низова $a_1a_2...a_{2n+2}$ састављених само од 0 и 1-иница. Наћи минимално $k$ за које је могуће одабрати $k$ низова из $S$ тако да се произвољан елемент из $S$ поклапа на бар $n+2$ места са бар једним од тих $k$ низова.

**11.** Правоугаоник димензија $m \times n$ ($m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > 1$) издељен је на јединичне квадратиће. На колико начина је могуће одстранити 2 квадратића из правоугаоника тако да се преостали део фигуре може прекрити прекрити правоугаоницима димензија $2 \times 1$?

**12.** Нека је $n > 1$ природан број. Наћи број пермутација $(a_1, a_2, ..., a_n)$ бројева $1, 2, ..., n$ које имају следећу особину: постоји тачно један индекс $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ за који је $a_i > a_{i+1}$.

**13.** Посматрајмо скуп свих $n-$тоцифрених бројева који у свом запису садрже само цифре 1 и 2. Да ли је могуће разбити га на два дисјунктна скупа тако да збир ма која два броја из истог скупа у свом запису садржи бар две цифре 3.

**14.** Шифра за сеф је 3-оцифрен број у чијем запису учествују цифре од 1 до 8. Пошто је механизам на сефу покварен, довољно је да на било која 2 од 3 места поставимо праву цифру да би се брава отворила. Који је минималан број комбинација које треба да испробамо да би смо гарантовано отворили сеф? (Наравно ако нам "права" комбинација није већ позната)

**15.** На двору краља Артура скупило се $2n$ витезова. Ниједан од њих међу присутнима нема више од $n-1$ непријатеља. Доказати да их је могуће распоредити за округлим столом тако да никоја два непријатеља не седе један поред другог.