Припреме за СМО

Задаци из комбинаторике

Предавач: Александар Пејчев

1. Дат је 2008-оугао чије се никоје три дијагонале не секу у једној тачки. Свака од његових дијагонала обојена је једном од 1003 боје. Доказати да постоји троугао чије све странице леже да дијагоналама које имају исту боју. (Темена троугла не морају обавезно да буду темена многоугла.)

2. На једној вечерњој забави (радња задатка се дешавала пре стотинак година) присутно је $n$ момака, сваки са својом девојком. На [пчетку све девојке седе на столицама постављеним дуж зида кружне дворане. Сваки момак позива једну девојку на плес. После сваког плеса момци испраћају девојке до њихових седишта и за следећи плес позивају девојку са суседне столице идући у смеру казаљке на сату. За које вредности $n$ је могуће на почетку разместити девојке на столице тако да у току сваког плеса неки момак игра са својом девојком, ако у току вечери има тачно $n$ плесова?

3. Дат је скуп $M$ који се састоји од 1985 различитих придоних бројева. Ниједан од њих није дељив простим бројем већим од 26. Доказати да се из скупа $M$ могу изабрати 4 међусобно различита броја чији је производ потпун четврти степен целог броја.

4. На правој је дато $mn+1$ дужи. Доказати да постоји $m+1$ дужи које имају заједничку тачку или $n+1$ дужи које су међусобно дисјунктне.

5. На шаховском турниру је свако играо са сваким и ниједна партија није завршена ремијем. Произвољан учесник $A$ се зове *кинг* турнира ако ако за сваког другог учесника $B$ важи да је $A$ победио $B$ или да постоји $C$ тако да је $A$ победио $C$ и $C$ победио $B$ (наравно, могу важити и оба услова).

   (а) Доказати да на турниру постоји бар један кинг.

   (б) Доказати да на турниру не могу постојати тачно два кинга.

   (ц) Доказати да су једини парови $(n,k), n \geq k$ природних бројева за које не постоји турнир са $n$ учесника и $k$ кингова $(4,4),(n,0),(n,2)$.

6. Скуп $S = \{1,2,...,n\}$ је први пут разбијен на $m$, а други пут на $m+k$ непражин подскупова, при чему је $k > 0$. Доказати да се бар $k+1$ елемент скупа $S$ први пут налазио у бројнијем скупу него други пут.

7. Нека је $n$ природан број и нека су $A_1, A_2, ..., A_{2n+1}$ подскупови неког скупа $B$. Претпоставимо да:

   (а) сваки $A_i$ има тачно $2n$ елемената;

   (б) сваки $A_i \bigcap A_j$ $(1 \leq i < j \leq 2n+1)$ садржи тачно један елемент и

   (ц) сваки елемент из $B$ јесте елемент бар двају скупова $A_i$.

   За које вредности броја $n$ можемо сваком елементу скупа $B$ придружити један од бројева 0 или 1 на такав начин да за сваки скуп $A_i$ број његових елемената којима је придружена 0 износи 1?

8. Дат је низ тачака $A_i(x_i, y_i), 0 < x_i < 1, 0 < y_i < 1, i = 1, 2, ..., n^2$. Доказати да постоји пермутација $(i_1, ..., i_n)$ бројева $1, 2, ..., n^2$ таква да дужина изломљене линије $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_{n^2}}$ није већа од $2n + 1$.

9. Да ли је могуће разложити троугао на коначан број конвексних петоуглова? А шестоуглова?

10. Дати су природни бројеви $a_1, ...a_n$ такви да важи

    (а) $a_1 = 1$

    (б) $a_i \leq a_{i+1} \leq 2a_i$ за $i = 1, 2..., n - 1$;

    (ц) $a_1 + ... + a_n = 2008$.

    Да ли је могуће дате бројеве поделити у две групе, тако да је збир бројева у једној једнак збиру бројева у другој групи?

11. Нека су $n$ и $k$ природни бројеви и нека је $S$ скуп од $n$ тачака у равни, таквих да:

    (а) никоје три тачке из $S$ нису колинеарне и

    (б) за сваку тачку $P \in S$ постоји бар $k$ тачака које су на подједнаком растојању од $P$.

    Доказати да је $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$

12. Дате су суме

$$S_1 = \left[\frac{1}{n}\right] + \left[\frac{4}{n}\right] + ... + \left[\frac{(n-1)^2}{n}\right]$$

$$S_2 = [\sqrt{n}] + [\sqrt{2n}] + ... + [\sqrt{(n-1)n}].$$

    Доказати да је $S_1 + S_2 \geq (n-1)^2$, при чему једнакост важи акко $n$ није дељиво квадратом ниједног простог броја.

13. Нека су $n > 5$ и $3 \leq p \leq n - p$. $p$ темена правилног $n-$тоугла је обојено у црвено, а $n-p$ у плаво. Доказати да постоје два подударна многоугла, од којих сваки има бар $[\frac{p}{2}] + 1$ темена, један са црвеним, један са плавим теменима.

14. Нека је $n$ паран број и $S$ скуп свих низова дужине $n$ чији су чланови нуле и јединице, а бар један члан сваког низа је једнак 1. Доказати да се $S$ може поделити на дисјунктне трочлане подкупове тако да важи: за свака три низа $(a_i)_{i=1}^n, (b_i)_{i=1}^n, (c_i)_{i=1}^n$ који припадају истом подскупу и свако $i \in \{1, 2, ..., n\}$ број $a_i + b_i + c_i$ је дељив са 2.

15. За матрицу $n \times n$ чији су елементи у скупу $\{1, 2, ..., 2n - 1\}$ кажемо да је *сребрна* ако за свако $i$ унија $i-$ог реда и $i-$те колоне садржи $2n - 1$ различитих бројева. Доказати

    (а) Не постоји сребрна матрица димензије 1997;

    (б) За бесконачно много $n \in N$ постоји сребрна матрица реда $n$.