$$\begin{bmatrix} \textbf{С} & \textbf{И} & \textbf{С} & \textbf{Т} \\ \textbf{Е} & \textbf{М} & \textbf{А} & \textbf{Ј} \\ \textbf{1} & & \bullet & \textbf{2} \\ \textbf{Е} & \textbf{Д} & \textbf{Н} & \textbf{А} \\ \textbf{Ч} & \textbf{И} & \textbf{Н} & \textbf{А} \end{bmatrix}$$

Авала, фебруар 2013.

Милош Милосављевић

1. [RUS 1992] У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) = 1+y^7 \\ (1+y)(1+y^2)(1+y^4) = 1+x^7 \end{array}.$$

2. [TG 1988] У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} (x_1+x_2+x_3)^5 = 3x_4 \\ (x_2+x_3+x_4)^5 = 3x_5 \\ (x_3+x_4+x_5)^5 = 3x_1 \\ (x_4+x_5+x_1)^5 = 3x_2 \\ (x_5+x_1+x_2)^5 = 3x_3 \end{array}.$$

3. [SRB 2007] У скупу позитивних реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \ldots + x_n^n = n \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = \frac{n(n+1)}{2} \end{array}.$$

4. [IMO 1990LL] Нека су n и k различити непарни природни бројеви. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x^n + y^n = 1 \\ x^k + y^k = 1 \end{array}.$$

5. [Putnam 1987] Криве A, B, C и D дефинисане су са:

$$A = \{(x,y)|\ x^2 - y^2 = \frac{x}{x^2+y^2}\},\ B = \{(x,y)|\ 2xy + \frac{y}{x^2+y^2} = 3\},$$

$$C = \{(x,y)|\ x^3 - 3xy^2 + 3y = 1\},\ D = \{(x,y)|\ 3x^2y - 3x - y^3 = 0\}.$$

Доказати да је $A \cap B = C \cap D$.

6. [CHN 2005] У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} 5(x+\frac{1}{x}) = 12(y+\frac{1}{y}) = 13(z+\frac{1}{z}) \\ xy + yz + zx = 1 \end{array}.$$

7. [GER 2004] У скупу комплексних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} z_1 + 2z_2 + \ldots + nz_n = 0 \\ z_1^2 + 2z_2^2 + \ldots + nz_n^2 = 0 \\ \vdots \\ z_1^n + 2z_2^n + \ldots + nz_n^n = 0 \end{array}.$$

8. [IRN 2000, GER 2005] Доказати да за сваки природан број n постоји полином $P \in \mathbb{Z}[x]$, степена n, такав да су бројеви $P(0), P(1), \ldots, P(n)$ различити степени броја 2.

9. Нека је $n > 2$ природан број. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x_2 = \frac{7}{4} + \frac{1}{x_1^2} \\ x_3 = \frac{7}{4} + \frac{1}{x_2^2} \\ \vdots \\ x_n = \frac{7}{4} + \frac{1}{x_{n-1}^2} \\ x_1 = \frac{7}{4} + \frac{1}{x_n^2} \end{array} .$$

10. [RUS 1984] Нека су x, y и z позитивни реални бројеви за које важи

$$\begin{array}{c} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25 \\ \frac{y^2}{3} + z^2 = 9 \\ z^2 + zx + x^2 = 16 \end{array} .$$

Одредити све могуће вредности израза $xy + 2yz + 3zx$.

11. [AUS 1979] Нека су $a \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$. У скупу комплексних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = a \\ x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a^2 \\ \vdots \\ x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n = a^n \end{array} .$$

12. [ROM 2001] Нека су a, b и c комплексни бројеви за које важи

$$\begin{array}{c} (a+b)(a+c) = b \\ (b+c)(b+a) = c \\ (c+a)(c+b) = a \end{array} .$$

Доказати да су бројеви a, b и c реални.

13. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} xy = y^6 + y^4 + y^2 + 1 \\ yz^3 = z^6 + z^4 + z^2 + 1 \\ zx^5 = x^6 + x^4 + x^2 + 1 \end{array} .$$

14. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x^5 = y + y^5 \\ y^5 = z + z^5 \\ z^5 = t + t^5 \\ t^5 = x + x^5 \end{array} .$$

15. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = a^3 + b^3 + c^3 \\ abc = 2 \end{array} .$$

16. [MO 1957] У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} 1-x_1^2=x_2 \\ 1-x_2^2=x_3 \\ \vdots \\ 1-x_{98}^2=x_{99} \\ 1-x_{99}^2=x_1 \end{array} .$$

17. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x[y]=7 \\ y[x]=8 \end{array} .$$

18. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x=y^3+y-8 \\ y=z^3+z-8 \\ z=x^3+x-8 \end{array} .$$

19. Одредити све вредности $a \in \mathbb{R}$ за које систем једначина

$$\begin{array}{c} x^4=yz-x^2+a \\ y^4=zx-y^2+a \\ z^4=xy-z^2+a \end{array}$$

има највише једно реално решење.

20. [POL 2010] У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x^2-(y+z+yz)x+(y+z)yz=0 \\ y^2-(z+x+zx)y+(z+x)zx=0 \\ z^2-(x+y+xy)z+(x+y)xy=0 \end{array} .$$

21. [IRN 1987] У скупу целих бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} a^3-b^3-c^3=3abc \\ a^2=2(b+c) \end{array} .$$

22. Одредити све $a \in \mathbb{R}$ за које систем једначина

$$\begin{array}{c} x+y+z=0 \\ xy+yz+azx=0 \end{array}$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

23. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x|x|+y|y|=1 \\ [x]+[y]=1 \end{array} .$$

24. [FIN 2005] Нека је $n \in \mathbb{N}$. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} (x+y)^n=z \\ (y+z)^n=x \\ (z+x)^n=y \end{array} .$$

25. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}+x_{n-1}=\frac{1}{x_n} \\ x_1+x_2+\ldots+x_{n-2}+x_n=\frac{1}{x_{n-1}} \\ \vdots \\ x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n=\frac{1}{x_1} \end{array}.$$

26. Ако за неке реалне бројеве $x_1, x_2, \ldots, x_{2013}$ важи

$$\begin{array}{c} \sum_{k=1}^{2013} k^2 x_k = 2 \\ \sum_{k=1}^{2013} (k+1)^2 x_k = 20 \\ \sum_{k=1}^{2013} (k+2)^2 x_k = 201 \end{array}$$

одредити све могуће вредности израза $\sum_{k=1}^{2013}(k+3)^2 x_k$.

27. [AUT-POL 2001] За $n>2$, у скупу позитивних реалних бројева, решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x_1+x_2=x_3^2 \\ x_2+x_3=x_4^2 \\ \vdots \\ x_{n-1}+x_n=x_1^2 \\ x_n+x_1=x_2^2 \end{array}.$$

28. У скупу комплексних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x^4+y^2-xy^3-\frac{9}{8}x=0 \\ y^4+x^2-yx^3-\frac{9}{8}y=0 \end{array}.$$

29. Одредити све вредности реалних параметара a и b за које систем једначина

$$\begin{array}{c} xyz+z=a \\ xyz^2+z=b \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{array}$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

30. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Одредити све $x, y, z \in [0,1]$ за које важи

$$\begin{array}{c} x^n+(1-y)^n=\frac{1}{2^{n-1}} \\ y^n+(1-z)^n=\frac{1}{2^{n-1}} \\ z^n+(1-x)^n=\frac{1}{2^{n-1}} \end{array}.$$

31. Нека су a и b задати реални бројеви. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x^2+y^2=a^2+b^2 \\ x^3+y^3=a^3+b^3 \end{array}.$$

32. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x^{2011}+y^{2011}+z^{2011}=2^{2011} \\ x^{2012}+y^{2012}+z^{2012}=2^{2012} \\ x^{2013}+y^{2013}+z^{2013}=2^{2013} \end{array}.$$

33. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x+\sqrt{x^2-2x+2}=3^{y-1}+1 \\ y+\sqrt{y^2-2y+2}=3^{x-1}+1 \end{array} .$$

34. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} (1+4^{x-y})5^{1-x+y}=1+3^{x-y+1} \\ x^2-3y\sqrt{y-\frac{1}{x}}=1-2y \end{array} .$$

35. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} [\sqrt{y-1}]^2=x-1 \\ 2[\sqrt{y+2\sqrt{x}}]=y-1 \end{array} .$$

36. У зависности од реалног параметра $a \geq 1$, у скупу реалних бројева, решити систем једначина

$$\begin{array}{c} |x_1-x_2|=ax_3 \\ |x_2-x_3|=ax_4 \\ \vdots \\ |x_{2006}-x_{2007}|=ax_1 \\ |x_{2007}-x_1|=ax_2 \end{array} .$$

37. [BUL 1968] Одредити све природне бројеве n за које постоје позитивни бројеви $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такви да важи

$$\begin{array}{c} x_1+x_2+\ldots+x_n=9 \\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=1 \end{array} .$$

38. [UKR 2009] У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x^3=2y^3+y-2 \\ y^3=2z^3+z-2 \\ z^3=2x^3+x-2 \end{array} .$$

39. [GER 1980] У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} 2x+x^2y=y \\ 2y+y^2z=z \\ 2z+z^2x=x \end{array} .$$

40. [RUS 1993] У скупу позитивних реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x_1+\frac{1}{x_2}=4 \\ x_2+\frac{1}{x_3}=1 \\ x_3+\frac{1}{x_4}=4 \\ x_4+\frac{1}{x_5}=1 \\ \vdots \\ x_{99}+\frac{1}{x_{100}}=4 \\ x_{100}+\frac{1}{x_1}=1 \end{array} .$$

41. [RUS 2011] Познато је да су a, b и c реални бројеви, различити од нуле, такви да сваке две од три једначине $ax^{11}+bx^4+c=0$, $bx^{11}+cx^4+a=0$ и $cx^{11}+ax^4+b=0$ имају заједничко реално решење. Доказати да све три једначине имају заједничко решење.

42. [Kvant 1970, SRB 2008] Имамо исправан часовник који има казаљку за минуте и сате, међутим није могуће разликовати те казаљке. Колико има положаја казаљки на основу којих се не може установити тачно време (у том тренутку)?

43. [TG 1998] Познато је да су A, B, C и D позитивни реални бројеви, такви да систем

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 = A \\ |x| + |y| = B \end{gathered}$$

има m решења, док систем

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 + z^2 = C \\ |x| + |y| + |z| = D \end{gathered}$$

има n решења. Одредити m и n, ако је познато да је $m > n \geq 1$.

44. [MO 1962] Бројеви $x_1, x_2, \ldots, x_{1962}$ задовољавају систем једначина

$$\begin{gathered} x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{1962} = 1 \\ x_1 - x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{1962} = 1 \\ x_1 \cdot x_2 - x_3 \cdot x_4 \cdot \ldots \cdot x_{1962} = 1 \ . \\ \vdots \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{1961} - x_{1962} = 1 \end{gathered}$$

Одредити све вредности које може имати x_{25}.

45. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{gathered} x + 3y = 4y^3 \\ y + 3z = 4z^3 \\ z + 3x = 4x^3 \end{gathered} \ .$$

46. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{gathered} \tfrac{1-x^2}{1+x^2} = \tfrac{2y}{1+y^2} \cdot \tfrac{1-z^2}{1+z^2} \\ xy + yz + zx = 1 \end{gathered} \ .$$

47. У скупу комплексних бројева решити систем једначина

$$\begin{gathered} a|b| + b|a| = 2c^2 \\ b|c| + c|b| = 2a^2 \\ c|a| + a|c| = 2b^2 \end{gathered} \ .$$

48. [ROM 2002] У скупу комплексних бројева решити систем једначина

$$\begin{gathered} x(x-y)(x-z) = 3 \\ y(y-z)(y-x) = 3 \\ z(z-x)(z-y) = 3 \end{gathered} \ .$$

49. [ROM 2003] Нека су $z_k \neq 0, k = \overline{1,5}$ комплексни бројеви једнаког модула за које важи $\sum_{k=1}^{5} z_k = \sum_{k=1}^{5} z_k^2 = 0$. Доказати да су $z_1, \ldots, z_5$, у неком поретку, темена правилног петоугла.

50. [IMO 1990LL, SRB 2011] Одредити све вредности $t \in \mathbb{R}$ за које систем једначина

$$\begin{gathered} x + y + z + v = 0 \\ xy + yz + zv + t(xz + xv + yv) = 0 \end{gathered}$$

има јединствено решење у $\mathbb{R}^4$.

51. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x^2-|x|=yz \\ y^2-|y|=zx \\ z^2-|z|=xy \end{array} .$$

52. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} \sqrt{3x}(1+\frac{1}{x+y})=2 \\ \sqrt{7y}(1-\frac{1}{x+y})=4\sqrt{2} \end{array} .$$

53. Одредити све природне бројеве n за које систем једначина

$$\begin{array}{c} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ x^n+y^n+z^n=3 \end{array}$$

има јединствено решење у скупу комплексних бројева.

54. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x^2+x-1=y \\ y^2+y-1=z \\ z^2+z-1=x \end{array} .$$

55. [CZE-POL-SVK 2010] У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} a\sqrt{b}-c=a \\ b\sqrt{c}-a=b \\ c\sqrt{a}-b=c \end{array} .$$

56. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} (x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1 \\ x+\frac{x}{\sqrt{y^2-1}}+\frac{35}{12}=0 \end{array} .$$

57. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} y^3-6x^2+12x-8=0 \\ z^3-6y^2+12y-8=0 \\ x^3-6z^2+12z-8=0 \end{array} .$$

58. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x+y+z=0 \\ x^3+y^3+z^3=18 \\ x^7+y^7+z^7=2058 \end{array} .$$

59. Нека су a,b,c,x,y и z комплексни бројеви за које важи

$$\begin{array}{c} a=\frac{b+c}{x-2} \\ b=\frac{c+a}{y-2} \\ c=\frac{a+b}{z-2} \\ xy+yz+zx=67 \\ x+y+z=2010 \end{array} .$$

Које све вредности може имати израз xyz?

60. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{gathered} x^2+y^2=4 \\ 8x^2+x^5=8y^2+y^5 \end{gathered} \quad .$$

61. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{gathered} x_1+x_2+\ldots+x_n=n \\ x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3=x_1^4+x_2^4+\ldots+x_n^4 \end{gathered} \quad .$$

62. [CAN 2003] У скупу позитивних реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{gathered} x^3+y^3+z^3=x+y+z \\ x^2+y^2+z^2=xyz \end{gathered} \quad .$$

63. Дат је систем једначина

$$\begin{gathered} xy+4=z^3 \\ yz+4=x^3 \\ zx+4=y^3 \end{gathered} \quad .$$

(а) Да ли дати систем има реална решења за која важи $x \neq y \neq z \neq x$?

(б) У скупу реалних бројева решити дати систем.

64. [POL 2006] У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{gathered} a^2=b^3+c^3 \\ b^2=c^3+d^3 \\ c^2=d^3+e^3 \\ d^2=e^3+a^3 \\ e^2=a^3+b^3 \end{gathered} \quad .$$

65. [ROM 2002] Одредити све бројеве $a,b,c,d,e \in [-2,2]$ за које важи

$$\begin{gathered} a+b+c+d+e=0 \\ a^3+b^3+c^3+d^3+e^3=0 \\ a^5+b^5+c^5+d^5+e^5=10 \end{gathered} \quad .$$

66. За неке реалне бројеве a, b, c и d важи

$$\begin{gathered} a+b+c=3 \\ a^2+b^2+c^2>10 \\ a^3+b^3+c^3=15 \\ a^4+b^4+c^4=35 \end{gathered} \quad .$$

Одредити све могуће вредности израза $a^5+b^5+c^5$.

67. [POL 2009] За $n \geq 3$, у скупу реалних бројева, решити систем једначина

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^n x_k=n \quad , \\ \sum_{k=1}^n (x_{k-1}-x_k+x_{k+1})^2=n \end{gathered}$$

при чему је $x_0=x_n$ и $x_1=x_{n+1}$.

68. [CZE 1982] Нека су k n природни бројеви. У скупу ненегативних реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{gathered} x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k=1 \\ (1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdot\ldots\cdot(1+x_n)=2 \end{gathered} \quad .$$

69. [KO 1973] У скупу позитивних реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x_1 + x_2 - \frac{1}{x_1 x_2} = x_3 \\ x_2 + x_3 - \frac{1}{x_2 x_3} = x_4 \\ \vdots \\ x_n + x_1 - \frac{1}{x_n x_1} = x_2 \end{array} .$$

70. [KO 1973] Нека је $a \in \mathbb{R}^+$. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{a}{x_1}) \\ x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + \frac{a}{x_2}) \\ \vdots \\ x_1 = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \end{array} .$$

71. [SRB 1997] Одредити све вредности реалног параметра a за које систем једначина

$$\begin{array}{c} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ xyz = a \end{array}$$

има решења у скупу реалних бројева.

72. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x^3 - 3x^2 + 2x = y^2 \\ y^3 - 3y^2 + 2y = x^3 \end{array} .$$

73. Одредити број реалних решења система једначина

$$\begin{array}{c} 2x_1^2 = x_2 + 1 \\ 2x_2^2 = x_3 + 1 \\ \vdots \\ 2x_{n-1}^2 = x_n + 1 \\ 2x_n^2 = x_1 + 1 \end{array} .$$

74. Одредити број реалних решења система једначина

$$\begin{array}{c} x^2 = 3x + yz \\ y^2 = 3y + zx \\ z^2 = 3z + xy \end{array} .$$

Доказати да за свако решење важи $xyz \leq 0$.

75. [UNK 1998] У скупу позитивних реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} xy + yz + zx = 12 \\ xyz = 2 + x + y + z \end{array} .$$

76. [KO 1979] На табли је записан систем једначина

$$\begin{array}{c} *x_1 = * \\ *x_1 + *x_2 = * \\ *x_1 + *x_2 + *x_3 = * \\ \vdots \\ *x_1 + *x_2 + *x_3 + *x_4 + *x_5 + *x_6 + *x_7 = * \end{array} .$$

Два играча наизменично уписују реалне бројеве уместо звездица. Доказати да први играч може да игра тако да добијени систем једначина има решења у скупу реалних бројева.

77. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} \sum_{k=1}^{n} \cos x_k = \frac{n}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} \\ \sum_{k=1}^{n} \sin x_k = \frac{n}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} \end{array} .$$

78. [USA 1984] За реалне бројеве $x_1, x_2, \ldots, x_{2012}$ важи

$$\begin{array}{c} \frac{x_1}{2^2-1^2} + \frac{x_2}{2^2-3^2} + \frac{x_3}{2^2-5^2} + \ldots + \frac{x_{2012}}{2^2-4023^2} = 1 \\ \frac{x_1}{4^2-1^2} + \frac{x_2}{4^2-3^2} + \frac{x_3}{4^2-5^2} + \ldots + \frac{x_{2012}}{4^2-4023^2} = 1 \\ \vdots \\ \frac{x_1}{4024^2-1^2} + \frac{x_2}{4024^2-3^2} + \frac{x_3}{4024^2-5^2} + \ldots + \frac{x_{2012}}{4024^2-4023^2} = 1 \end{array} .$$

Доказати да је $x_1 + x_2 + \ldots + x_{2012}$ квадрат природног броја.

79. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} y = x(4-x) \\ z = y(4-y) \\ x = z(4-z) \end{array} .$$

80. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} y^2 = 4x^3 + x - 4 \\ z^2 = 4y^3 + y - 4 \\ x^2 = 4z^3 + z - 4 \end{array} .$$

81. [IMO 1986LL] У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} \operatorname{tg} x_1 + \operatorname{ctg} x_1 = 3 \operatorname{tg} x_2 \\ \operatorname{tg} x_2 + \operatorname{ctg} x_2 = 3 \operatorname{tg} x_3 \\ \vdots \\ \operatorname{tg} x_n + \operatorname{ctg} x_n = 3 \operatorname{tg} x_1 \end{array} .$$

82. Одредити све $a \in \mathbb{Z}$ за које систем једначина

$$\begin{array}{c} a|x+1| = y + \cos x \\ \sin^2 x + y^2 = 1 \end{array}$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

83. За неке реалне бројеве a, b, c, x, y и z важи

$$\begin{array}{c} ax + by + cz = 1 \\ ax^2 + by^2 + cz^2 = 2 \\ ax^3 + by^3 + cz^3 = 3 \\ ax^4 + by^4 + cz^4 = 4 \\ ax^5 + by^5 + cz^5 = 5 \end{array} .$$

Које све вредности може имати израз $ax^6 + by^6 + cz^6$?

84. [MO 2005] За неке реалне бројеве a и b једначина $\sin x + a = bx$ има тачно два решења у скупу реалних бројева. Доказати да систем једначина

$$\begin{array}{c} \sin x + a = bx \\ \cos x = b \end{array}$$

има бар једно решење.

85. За реалне бројеве a и b важи $a^3 - 3a^2 + 5b = 1$ и $b^3 - 3b^2 + 5a = 5$. Колико све може бити $a + b$?

86. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x^5 + y^3 = 2z \\ y^5 + z^3 = 2x \\ z^5 + x^3 = 2y \end{array} .$$

87. За позитивне бројеве x и y важи

$$\begin{array}{c} x^2 + xy + x = 1 \\ y^2 + xy + x + y = 1 \end{array} .$$

Доказати да је $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 8\cos^3 \frac{\pi}{7}$.

88. [POL 1997, CRO 2009] У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} 3(x^2 + y^2 + z^2) = 1 \\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = xyz(x + y + z)^3 \end{array} .$$

89. [USA 2009] У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x^3 = 3x - 12y + 50 \\ y^3 = 12y + 3z - 2 \\ z^3 = 27z + 27z \end{array} .$$

90. [YUG 1989] У скупу позитивних реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x_1 + x_2^2 + x_3^3 = 3 \\ x_2 + x_3^2 + x_4^3 = 3. \\ x_3 + x_4^2 + x_1^3 = 3 \\ x_4 + x_1^2 + x_2^3 = 3 \end{array}$$

91. Дат је систем од p једначина са $q = 2p$ непознатих

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1q}x_q = 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2q}x_q = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pq}x_q = 0 \end{array}$$

где је $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$, $i = \overline{1,p}, j = \overline{1,q}$. Доказати да постоји решење $(x_1, \ldots, x_q) \in \mathbb{Z}^q \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ за које важи $|x_j| \leq q$, $j = \overline{1,q}$.

92. [SRB 2010] На табли је записан систем

$$\begin{array}{c} *x_1 + *x_2 + \ldots + *x_{2010} = * \\ *x_1 + *x_2 + \ldots + *x_{2010} = * \\ \vdots \\ *x_1 + *x_2 + \ldots + *x_{2010} = * \end{array}$$

који садржи 2010 једначина. Аца и Бранко, наизменично, уместо једне звездице уписују реалан број по избору. Аца игра први. Који од играча има победничку стратегију ако:

(а) Аца побеђује ако систем има бесконачно много решења, а Бранко у случају да је противречан;

(б) Аца побеђује ако је систем противречан, а Бранко ако има бесконачно много решења?

93. [MO 1998] На сегменту $[0,1]$ уочено је неколико различитих тачака. Испоставило се да је свака од уочених тачака средиште дужи које образују или неке две од уочених тачака или уочена тачка и један од крајева сегмента $[0,1]$. Доказати да свим уоченим тачкама одговарају рационални бројеви.

94. [POL 2011] Нека је $n \geq 3$ непаран природан број. Колико решења, у скупу реалних бројева, има систем једначина

$$\begin{array}{c} x_1(x_1+1) = x_2(x_2-1) \\ x_2(x_2+1) = x_3(x_3-1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(x_{n-1}+1) = x_n(x_n-1) \\ x_n(x_n+1) = x_1(x_1-1) \end{array} ?$$

95. [MO 1968] Да ли постоји природан број n тако да систем једначина

$$\begin{array}{c} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0 \\ x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = 0 \\ x_1^5 + x_2^5 + \ldots + x_n^5 = 0 \\ \vdots \\ x_1^{19} + x_2^{19} + \ldots + x_n^{19} = 0 \\ x_1^{21} + x_2^{21} + \ldots + x_n^{21} = 1 \end{array}$$

има решења у скупу реалних бројева?

96. [Kvant 1973] На неком такмичењу 24 ученика решавала су 25 задатака. Сваки задатак решио је бар један ученик. Доказати

(а) да је могуће уочити неколико задатака, тако да је сваки ученик решио паран број уочених задатака;

(б) да је могуће неке задатке означити "$*$", а неке од преосталих "$\triangle$" и задацима доделити поене, тако да је сваки ученик освојио једнак број поена на задацима означеним "$*$" и "$\triangle$" (сваки тачно решен задатак носи природан број поена, при чему сваки ученик на задатку добија или максималан број поена или 0 поена).

97. [MO 1989] Одредити све позитивне бројеве $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$ за које важи

$$(A_1 + \ldots + A_k)(A_k + \ldots + A_{10}) = 1, \; k = \overline{1,10}.$$

98. [RUS 2001] На неком тестирању ученици су решавали n питања. Комисија се договорила да након завршене израде теста саопшти ученицима које питање носи колико поена (тачан одговор на свако питање носи природан број поена). Након тестирања и увида у радове дошло је до занимљиве ситуације - за сваки унапред задат редослед ученика (без деобе места) комисија је могла питањима да додели поене како би досло баш до тог распореда. За који највећи број ученика је овако нешто могло да се догоди?

99. У зависности од $a \in \mathbb{R}$, у скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{array}{c} x_1|x_1| - (x_1-a)|x_1-a| = x_2|x_2| \\ x_2|x_2| - (x_2-a)|x_2-a| = x_3|x_3| \\ \vdots \\ x_n|x_n| - (x_n-a)|x_n-a| = x_1|x_1| \end{array} .$$

100. [ROM 1996] Нека је $n > 2$ природан број и $X \subseteq S = \{1, 2, \dots, n^3\}$, такав да је $|X| = 3n^2$. Доказати да постоји девет различитих бројева $a_i, b_i, c_i \in X,\ i = \overline{1,3}$, таквих да систем једначина

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{aligned}$$

има нетривијално решење у $\mathbb{Z}^3$.

101. Да ли постоје $x, y, z \in \mathbb{R},\ x \neq y \neq z \neq x$, за које важи

$$\begin{array}{l} x^2 = \frac{y+3}{z+3} \\ y^2 = \frac{z+3}{x+3} \\ z^2 = \frac{x+3}{y+3} \end{array} \quad ?$$

102. Аца је замислио природне бројеве $a_1, a_2, \dots, a_n$, а потом је у свесци записао све збирове $a_i + a_j,\ 1 \leq i < j \leq n$. Бранко је такође замислио природне бројеве $b_1, b_2, \dots, b_n$, а потом је у свесци записао све збирове $b_i + b_j,\ 1 \leq i < j \leq n$. Испоставило се да су спискови добијених резултата међусобно исти (неком пермутацијом списка свих бројева које је добио Аца, добија се списак бројева које је добио Бранко), али се ма којом пермутацијом бројева $a_1, a_2, \dots, a_n$, не могу добити бројеви $b_1, b_2, \dots, b_n$. Доказати да је n степен броја 2.