Јенсенова неједнакост. Караматина неједнакост

Миливоје Лукић

1. Доказати да је $\mathrm{e}^x > 1 + x$ за све $x \neq 0$.

2. Доказати да је $\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}$ за $x \in (0, \pi/2)$.

3. Ако је $0 \le a \le b \le c \le d$, доказати да је $a^b b^c c^d d^a \ge b^a c^b d^c a^d$.

4. Доказати Бернулијеву неједнакост:
$$(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$$
за $\alpha > 1$, $x > -1$, $x \neq 0$.

5. Нека су r_1, r_2, ..., r_n реални бројеви већи или једнаки 1. Доказати
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i + 1} \ge \frac{n}{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} r_i} + 1}.$$

6. (БМО1984.1) Нека су a_1, a_2, ..., a_n позитивни цели бројеви такви да је $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Доказати да је
$$\frac{a_1}{1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n} + \frac{a_2}{1 + a_1 + a_3 + \cdots + a_n} + \cdots + \frac{a_n}{1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}} \ge \frac{n}{2n-1}.$$

7. Која је највећа могућа вредност израза $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$, уколико су α, β, γ углови једног троугла?

8. Која је највећа могућа вредност израза $\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$, уколико су α, β, γ углови једног троугла?

9. Нека су a_i, b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ реални бројеви такви да је $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n > 0$ и $\prod_{i=1}^{k} b_i \ge \prod_{i=1}^{k} a_i$ важи за свако $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Доказати да је $\sum_{i=1}^{n} b_i \ge \sum_{i=1}^{n} a_i$.

10. Доказати да за позитивне бројеве a_1, a_2, ..., a_n важи неједнакост
$$\frac{a_1^3}{a_2} + \frac{a_2^3}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}^3}{a_n} + \frac{a_n^3}{a_1} \ge a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2.$$

11. (БМО1998. 1.задатак) Нека је n цео број, $n \ge 2$, и нека су $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{2n+1}$ реални бројеви. Доказати следецу неједнакост:
$$\sqrt[n]{a_1} - \sqrt[n]{a_2} + \sqrt[n]{a_3} - \cdots - \sqrt[n]{a_{2n}} + \sqrt[n]{a_{2n+1}} < \sqrt[n]{a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_{2n} + a_{2n+1}}.$$

12. Доказати да за бројеве a_1, a_2, ..., $a_n \in [-\pi/6, \pi/6]$ важи неједнакост
$$\cos(2a_1 - a_2) + \cos(2a_2 - a_3) + \cdots + \cos(2a_n - a_1) \le \cos a_1 + \cos a_2 + \cdots + \cos a_n.$$

13. Нека су $a_1, \ldots, a_n$ позитивни бројеви. Доказати
$$(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n) \ge (1 + \frac{a_1^2}{a_2})(1 + \frac{a_2^2}{a_3})\ldots(1 + \frac{a_n^2}{a_1}).$$