# ПОЛИНОМИ

**1.** Колико има полинома $P \in \mathbb{R}[x]$, таквих да за сваки ирационалан број $a$ важи $P(a+\frac{1}{a}) = a^{2014} + \frac{1}{a^{2014}}$?

**2.** Све канцеларије професора на Универзитету у Торонту нумерисане су бројевима $0, 1, \ldots, n, n+1, n+2$, за неко $n \in \mathbb{N}$. Професор Дуле замислио је неки полином са реалним коефицијентима чији је степен тачно $n$. Након тога је на табли у свакој канцеларији написао вредност полинома у редном броју те канцеларије. На тај начин је на табли у $i$-тој канцеларији, $i \in \{0, 1, \ldots, n+1\}$, писало $2^i$, док је на табли канцеларије чији је редни број $n+2$, писало $2^{n+2} - n - 3$.

(а) Доказати да је професор Дуле начинио грешку у рачуну.

(б) Под претпоставком да је професор Дуле начинио најмањи могући број грешака, пронаћи те грешке и исправити их.

**3.** При дељењу полинома $x^{2013}$ полиномом

$$x^3 - 12^{-12}x^2 + 28^{-28}x - 2013^{-2013}$$

добија се количник $K(x)$ и остататак $R(x)$. Колико позитивних коефицијената има полином $K(x)$?

**4.** Да ли постоје полиноми $P_1(x), P_2(x), \ldots$, са реалним коефицијентима, степена већег од 1, такви да за свако $n \in \mathbb{N}$, постоји права која са графиком полинома $P_n(x)$ нема заједничких тачака, а са графицима свих осталих полинома има бар једну заједничку тачку?

**5.** За полином $P \in \mathbb{R}[x]$, познато је да једначина $P(a) + P(b) = 0$, има бесконачно много решења у $\mathbb{Z}^2$. Доказати да је график функције $y = P(x)$ централно симетричан у односу на неку тачку.

**6.** Да ли постоји полином $P \in \mathbb{R}[x]$, такав да за сваки природан број $n$, полином $\underbrace{P(P(\ldots P}_{n}(x)\ldots))$ има тачно $2^n$ различитих реалних нула?

**7.** Да ли постоји низ реалних бројева $a_0, a_1, a_2, \ldots$, различитих од нуле, тако да за сваки природан број $n$ полином $P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ има све реалне и различите нуле?

**8.** Да ли постоје $A, B \in \mathbb{R}[x]$ и $C, D \in \mathbb{R}[y]$ такви да је за свако $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ задовољено

$$A(x)C(y) + B(x)D(y) = x^2y^2 + xy + 1 \ ?$$

**9.** Да ли постоји неконстантан полином $P(x, y)$, такав да за сваки реалан број $a$ важи једнакост $P([a], [2a]) = 0$?

**10.** Колико има парова $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, $\deg P < \deg Q$, за које важи $P(x)^2 + Q(x)^2 = x^{2014} + 1$?

**11.** Нека је $n > 2$ фиксиран природан број и $A, B \in \mathbb{R}[x]$, такви да тачке $(A(1), B(1))$, $(A(2), B(2)), \ldots, (A(n), B(n))$, у задатом поретку, у $\mathbb{R}^2$, чине темена правилног $n-$тоугла. Доказати да је $\max\{\deg A, \deg B\} \geq n - 1$.

**12.** Одредити све $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ за које важи $P(x)Q(x+1)-P(x+1)Q(x) = 1$ за свако $x \in \mathbb{R}$.

**13.** Да ли постоје различити неконтантни полиноми $P, Q \in \mathbb{C}[x]$, такви да је $\{z \in \mathbb{C}|P(z) = 2013\} = \{z \in \mathbb{C}|Q(z) = 2013\}$ и $\{z \in \mathbb{C}|P(z) = 2014\} = \{z \in \mathbb{C}|Q(z) = 2014\}$?

**14.** Нека је $a \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N},\ n > 1$. Доказати да полином $P(z) = az^n + z + 1$ има бар једну нулу чији је модуо не већи од 2.

**15.** Природан број $k$ је леп акко су све цифре у његовом декадном запису једнаке 1. Одредити све полиноме $P \in \mathbb{R}[x]$ такве да је за сваки леп број $k$ и број $P(k)$ леп.

**16.** Одредити све $P \in \mathbb{R}[x]$ такве да је $P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$, за свако $x \in \mathbb{R}$.

**17.** Полином $P \in \mathbb{R}[x]$, степена $n$, има све реалне и различите нуле. Колико највише коефицијената полинома $P$ може бити једнако 0?

**18.** Нека су $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ полиноми за које важи

$$\{a \in \mathbb{R}|\ P(a) \in \mathbb{Z}\} = \{a \in \mathbb{R}|\ Q(a) \in \mathbb{Z}\}.$$

Доказати да је полином $P - Q$ или полином $P + Q$ константан.

**19.** Доказати да полином који је једнак производу полинома $P(x) = (x+1)^{n-1}$ и ма ког другог ненула полинома, садржи бар $n$ коефицијената различитих од нуле.

**20.** Дат је полином $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ који има бар једну реалну нулу, при чему је $a_0 \neq 0$. У једном кораку бришемо моном из (тренутног) записа полинома $P(x)$. Доказати да је у $n$ корака могуће добити $P(x) = a_0$, а да је при томе након сваког учињеног корака (осим последњег) полином $P(x)$ имао бар једну реалну нулу.

**21.** Одредити све полиноме $P \in \mathbb{R}[x]$ за које важи

$$P(x)P(2x^2-1) = P(x^2)P(2x-1),\ \text{за свако } x \in \mathbb{R}.$$

**22.** Нека је $P(x) = a_n x^n + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x],\ a_n \neq 0$. Доказати да постоји $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ тако да је $|P(i)| \geq \frac{n!}{\binom{n}{i}}$.

**23.** Нека је $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\},\ b \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$. Доказати да полином $P(x) = ax^{2n+1} + bx^{2n} + \overline{b}x + \overline{a}$ има нулу јединичног модула.

**24.** Да ли постоје полиноми $P = P(x,y,z),\ Q = Q(x,y,z)$ и $R = R(x,y,z)$ такви да за свако $x, y, z \in \mathbb{R}$ важи $(x-y+1)^{2014}P + (y-z-1)^{2014}Q + (z-x+1)^{2014}R = 1$?

**25.** За реалан број $r$ дефинишимо $\{\{r\}\}$ са $\{\{r\}\} = \min\{r-[r], -r+[r]+1\}$. Ако је $\alpha$ реална нула полинома $P(x) = x^3 - x + 1$, доказати да је

$$\lim_{n\to\infty}\{\{\alpha^n\}\} = 0.$$