Dodatna nastava iz matematike

Binomni koeficijenti

Predavač: A.Pejčev

1. Sledeće tvrdjenje mora da se zna: za svako $n \in N$ važe sledeće jednakosti:
   (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, 0 \leq k \leq n$;
   (b) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, 1 \leq k \leq n$;
   (c) $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{m-k}\binom{n-m+k}{k}, 0 \leq k \leq m \leq n$.
2. Za svaki $n \in N$ važe jedmakosti:
   (a) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$;
   (b) $\sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{2i+1} = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2i} = 2^{n-1}$.
   (c) $\sum \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!} = m^n$, gde se sumiranje vrši po svim m-torkama $(k_1, ..., k_m)$ nenegativnih celih brojeva za koje je $k_1 + ... + k_m = n$.

   Dokazati.
3. Dokazati da za prirodne brojeve m,n,k važi:
   (a) $\sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j}\binom{n-1}{j-1} = \binom{n+m-1}{n}$;
   (b) $\sum_{j=0}^{n} \binom{k-1+j}{j}\binom{m+n-k-1-j}{n-j} = \binom{n+m-1}{n}$.
4. Dokazati i upamtiti da za svako $n \in N$ važi: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
5. Dokazati identitet $\sum_{k=0} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k} 2^{2n-2k} = \binom{4n}{2n}$.
6. Dokazati i upamtiti identitet $\binom{n}{m} = \sum_{k=0}^{M} \binom{n-1-k}{m-k}$, gde je $M = min\{m, n-1\}$.
7. Dokazati da za sve n, m, r važ $\binom{n}{m} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n-r}{m-k}\binom{r}{k}$ (**Vandermondov identitet**).
8. Da se nadje $\sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{m}, n \geq m \geq 0$.
9. Neka je $(a_0, a_1 ...)$ niz reaknih brojeva i neka je $b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a_k$, za svako $n \in N_0$. Dokazati da je $a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k$.
10. Dokazati da je za svako $n \in N$ $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$.
11. Dokazati da iz zadnja dva zadatka sledi identitet $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k}) = \frac{1}{n}$.
12. Dokazati $2 < (1 + \frac{1}{n})^n < 3$ za $n \geq 2$.

13. Dokazati identitete:

    (a) $\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\binom{n+m}{k}^{-1}=\frac{n+m+1}{(m+1)(m+2)}$;

    (b) $\sum_{k=0}\binom{n}{k}\binom{n}{m}\binom{2n}{m+k}^{-1}=\frac{2n+1}{n+1}$;

    (c) $\frac{1}{2}\binom{n}{0}+\frac{1}{3}\binom{n}{1}+...+\frac{1}{n+2}\binom{n}{n}=\frac{1}{n+1}$;

    (d) $\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n+1}{2}+...+\frac{1}{2^n}\binom{n+n}{n}=2^n$;

    (e) $\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}2^{n-k}+\sum_{k=0}^{m}\binom{n+k}{k}2^{m-k}=2^{m+n+1}$;

    (f) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{\binom{n}{k}}=\frac{n+1}{n+2}(1+(-1)^n)$.

14. Neka je $a_n=\frac{1}{\binom{n}{0}}+\frac{1}{\binom{n}{2}}+...+\frac{1}{\binom{n}{n}}$. Dokazati da je $a_n=\frac{n+1}{2n}a_{n-1}+1$.

15. Dokazati da za svaka dva m,n iz N postoji p iz N tako da je $(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})^n=\sqrt{p}-\sqrt{p-1}$.

16. Izdiskutovati sumu $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n-k}{k}$ u zavisnosti od ostatka koji n daje pri deljenju sa 3.

17. Dokazati da je $\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\binom{n-k}{k}2^{n-2k}=n+1$

18. Pokazati da je $\sum_{j+h=n}(-1)^h\frac{1}{j}\binom{j}{h}2^{j-h}=\frac{2}{n}$.

19. Dokazati da za sve $m,n\in N$, $n\geq m$ važi $\binom{n}{0}+\binom{n}{m}+\binom{n}{2m}+...=\frac{2^n}{m}\sum_{k=1}^{m}\cos^n\frac{k\pi}{m}\cos\frac{nk\pi}{m}$.

20. Koristeći formulu uključenja i isključenja, dokazati sledeće identitete za prirodne brojeve $n>m\geq 1$:

    (a) $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}=0$;

    (b) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{m+n-k-1}{m}=0$.

21. Odrediti nzd brojeva $\binom{2n}{1},\binom{2n}{3},...,\binom{2n}{2n-1}$.

22. Dokazati da ne postoji broj n takav da medju binomnim koeficijentima n-tog reda ima jednak broj parnih i neparnih brojeva.

23. Neka su $n=a_kp^k+...+a_1p+a_0$ i $m=b_kp^k+...+b_1p+b_0$ zapisi brojeva m i n u sistemu sa osnovom p, gde je p prost broj i $n\geq m$. ($a_k\neq 0$, a b_k ne mora da bude). Dokazati da je $\binom{n}{m}\equiv\binom{a_k}{b_k}...\binom{a_1}{b_1}\binom{a_0}{b_0}\pmod{p}$ (**Lukasova teorema**)