Додатна за четврти разред
9.11.2004.г.

Полиноми - мало теорије

Милан Новаковић

Теорема Полином n-тог степена има највише n реалних нула.

Теорема Полином степена мањег од n који има узима вредност 0 у n тачака је нула полином.

Теорема Ако два полинома n-тог степена имају исте вредности у $n+1$ тачки, онда су они идентички једнаки.

Теорема Ако је $p(x)$ полином $n - tog$ степена за који је $p(x_i) = y_i$ за $i = 1, 2, \dots, n+1$, онда је

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

.

Теорема Ако је $P(x)$ полином са целобројним коефицијентима онда $m - n | P(m) - P(n)$.

Теорема Између сваке две нуле полинома $p(x)$ налази се нула његовог извода.

Теорема Нека је $N(x)$ број промене знака у низу $f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)$, где је f полином степена n. Тада број корена полинома f (рачунајући и њихову многострукост) који се налазе између a и b, где је $f(a)f(b) \neq 0$ не прелази $N(a) - N(b)$ и исте је парности као тај број.

Доказ: Нека тачка x пролази интервал (a, b) од a ка b. Број $N(x)$ се при томе мења ако x прође корен полинома $f^{(m)}(x)$ за неко $m < n$.

Нека x пролази кроз r-тоструки корен x_0 полинома $f(x)$. Околине тачке x_0 полинома $f(x), f'(x), \dots, f^{(r)}(x)$ можемо заменити са $(x - x_0)^r g(x_0)$, $(x - x_0)^{r-1} r g(x_0), \dots,$ $r! g(x_0)$. Због тога за $x < x_0$ у овом низу има r промене знакова, а за $x > x_0$ нема промена.

Разматрајмо сада случај када тачка x пролази кроз r-тоструки корен x_0 полинома $f^{(m)}$ који није корен полинома $f^{(m-1)}$ (такво x_0 може, а и не мора бити корен f). Треба да докажемо да се број промене знака у низу $f^{(m-1)}(x), f^{(m)}(x), \dots, f^{(m+r)}(x)$ промени за паран број. У околини x_0 ти полиноми се понашају као $F(x_0)$, $(x - x_0)^r G(x_0)$, $(x - x_0)^{r-1} r G(x_0), \dots,$ $r! G(x_0)$. Ако изоставимо $F(x_0)$, у остатку овог низа је број промена знакова r за $x < x_0$, а за $x > x_0$ нема промене знакова. Што се тиче промене знакова $F(x_0)$ и $(x - x_0)^r G(x_0)$, ако је r парно, иста је ситуација за $x < x_0$ и $x > x_0$, док за непарно r се број промене знакова се повећа или смањи за 1. У сваком случају се број знакова у целом низу промени за паран број.

Последица (Декартова теорема) Број позитивних корена полинома $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ не прелази број промена знакова у низу $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Доказ: Пошто је $f^{(r)}(0) = r! a_{n-r}$, то $N(0)$ тачно број промена знакова у коефицијнтима полинома, док је $N(+\infty) = 0$, то на основу претходне теореме следи тачност Декартове теореме.