Matematička gimnazija, Beograd
Priprema za Balkansku Matematičku Olimpijadu 2006.

RAZNI ZADACI IZ ALGEBRE

1. (BMO 2002, predlog) Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi, takvi da je $x+y+z \geq 1$. Dokazati da je

$$\frac{x\sqrt{x}}{y+z}+\frac{y\sqrt{y}}{z+x}+\frac{z\sqrt{z}}{x+y} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. (IMO 1998, predlog) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje je $abc = 1$. Dokazati da je

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} \geq \frac{3}{4}.$$

3. (IMO 2002, predlog) Neka je (a_n) niz realnih brojeva iz intervala $[0, c]$ takav da važi $|a_i - a_j| \geq \dfrac{1}{i+j}$ za svaki par međusobno različitih prirodnih brojeva (i, j). Dokazati da je $c \geq 1$.

4. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi za koje važi $x+y+z = 1$. Dokazati da je $x^2y + y^2z + z^2x \leq \dfrac{4}{27}$.

5. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da je $x^4 + y^4 + z^4 = 1$. Odrediti minimum izraza

$$\frac{x^3}{1-x^8}+\frac{y^3}{1-y^8}+\frac{z^3}{1-z^8}.$$

6. Neka su a, b, c pozitivni relani brojevi. Dokazati nejednakost

$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(a+1)} \geq \frac{3}{1+abc}.$$

7. (IMO 2003, 5 zad) Neka je n prirodan broj i $x_1, x_2, \cdots, x_n$ realni brojevi takvi da je $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$.

(a) Dokazati da je

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\Big)^2 \leq \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2.$$

(b) Dokazati da nejednakost važi ako i samo ako je $x_1, x_2, \cdots, x_n$ aritmetička progresija.

8. (BMO 1998) Neka je n prirodan broj i $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n+1}$ realni brojevi. Dokazati nejednakost

$$\sqrt[n]{a_1} - \sqrt[n]{a_2} + \sqrt[n]{a_3} - \ldots - \sqrt[n]{a_{2n}} + \sqrt[n]{a_{2n+1}} < \sqrt[n]{a_1 - a_2 + a_3 - \ldots - a_{2n} + a_{2n+1}}.$$

9. (Interno 2000) Dat je niz (x_n) pozitivnih realnih brojeva takav da je $x_{i+j} \leq x_i + x_j$ za sve $i, j \in \mathbf{N}$.

(a) Dokazati da za $n \leq m$ važi

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \geq \frac{m(m+1)}{2n}\cdot x_n.$$

(b) Ako je (x_n) uz to još i neopadajući, dokazati da za $n \geq m$ važi i

$$\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\ldots+\frac{m}{x_m} \leq m \cdot \frac{n}{x_n}.$$

10. (Kvant M730) Niz je zadat sa $a_1 = 0$ i $a_{2n+1} = a_{2n} = n - a_n$.

(a) Dokazati da za beskonačno mnogo n važi $a_n = \dfrac{n}{3}$.

(b) Da li postoji n takav da je $|a_n - n| > 1982$.

(c) Dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = \dfrac{n}{3}$.

11. Neka je $a_1 = 1, a_2 = 2$ i $a_{n+1} = 1 + a_1a_2\cdots a_{n-1} + (a_1a_2\cdots a_{n-1})^2$, za sve $n \geq 2$. Dokazati da je

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n} < 3.$$

12. Dokazati da ne postoji niz (a_n) prirodnih brojeva takav da je $a_{a_n} = a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2$.

13. (IMO 1989, predlog) Niz $x_0, x_1, x_2, \ldots$ realnih brojeva definisan je sa $x_0 = 1989$ i za svako $n \geq 1$ sa $x_n = -\dfrac{1989}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_k$. Odrediti vrednost izraza $\displaystyle\sum_{n=0}^{1989} 2^n x_n$.

14. (IMO 1983, predlog) Neka je a prirodan broj i (a_n) niz definisan sa:

$$a_0 = 0,\ a_{n+1} = a(a_n + 1) + (a+1)a_n + 2\sqrt{a(a+1)a_n(a_n+1)}.$$

Dokazati da je za sve prirodne brojeve n i a_n prirodan.

15. Niz $\{x_n\}_{n\geq 1}$ zadat je sa $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+2} = 14x_{n+1} - x_n - 1$. Dokazati da je svaki član ovog niza potpun kvadrat.

16. (Putnam 1999) Niz $\{a_n\}_{n\geq 1}$ definisan je sa $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 24$ i za svako $n \geq 4$,

$$a_n = \frac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}}.$$

17. (BMO 2002) Naći sve funkcije $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, takve da je za svako $n \in \mathbf{N}$ ispunjeno $2n+2001 \leq f(f(n)) + f(n) \leq 2n+2002$.

18. Neka su a i b prirodni brojevi različiti od 1, a (x_n) niz zadat sa $x_0 = 0, x_1 = 1$ i

$$x_n = \begin{cases} ax_{n-1} - x_{n-2}, & n \text{ neparan} \\ bx_{n-1} - x_{n-2}, & n \text{ paran} \end{cases}$$

Dokazati da je proizvod proizvoljnih k uzastopnih članova niza deljiv sa $x_1 x_2 \cdots x_k$.

19. (Rumunija 2004) Neka su m i n prirodni brojevi i neka je m neparan. Dokazati da je broj

$$a_m = \frac{1}{3^m n}\sum_{k=0}^{m}\binom{3m}{3k}(3n-1)^k,$$

ceo za svaki prirodan broj m.

20. (BMO 1996) Dokazati da postoji podskup A skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 2^{1996} - 1\}$ koji ima sledeća svojstva:

(a) $1 \in A$ i $2^{1996} - 1 \in A$;

(b) svaki element iz $A \setminus \{1\}$ je zbir dva (ne obavezno različita) elementa iz A;

(c) A nema više od 2012 elemenata.

21. Dati su celi brojvi $a, b_0 b_1, \ldots, b_k, m$, takvi da je broj $f(n) = a^n + b_0 + b_1 n + \ldots + b_k n^k$ deljiv sa m za sve $1 \leq n \leq k+2$. Dokazati da m deli $f(n)$ za sve $n \in \mathbf{N}$.

22. Da li postoji funkcija $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ takva da za svaki prirodan broj n važi:

$$f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n)?$$

23. Odrediti sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da je za svaka dva realna broja x, y ispunjeno $f(f(x)+y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y$.

24. (SAD 2000) Dokazati da ne postoji funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takva da je za svaka dva realna broja x, y ispunjeno

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x-y|.$$

25. (Vietnam 2005) Odrediti sve funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koje zadovoljavaju jednakost $f(f(x-y)) = f(x)f(y) - f(x) + f(y) - xy$.

26. (Vietnam 2004) Odrediti sve vrednosti realnog koeficijenta α za koje postoji tačno jedna funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ koja zadovoljava jednakost

$$f(x^2 + y + f(y)) = f(x)^2 + \alpha \cdot y.$$

27. Naći sve funkcije $f : \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ za koje je $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$. Uraditi isti zadatak u slučaju da je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

28. (IMO 2000, predlog) Odrediti sve parove funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ i $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takve da je za svaka dva realna broja x, y ispunjeno

$$f(x + g(y)) = xf(y) - yf(x) + g(x).$$

© Marko Radovanović
radmarko@yahoo.com