Dodatna nastava iz matematike

Nizovi

Predavač: A.Pejčev

1. Dati su prirodni brojevi $a, b_0, ..., b_k$ i m koje deli $f(n) = a^n + b_0 + b_1 n + ... + b_k n^k$ za $n = 1, 2, ..., k+2$. Dokazati da m deli $f(n)$ za svako $n \in N$.

2. Niz a_n odredjen je sa $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = 3a_n + \sqrt{8a_n^2 + 1}$ za $n \geq 1$. Dokazati da su svi članovi niza prirodni brojevi.

3. Neka je a_0 proizvoljan realan broj i $a_{n+1} = a_n^2 + (a_n - 1)^2$ za $n \geq 0$. Odrediti a_n.

4. Niz (a_n) je definisan sa $a_1 = a, a_2 = b$ i $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + c}{a_{n-1}}$ za $n = 2, 3, \ldots$, gde su a,b i c realni brojevi takvi da je $ab \neq 0$ i $c > 0$. Dokazati da su svi članovi niza celi brojevi akko su a, b i $\frac{a^2+b^2+c}{ab}$ celi brojevi.

5. Odrediti najveću vrednost x_0 za koju postoji niz pozitivnih realnih brojeva $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$ koji zadovoljavaju sledeće uslove:

   (a) $x_0 = x_{1995}$;

   (b) $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$ za svako $i = 1, 2, \ldots, 1995$.

6. Rešiti rekurentne jednačine :

   (a) $x_{n+1} = (x_n + 1)a + (a+1)x_n + 2\sqrt{a(a+1)x_n(x_n+1)}, x_0 = 0$, gde je a konstanta;

   (b) $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$;

   (c) $x_{n+1} = x_n^2 - 2$;

   (d) $x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$;

   (e) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$.

7. Niz $a_1, a_2, \ldots$ je definisan sa $a_1 = 0, a_{4n} = a_{2n} + 1, a_{4n+1} = a_{2n} - 1, a_{4n+2} = a_{2n+1} - 1, a_{4n+3} = a_{2n+1} + 1$. Naći maksimum i minimum a_n niza za $n = 1, 2, \ldots, 1996$ i vrednosti za koje se oni dostižu. Koliko ima medju pomenutim članovima niza onih koji su jednaki 0?

8. Za dato $a > 2$ definišemo niz $a_0, a_1, \ldots$ sa $a_0 = 1, a_1 = a, a_{n+2} = a_{n+1}(\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} - 2)$. Dokazati da je $\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} < 2 + a - \sqrt{a^2 - 4}$.

9. Niz a_n je zadat sa $a_1 = 1, a_2 = 12, a_3 = 20;$, $a_{n+3} - 2a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$. Dokazati da je $1 + 4a_n a_{n+1}$ potpun kvadrat.

10. Neka je $r_n = \cos^n \frac{\pi}{7} + \cos^n \frac{3\pi}{7} + \cos^n \frac{5\pi}{7}$. Naći r_1, r_2, r_3, r_4 i dokazati da su svi članovi niza racionalni brojevi.

11. Ako niz x_n zadovoljava rekurziju $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, onda je niz:

    (a) $(x_{n+1}^2 + px_{n+1}x_n + qx_n^2)$;

    (b) $(x_{n+1}^2 - x_{n+2}x_n)$;

    geometrijska progresija sa količnikom q. Dokazati i upamtiti.

12. Nenegativni celi brojevi x i y zadovoljavaju $x^2 - pxy + y^2 = 1, (p \in N)$, **akko** su uzastopni članovi niza (z_n) definisanog sa $z_0 = 0, z_1 = 1$; $z_{n+2} = pz_{n+1} - z_n, n \geq 0$.

13. Dat je niz $a_0 = 4, a_1 = 22$ i $a_n - 6a_{n-1} + a_{n-2} = 0$ za $n \geq 2$. Dokazati da postoje nizovi (x_n) i y_n prirodnih brojeva takvi da je $a_n = \frac{y_n^2 + 7}{x_n - y_n}$ za svako $n \geq 0$.

14. Niz $a_{n n\geq 1}$ je definisan sa $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 24$ i za svako $n \geq 4$ $a_n = \frac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}}$. Dokazati da je za svako n a_n ceo broj koji je deljiv sa n.

15. Koliko ima nizova $x_1 ... x_n$ gde su $x_1, ..., x_n$ cifre iz skupa {0,1,2,3} takvih da za svako $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$ važi
$$x_i x_{i+1} \notin \{12, 13, 32, 33\}?$$

16. Neka su $A_1, A_2, ..., A_n$ tačke na jednoj kružnici. Odrediti broj mogućih bojenja tih tačaka sa p boja, $p \geq 2$, takvih da su svake dve susedne tačke različite boje.

17. Neka je $k \in N$. Naći sve funkcije $f : N \to N$ koje zadovoljavaju $f(f(n)) + f(n) = 2n + 3k$ za svako $n \in N$.

18. Da se nadju sve funkcije $f : N \to N$ za koje je $2n + 2001 \leq f(f(n) + f(n) \leq 2n + 2002$.

19. Naći sve funkcije $f : R_0 \to R_0$ koje zadovoljavaju relaciju
$$f(f(x) - x) = 2x$$
za svako $x \in R_0$.

20. Niz (a_n) je odredjen uslovima $a_1 = 0$ i
$$(n + 1)^3 a_{n+1} = 2n^2(2n + 1)a_n + 2(3n + 1),$$
dokazati da beskonačno mnogo članova tog niza pripada skupu prirodnih brojeva.