

Неједнакости

Миливоје Лукић

Нека су a_1, a_2, \dots, a_n позитивни реални бројеви, и нека је r реалан број. Тада је средина реда r бројева a_1, a_2, \dots, a_n

$$M_r(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[r]{\frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n}} \quad \text{за } r \neq 0,$$

$$M_0(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Посебно истакнимо аритметичку средину као средину реда $r = 1$, квадратну као средину реда $r = 2$, геометријску као средину реда $r = 0$ и хармонијску као средину реда $r = -1$.

Неједнакост средина Нека су a_1, a_2, \dots, a_n позитивни реални бројеви, и r и s реални бројеви такви да је $r < s$. Тада важи

$$M_r(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq M_s(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Коши-Шварцова неједнакост За све реалне бројеве $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ важи

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2$$

при чему једнакост важи ако и само ако су низови $(x_i)_{i=1}^n$ и $(y_i)_{i=1}^n$ пропорционални, то јест ако и само ако постоје реални бројеви α и β такви да је $\alpha x_i = \beta y_i$ за све $i = 1, 2, \dots, n$.

Чебишевљева неједнакост Ако је $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ и $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$, онда је

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)(y_1 + y_2 + \dots + y_n) \leq n(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ или $y_1 = y_2 = \dots = y_n$.

1. Доказати да за сваки природан број n важи

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}.$$

2. Доказати да за све позитивне бројеве a, b, c такве да је $a + b > c$, и сваки природан број n , важи $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} > \sqrt[n]{c}$.
3. Доказати да за свако $r \in \mathbb{R}$ и било које позитивне реалне бројеве a_1, a_2, \dots, a_n важи

$$\min\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \leq M_r(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

4. Доказати да за све $a, b, c > 0$ важи $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.
5. Доказати да за све $a, b, c > 0$ важи $bc/a + ac/b + ab/c \geq a + b + c$.
6. Доказати да за све $a, b, c > 0$ важи $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$.
7. Доказати да за све $a, b, c > 0$ важи $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$.
8. Доказати да за све $a, b, c, d \geq 0$ важи

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} + \sqrt{(a+c)(b+d)} + \sqrt{(a+d)(b+c)} \geq 6\sqrt[4]{abcd}.$$

9. Доказати да за све $x, y > 0$ важи $x/(x^4 + y^2) + y/(y^4 + x^2) \leq 1/(xy)$.
10. Доказати да важи $(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leq abc$ ако су:
(a) a, b, c странице троугла;
(b) a, b, c произвољни позитивни реални бројеви.
11. Доказати да ако за позитивне x, y важи $2x + 4y = 1$, онда важи $x^2 + y^2 \geq 1/20$.
12. Нека су a, b, c дужине страница троугла. Доказати да је

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

13. Доказати: ако је $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, онда $|xu + yv + zw| \leq 1$.
14. Доказати да је за све позитивне реалне бројеве x, y, z

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

15. Нека су $a, b, c, d \geq 0$ такви да је $ab + bc + cd + da = 1$. Доказати да је

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}.$$

16. Доказати да за $a, b, c, d > 0$ важи

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

17. Доказати да за позитивне реалне бројеве a, b, c, d важи

$$\frac{a}{b+2c+3d} + \frac{b}{c+2d+3a} + \frac{c}{d+2a+3b} + \frac{d}{a+2b+3c} \geq \frac{2}{3}.$$

18. Нека су a_1, a_2, \dots, a_n позитивни реални бројеви. Доказати да је

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2} + \frac{a_2^2}{a_2+a_3} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n+a_1} \geq \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{2}.$$

19. Нека је $x, y, z > 1$ и $1/x + 1/y + 1/z = 2$. Доказати да је

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

20. Доказати да за све позитивне реалне бројеве a и b , и све природне n важи

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}.$$

21. Доказати да за све $p, q > 0$ такве да $p + q = 1$ важи

$$\left(p + \frac{1}{p}\right)^2 + \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

22. Одредити најмању могућу вредност израза $(x+y)(x+z)$, ако су $x, y, z > 0$ и

$$xyz(x+y+z) = 1.$$

23. Ако за бројеве a, b, c важи

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{c^2}{a+b} + \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} \geq \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a},$$

доказати да је $a = b = c$.

24. (ИМО2000.2) Нека су a, b, c позитивни реални бројеви, такви да је $abc = 1$. Доказати да је

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$