ПРИПРЕМЕ АВАЛА - НЕЈЕДНАКОСТИ (ВИШИ НИВО)
БЕОГРАД 07.02.2013.
ПРЕДАВАЧ: Миљан Кнежевић

1. (*CMO* 2008) Нека су a, b и c позитивни реални бројеви за које је $a+b+c=1$, доказати да је

$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\leqslant\frac{3}{2}.$$

Када важи знак једнакости?

Решење: Очигледно је

$$1-\frac{a-bc}{a+bc}=\frac{2bc}{(1-b)(1-c)}.$$

Слично урадимо и за остале разломке на левој страни неједнакости. Коначно, добијамо еквивалентну неједнакост

$$\frac{2bc}{(1-b)(1-c)}+\frac{2ca}{(1-c)(1-a)}+\frac{2ab}{(1-a)(1-b)}\geqslant\frac{3}{2},$$

односно, сређивањем израза

$$4(bc+ca+ab-3abc)\geqslant 3(bc+ca+ab+1-a-b-c-abc).$$

Како је $a+b+c=1$, последња неједнакост је еквивалентна са $ab+bc+ca\geqslant 9abc$, односно

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9,$$

што је тривијална последица неједнакости између хармонијске и аритметичке средине. Једнакост важи акко је $a=b=c=\frac{1}{3}$.

2. (*IMO short list* 2008) Нека су a, b, c и d позитивни реални бројеви такви да је $abcd=1$ и $a+b+c+d>\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$. Доказати да је

$$a+b+c+d<\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{d}{c}+\frac{a}{d}.$$

3. Нека је S средиште уписане кружнице троугла ABC и нека су r_1, r_2 и r_3 редом полупречници кружница описаних око троуглова ABS, BCS и CAS. Доказати да је тада

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\leqslant\frac{1}{AS}+\frac{1}{BS}+\frac{1}{CS}.$$

4. (*HK* 2005) Нека су a, b, c и d позитивни реални бројеви такви да је $a+b+c+d=1$. Доказати да је

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3)\geqslant a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}.$$

Решење: Како је $a+b+c+d=1$ то је на основу Коши-Шварцове неједнакости примењене на векторе $(1,1,1,1)$ и (a,b,c,d) испуњено

$$4(a^2+b^2+c^2+d^2)\geqslant(a+b+c+d)^2=1.$$

Нека је $t=a^2+b^2+c^2+d^2$ (касније ће нам требати).
Примењујући поново Коши-Шварцову неједнакост, овог пута на векторе

$$(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c},\sqrt{d})\quad \text{и}\quad (\sqrt{a^3},\sqrt{b^3},\sqrt{c^3},\sqrt{d^3}),$$

добијамо

$$a^3+b^3+c^3+d^3=(a+b+c+d)(a^3+b^3+c^3+d^3)\geqslant(a^2+b^2+c^2+d^2)^2,$$

па је зато довољно доказати да је

$$6t^2-t-\frac{1}{8}\geqslant 0,$$

где је $t=a^2+b^2+c^2+d^2$. Међутим,

$$6t^2-t-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}(12t+1)(4t-1),$$

па како је $4t\geqslant 1$, неједнакост тривијално следи. Проверити када важи знак једнакости!

5. Нека су $a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots,a_{2010},b_{2010}$ произвољни реални бројеви такви да је $\sum\limits_{k=1}^{2010}a_k^2=\sum\limits_{k=1}^{2010}b_k^2=1$ и $\sum\limits_{k=1}^{2010}a_kb_k=0$. Доказати да је

$$(\sum_{k=1}^{2010}a_k)^2+(\sum_{k=1}^{2010}b_k)^2\leqslant 2010.$$

6. (*ROM* 2003) Нека је $(a_n)_{n\geq 1}$ низ реалних бројева задат са $a_1=\dfrac{1}{2}$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}$, $n\in\mathbb{N}$. Доказати да за свако $n\in\mathbb{N}$ важи $a_1+a_2+\ldots+a_n<1$.

Решење: Нека је $b_n=\dfrac{1}{a_n}$. Из услова задатка налазимо да је тада $b_{n+1}=b_n^2-b_n+1$, па је

$$b_{n+1}-1=b_n(b_n-1).$$

Примењујући претходну релацију на $b_n,b_{n-1},\ldots,b_2$ добијамо да је $b_{n+1}=b_nb_{n-1}\ldots b_1+1$, јер је $b_1=2$. Сада је

$$\begin{aligned}a_1+a_2+\ldots+a_n&=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}\\&=1-\frac{1}{b_1b_2\cdots b_n},\end{aligned}$$

јер је

$$\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b_1b_2\cdots b_{n-1}}-\frac{1}{b_1b_2\cdots b_n}.$$

Дакле, $a_1+a_2+\ldots+a_n<1$, јер је сваки члан низа (b_n) позитиван.

7. (*ROM* 2003) Нека је P тачка у унутрашњости троугла ABC, $\angle BAC=60^\circ$, таква да је $PA=1$, $PB=2$ и $PC=3$. Наћи максималну могћу површину троугла ABC.

8. (*TUR* 2008) Нека полином $p(x)=x^3-ax^2+bx-c$ има три позитивна реална корена. Одредити минималну вредност израза

$$\frac{1+a+b+c}{2a+b+3}-\frac{c}{b}.$$

9. (*TUR* 2007) Нека су a,b и c позитивни реални бројеви за које је $a+b+c=1$, доказати да је

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ac+2b^2+2b}\geqslant\frac{1}{ab+bc+ac}.$$

Када важи знак једнакости?

Решење: Очигледно је

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}\geqslant\frac{ab}{(ab+bc+ca)^2},$$

јер је последње еквивалентно са

$$(ab+ca+bc)^2\geqslant ab(ab+2c^2+2c),$$

тј.
$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc \geqslant ab(ab + 2c^2 + 2c),$$
јер је $a+b+c = 1$. Међутим, сређивањем последње неједнакости добијамо еквивалентну неједнакост
$$a^2c^2 + b^2c^2 \geqslant 2abc^2,$$
која је тачна на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине.

10. (USA 2009) Доказати да за позитивне реалне бројеве x, y и z важи
$$x^3(y^2 + z^2)^2 + y^3(z^2 + x^2)^2 + z^3(x^2 + y^2)^2 \geqslant xyz[xy(x + y)^2 + yz(y + z)^2 + zx(z + x)^2].$$

11. (USA 2001) Нека је $(a_n)_{n\geq 0}$ низ реалних бројева такав да је $a_{n+1} \geqslant a_n^2 + \frac{1}{5}$, $n \geqslant 0$. Доказати да је $\sqrt{a_{n+5}} \geqslant a_{n-5}^2$, за $n \geqslant 5$.

12. Нека су a, b и c дужине страница BC, CA и AB, редом, троугла ABC, R полупречнк описане кружнице око тог троугла и P произвољна тачка унутар тог троугла. Доказати неједнакост
$$\frac{PA}{a^2} + \frac{PB}{b^2} + \frac{PC}{c^2} \geqslant \frac{1}{R}.$$

13. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви. Одредити k тако да важи
$$(k + \frac{a}{b + c})(k + \frac{b}{c + a})(k + \frac{c}{a + b}) \geqslant (k + \frac{1}{2})^3.$$

14. Доказати да за реалне бројеве $x, y, z \in [1, 2]$ важи неједнакост
$$(x + y + z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \geqslant 6(\frac{x}{y + z} + \frac{y}{z + x} + \frac{z}{x + y}).$$

15. Нека су $a, b, c > 0$ такви да је $ab + ac + bc = 1$. Доказати да је
$$\sqrt{a^3 + a} + \sqrt{b^3 + b} + \sqrt{c^3 + c} \geqslant 2\sqrt{a + b + c}.$$

16. (IR 2006) Нека је ABC оштроугли троугао, D, E и F подножја висина тог троугла која одговарају страницама BC, CA и AB, редом. Ако су P, Q и R пресечне тачке нормала повучених из тачака A, B и C, редом, на EF, FD и DE, доказати да је $2(PQ + QR + RP) \geqslant DE + EF + FD$.

17. Нека су x, y и z позитивни реални бројеви такви да је $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$. Доказати да је
$$\frac{x^2 + yz}{\sqrt{2x^2(y + z)}} + \frac{y^2 + zx}{\sqrt{2y^2(z + x)}} + \frac{z^2 + xy}{\sqrt{2z^2(x + y)}} \geqslant 1.$$

18. Нека су a, b и c позитивни реални бројеви такви да је $abc = 8$. Доказати да је
$$\frac{a^2}{\sqrt{(1 + a^3)(1 + b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1 + b^3)(1 + c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1 + c^3)(1 + a^3)}} \geqslant \frac{4}{3}.$$

19. (IMO *short list* 2006) Нека су a, b и c дужине страница неког троугла. Доказати да важи неједнакост
$$\frac{\sqrt{b + c - a}}{\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c + a - b}}{\sqrt{c} + \sqrt{a} - \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a + b - c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}} \leqslant 3.$$
Када важи знак једнакости?

Решење: Због симетрије, претпоставимо да је $a \geqslant b \geqslant c$. Очигледно је $\frac{\sqrt{a+b-c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}} \leqslant 1$, јер је $\sqrt{a + b - c} - \sqrt{a} = \frac{(a+b-c)-a}{\sqrt{a+b-c}+\sqrt{a}} \leqslant \frac{b-c}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \sqrt{b} - \sqrt{c}$. Са друге стране, важи и $\frac{\sqrt{b+c-a}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c+a-b}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}} \leqslant 2$.

Заиста, ако означимо са $u=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ и са $v=\sqrt{a}-\sqrt{b}$, тада је $uv=a-b$, па последња неједнакост постаје $\frac{\sqrt{c-uv}}{\sqrt{c}-v}+\frac{\sqrt{c+uv}}{\sqrt{c}+v}\leqslant 2$. Међутим, применом Коши-Шварцове неједнакости на векторе $(\frac{\sqrt{c-uv}}{\sqrt{\sqrt{c}-v}},\frac{\sqrt{c+uv}}{\sqrt{\sqrt{c}+v}})$ и $(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{c}-v}},\frac{1}{\sqrt{\sqrt{c}+v}})$ добијамо

$$(\frac{\sqrt{c-uv}}{\sqrt{c}-v}+\frac{\sqrt{c+uv}}{\sqrt{c}+v})^2\leqslant(\frac{c-uv}{\sqrt{c}-v}+\frac{c+uv}{\sqrt{c}+v})(\frac{1}{\sqrt{c}-v}+\frac{1}{\sqrt{c}+v})$$
$$=4\frac{c^2-\sqrt{c}uv^2}{(c-v^2)^2}\leqslant 4\frac{c^2-2cv^2}{(c-v^2)^2}\leqslant 4,$$

јер је $u\geqslant 2\sqrt{c}$. Анализом претходних неједнакости лако се добија да једнакост важи акко је троугао једнакостраничан.

20. (*IMO short list* 2006) Одредити најмањи број $M>0$ такав да неједнакост

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)|\leqslant M(a^2+b^2+c^2)^2$$

важи за све реалне бројеве a,b и c.

21. (*IMO short list* 2010) За позитивне бројеве a,b,c,d,e и f важи $a<b<c<d<e<f$. Ако је $s=a+c+e$ и $t=b+d+f$, доказати да је онда

$$2st>\sqrt{3(s+t)(s(bd+bf+df)+t(ac+ae+ce))}.$$

22. (*IMO short list* 2011) Нека су a,b и c позитивни реални бројеви за које је $\min(a+b,b+c,c+a)>\sqrt{2}$ и $a^2+b^2+c^2=3$. Доказати да је

$$\frac{a}{(b+c-a)^2}+\frac{b}{(c+a-b)^2}+\frac{c}{(a+b-c)^2}\geq\frac{3}{(abc)^2}.$$

23. (*IMO short list* 2009) Дата је функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Доказати да се могу наћи реални бројеви x и y такви да је

$$f(x-f(y))>yf(x)+x.$$

24. (*IMO short list* 2007) Нека су $a_1,a_2,\ldots,a_{100}$ ненегативни реални бројеви за које важи $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{100}^2=1$. Доказати да је испуњено

$$a_1^2\cdot a_2+a_2^2\cdot a_3+\ldots+a_{100}^2\cdot a_1<\frac{12}{25}.$$

25. (*VN* 2011 - измењено) Реални бројеви $x_1,x_2,\ldots,x_{3013}$ за које важи $x_1\geqslant x_2\geqslant\ldots\geqslant x_{2013}$ задовољавају систем

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_{2013}=0,\\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{2013}^2=2012\cdot 2013.\end{cases}$$

Наћи најмању и највећу вредност збира $S=x_1+x_2$.

26. (*VN* 2010) Нека су a,b и c позитивни реални бројеви који задовољавају неједнакост $16(a+b+c)\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Доказати да важи

$$\left(\frac{1}{a+b+\sqrt{2a+2c}}\right)^3+\left(\frac{1}{b+c+\sqrt{2b+2a}}\right)^3+\left(\frac{1}{c+a+\sqrt{2c+2b}}\right)^3\leq\frac{8}{9}.$$

Када важи знак једнакости?

Решење: На основу АГ неједнакости имамо:
$\sum_{cyc}\left(\frac{1}{a+b+\sqrt{2a+2c}}\right)^3=\sum_{cyc}\left(\frac{1}{a+b+\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a+c}{2}}}\right)^3\leqslant\sum_{cyc}\frac{1}{\frac{27(a+b)(\sqrt{a+c})^2}{2}}$. Стога, треба доказати да је $\sum_{cyc}\frac{1}{(a+b)(a+c)}\leqslant 12$, односно $6(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant a+b+c$, тј.

$$6abc\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}ab\right)\geqslant abc\sum_{cyc}a+6a^2b^2c^2.$$

Међутим, поново, на основу АГ неједнакости и неједнакости у услову задатака добијамо $16abc\sum_{cyc} a\sum_{cyc} ab \geqslant \left(\sum_{cyc} ab\right)^2 \geqslant 3abc\sum_{cyc} a$, јер је $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geqslant ab^2c+abc^2+a^2bc$, као и $2abc\sum_{cyc} a\sum_{cyc} ab \geqslant 18a^2b^2c^2$. Сабирањем последњих неједнакости добијамо тврђење. Очигледно је да једнакост важи акко је $a=b=c=\frac{1}{4}$.

27. (IR 2012) Ако су a, b и c позитивни реални бројеви за које је $ab+bc+ca=1$, доказати да је онда

$$\sqrt{3}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \leqslant \frac{a\sqrt{a}}{bc}+\frac{b\sqrt{b}}{ca}+\frac{c\sqrt{c}}{ab}.$$

Када важи знак једнакости?

28. (IR 2011) Наћи најмању могућу вредност реалног броја k такву да за све реалне бројеве a, b, c и d важи

$$\begin{aligned}&\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}+\sqrt{(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}\\ &+\sqrt{(c^2+1)(d^2+1)(a^2+1)}+\sqrt{(d^2+1)(a^2+1)(b^2+1)}\\ &\geqslant 2(ab+bc+cd+da+ac+bd)-k.\end{aligned}$$

29. (IR 2009) Ако су a, b и c позитивни реални бројеви за које је $a+b+c=3$, доказати да је онда

$$\frac{1}{2+a^2+b^2}+\frac{1}{2+b^2+c^2}+\frac{1}{2+c^2+a^2} \leqslant \frac{3}{4}.$$

Када важи знак једнакости?

30. (IR 2008) Ако су a, b и c позитивни реални бројеви за које је $ab+bc+ca=1$, доказати да је онда

$$\sqrt{a^3+a}+\sqrt{b^3+b}+\sqrt{c^3+c} \geqslant 2\sqrt{a+b+c}.$$

Када важи знак једнакости?

31. (IR 2006) Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ реални бројеви. Доказати да је

$$\sum_{i,j=1}^{n} |x_i+x_j| \geqslant n\sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

32. (IR 2005) Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позитивни реални бројеви такви да је $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Претпоставимо да је

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=m \qquad \text{и} \qquad \frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}=1,$$

и да постоји неко $1 \leqslant i \leqslant n$ за које је $x_i \leqslant m$. Доказати да је

$$n-i \geqslant n\left(m-x_i\right)^2.$$

33. (IND 2009) Ако су a, b и c позитивни реални бројеви за које је $a^3+b^3=c^3$, доказати да је онда $a^2+b^2-c^2>6(c-a)(c-b)$.

34. (CHN 2001) Ако су a, b и c реални бројеви и $F=\max\limits_{1\leq x\leq 3}|x^3-ax^2-bx-c|$. Наћи најмању могућу вредност од F.

35. (ROM 2012) Нека је k природан број. Наћи максималну могућу вредност израза

$$a^{3k-1}b+b^{3k-1}c+c^{3k-1}a+k^2a^kb^kc^k,$$

где су a, b и c позитивни реални бројеви за које је $a+b+c=3k$.

36. (ROM 2011) Дати су реални бројеви x, y и z за које је $x+y+z=0$. Доказати да важи

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1}+\frac{y(y+2)}{2y^2+1}+\frac{z(z+2)}{2z^2+1} \geqslant 0.$$

37. (HK 2008) Нека су a, b и c дужине страница неког троугла. Наћи све могуће вредности количника

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

38. (MLD 2011) Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позитивни реални бројеви такви да је $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1$. Доказати да важи

$$\frac{1}{x_1(x_1+1)}+\frac{1}{x_2(x_2+1)}+\cdots+\frac{1}{x_n(x_n+1)} \geqslant \frac{n}{2}.$$

Када важи знак једнакости?

39. (MLD 2010) Доказати да за сваки реалан број x важи $\max\{|\sin x|, |\sin(x+2010^\circ)|\} > \frac{1}{\sqrt{17}}$.

40. (MLD 2009) Нека су $x, y, z \in [\frac{1}{2}, 2]$ и a, b и c било која њихова пермутација. Доказати да је испуњено

$$\frac{60a^2-1}{4xy+5z}+\frac{60b^2-1}{4yz+5x}+\frac{60c^2-1}{4zx+5y} \geqslant 12.$$

41. (MLD 2005) За позитивне реалне бројеве a, b и c важи $a^4+b^4+c^4=3$. Доказати да је тада

$$\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}+\frac{1}{4-ab} \leqslant 1.$$

Када важи знак једнакости?

42. (USA 2010) Нека су h_a, h_b и h_c дужине висина троугла ABC које одговарају страницама BC, CA и AB, редом. Означимо са P произвољну тачку унутар тог троугла. Доказати да је тада

$$\frac{PA}{h_b+h_c}+\frac{PB}{h_a+h_c}+\frac{PC}{h_a+h_b} \geqslant 1.$$

СРЕЋНО!!!
МК