Nejednakosti

Nejednakost trougla: Za proizvoljne realne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ važi:

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$

Bernoulli: Za $x > -1$ i $\alpha \geq 1$ važi $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$.

Cauchy - Schwartz: Za realne brojeve x_i i y_i, $i = \overline{1,n}$ važi:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2$$

Jednakost važi akko $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots = \frac{x_n}{y_n}$.

Hölder: Ako za pozitivne brojeve p i q važi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tada za svaki par n-torki realnih brojeva x_i i y_i važi:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Jednakost važi akko $\frac{{x_1}^p}{{y_1}^q} = \frac{{x_2}^p}{{y_2}^q} = \ldots = \frac{{x_n}^p}{{y_n}^q}$.

Minkowsky: Neka je $p \geq 1$ i $x_i \in R$ i $y_i \in R$ za $i = \overline{1,n}$. Tada važi:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Jednakost važi akko $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots = \frac{x_n}{y_n}$.

Jensen: Ako je funkcija $f : (a,b) \mapsto R$ konveksna i $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $\lambda_i > 0$ i $x_i \in (a,b)$ tada važi:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \geq f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i).$$

Funkcija f je konveksna na intervalu (a,b) ako za svako par brojeva $x, y \in (a,b)$ važi $\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f(\frac{x+y}{2})$, što je ekvivalentno sa uslovom $(\forall x \in (a,b))(f''(x) > 0)$. Ako je funkcija f strogo konveksna, tada jednakost važi akko su svi x_i medjusobno jednaki ili su svi λ_i sem jednog jednaki 0.

Čebišev: Ukoliko realni brojevi $x_i, y_i, i = \overline{1,n}$ zadovoljavaju uslov: $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$ i $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_n$ tada važi:

$$n \sum_{i=1}^{n} x_i y_{n+1-i} \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i) \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Jednakost važi akko $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ ili $y_1 = y_2 = \ldots = y_n$.

Nejednakosti izmedju sredina: Neka je za $k \in R \setminus \{0\}$, sredina k-tog reda:

$$M_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k}{n}\right)^{\frac{1}{k}}$$

M rastuća funkcija po k, odnosno $k \geq l \Rightarrow M_k \geq M_l$. Specijalno M_{-1} je harmonijska, M_1 je aritmetička, M_2 kvadratna, a $\lim_{x\to 0} M_x$ geometrijska sredina brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Zbog toga važi nejednakost medju sredinama $M_2 > M_1 > M_0 > M_{-1}$. Jednakost važi akko $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Težinska AG nejednakost: Za pozitivne brojeve α_i za koje važi $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, nejednakost izmedju aritmetičke i geometrijske sredine glasi:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$$

Jednakost važi akko su svi x_i medjusobno jednaki ili su svi α_i sem jednog jednaki 0.

Muirhead: Za niz realnih brojeva $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ Definise se funkcija T sa n promenljivih:

$$T_a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\pi} x_1^{a_{\pi(1)}} x_2^{a_{\pi(2)}} \cdots x_n^{a_{\pi(n)}}$$

gde se sumiranje vrši po svim permutacijama π skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ukoliko za dva niza realnih brojeva a i b važi: $\sum_{i=1}^{k} a_i \geq \sum_{i=1}^{k} b_i$ za $k = 1, 2, \ldots, n-1$ i $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$, tada važi za sve n-torke nenegativnih brojeva i nejednakost:

$$T_a(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq T_b(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Jednakost važi akko su a i b identični ili kada je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Schur: Za nenegativne realne brojeve x_i, $i = \overline{1, n}$ i $k \in R$ važi:

$$x_1^k(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n) + x_2^k(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n) + \ldots + x_n^k(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1}) \geq 0$$

Jednakost važi akko je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Karamata: Niz $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ majorira niz $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ ako važi $\sum_{i=1}^{k} a_i \geq \sum_{i=1}^{k} b_i$ za $k = 1, 2, \ldots, n-1$ i $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$. To je neophodan i dovoljan uslov da za svaku konveksnu funkciju važi:

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_n)$$

Euler: Za nizove realnih brojeva $\{a_n\}_{n\in N}$ i $\{b_n\}_{n\in N}$ definisane sa $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ i $b_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$ važi:

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots < e < \ldots < b_n < \ldots < b_2$$

Zadaci:

1. Dokazati da je $n \in N$ ispunjeno:

$$\frac{n^2}{3} + \frac{n}{2} + \frac{1}{6} \geq \sqrt[n]{(n!)^2}$$

2. Dokazati da za pozitivne realne brojeve a, b, c važi:

$$abc(ab + bc + ac) \leq a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2$$

Kada važi znak jednakosti?

3. Dokazati da za Fibonačijeve brojeve definisane sa $F_1 = F_2 = 1$ i $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ važi:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \ldots + \frac{F_n}{2^n} < 2$$

4. Dokazati da je:

$$S = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+2}} + \frac{1}{1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\ldots+\frac{1}{1+2+\ldots+2000}} < 3$$

5. Dokazati da za nenegativne realne brojeve $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n$ važi:

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdot\ldots\cdot(a_n+b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot\ldots\cdot a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdot\ldots\cdot b_n}$$

6. Ako za n realnih brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$ važi $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ i $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$, onda postoje indeksi i, j za koje važi $x_i x_j \leq -\frac{1}{n}$.

7. Ako je $a, b > 0$ i $a + b = 1$, dokazati da je $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.

8. Neka su a, b, c, d nenegativni realni brojevi čija je suma 1. Dokazati nejednakost:

$$abc + bcd + cda + dac \leq \frac{1}{27} + \frac{176abcd}{27}$$

9. Dokazati da za pozitivne realne brojeve x, y, z važi nejednakost:

$$(xy + yz + zx) \cdot \left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \frac{9}{4}$$

10. Ako je za pozitivne brojeve a, b, c važi $abc = 1$ tada je:

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^5+a^5+ca} \leq 1$$

11. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi, takvi da je $a+b+c \geq abc$. Dokazati da je $a^2+b^2+c^2 \geq abc\sqrt{3}$.

12. Neka su $r_1, r_2, \ldots, r_n$ realni brojevi ne manji od 1. Dokazati nejednakost:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i+1} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} r_i}}$$

13. U trouglu ABC a, b i c su stranice, a S površina trougla. Dokazati nejednakost **Finsler - Hadviger:**

$$2(ab + bc + ac) - (a^2 + b^2 + c^2) \geq 4\sqrt{3}S$$

Kada važi znak jednakosti?

14. Data je tačka P unutar trougla ABC. Sa v_a, v_b, v_c označimo rastojanja tačke P od pravih BC, CA, AB, a sa L_a, L_b, L_c rastojanja tačke P od tačaka A, B, C redom. Tada važi nejednakost **Erdoš - Mordel:**

$$L_a + L_b + L_c \geq 2(v_a + v_b + v_c)$$

15. Dokazati da za pozitivne realne brojeve važi nejednakost:

$$27[(x+y)(y+z)(z+x)]^2 \geq 64xyz(x+y+z)^3$$

16. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi za koje važi $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} = 1$. Dokazati nejednakost:

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \ldots + \sqrt{x_n} \geq (n-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$$

17. Dat je niz realnih brojeva $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} = 0$. Dokazati nejednakost:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}})$$

18. Naći najveći realan broj A takav da za sve pozitivne realne x, y, z važi:

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\geq A$$

19. Ako su p i q nenegativni realni brojevi i $p+q=1$. Dokazati da za sve prirodne brojeve n i m važi:

$$(1-p^m)^n+(1-q^n)^m\geq 1$$

20. Neka su x,y,z pozitivni realni brojevi, takvi da je $x+y+z\geq 1$. Dokazati nejednakost:

$$\frac{x\sqrt{x}}{y+z}+\frac{y\sqrt{y}}{x+z}+\frac{z\sqrt{z}}{x+y}\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

21. Neka su $x_1,x_2,\ldots,x_n$ pozitivni realni brojevi sa sumom jednakom 1. Dokazati da važi:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{2-x_i}\geq\frac{n}{2n-1}.$$

22. Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi čiji je proizvod 1, dokazati:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{a^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$$

Kada važi znak jednakosti?

23. Realni brojevi $x_1,x_2,\ldots,x_n$ zadovoljavaju uslove: $x_i\in R$, $x_i\geq -1$, $\sum_{i=1}^{n}x_i^3=0$. Dokazati da tada važi: $\sum_{i=1}^{n}x_i\leq\frac{n}{3}$

24. Neka realni brojevi $x_1,x_2,\ldots,x_n$ zadovoljavaju $x_{i+j}\leq x_i+x_j$ za sve $i,j\leq n$. Dokazati nejednakost:

$$x_1+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{3}+\ldots+\frac{x_n}{n}\geq x_n$$

25. Neka je s suma n pozitivnih realnih brojeva $x_1,x_2,\ldots,x_n$ Dokazati da je:

$$\sum_{i=1}^{n}(s-x_i)^{x_i}>n-1.$$

26. Dokazati da za svaku trojku realnih brojeva (x,y,z) za koju je $x^2+y^2+z^2=2$ važi nejednakost:

$$x+y+z\leq 2+xyz$$

Kada važi znak jednakosti?

27. Dokazati da za pozitivne realne brojeve $x_1,x_2,\ldots,x_k$, gde je $k>3$, važi:

$$\frac{x_1}{x_k+x_2}+\frac{x_2}{x_1+x_3}+\ldots+\frac{x_k}{x_{k-1}+x_1}\geq 2$$

Da li 2 može da se zameni većim brojem?

28. Neka su $x_1,x_2,\ldots,x_n$ različiti prirodni brojevi. Odrediti kada važi jednakost i dokazati:

$${x_1}^2+{x_2}^2+\ldots+{x_n}^2\geq\frac{2n+1}{3}(x_1+x_2+\ldots+x_n)$$

29. Neka su $n\in N$. Dokazati da je:

$$\sum_{k=1}^{3n}|\sin k|\geq\frac{8n}{5}$$

30. Neka su x,y,z realni brojevi veći od 1 i važi: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Dokazati da onda važi nejednakost:

$$\sqrt{x+y+z}\geq\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$$