Dodatna nastava iz matematike

Funkcionalne jednačine

Predavač: A.Pejčev

1. Neka je $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Koliko ima preslikavanja $f : A \to A$ za koje važi:

   (a) Za i,j$\in A$, i$\neq$ j, $f(i) \neq f(j)$;

   (b) Ako je i+j=7, onda je i $f(i) + f(j) = 7$.

2. Neka je $A = \{1, 2, ..., n\}$, gde je $n \geq 3$ i neka je $\mathcal{F}$ familija svih nekonstantnih funkcija $f : A \to A$ sa svojstvima:

   (a) $f(k) \leq f(k + 1)$ za $k = 1, 2, ..., n - 1$;

   (b) $f(k) = f(f(k + 1))$ za $k = 1, 2, ...n - 1$.

   Koliko elemenata ima familija $\mathcal{F}$

3. Funkcija f zadovoljava uslov $f(1) + f(2) + ... + f(n) = n^2 f(n)$ za svaki prirodan broj n. Naći $f(1997)$ ako je $f(1) = 999$.

4. Naći sve funcije $f : N \to N$ tako da je $f(f(n) + f(m)) = m + n$ za sve m,n. Odrediti $f(2004)$ ako je $f(1) = 1$.

5. Naći sve funkcije $f : N \to N\backslash\{1\}$ za koje važi: $f(n) + f(n + 1) = f(n + 2)f(n + 3) - 168$, za svako $n \in N$.

6. Dokazati da ne postoji bijekcija $f : N \to N_0$ takva da je $f(mn) = f(m) + f(n) + 3f(m)f(n)$ za svako $m, n \in N$.

7. Dokazati da ne postoji funkcija $f : N_0 \to N_0$ za koju je $f(f(n)) = n+2005$.

8. Naći sve funkcije $f, g : Z \to Z$ takve da je $f(g(x) + y) = g(f(y) + x)$ za proizvoljne cele brojeve x i y, uz uslov da g bude "1-1" funkcija.

9. Neka je $f : N \times N \to N$ definisana sa

   (a) $f(1, 1) = 2$;

   (b) $f(i + 1, j) = 2(i + j) + f(i, j)$;

   (c) $f(i, j + 1) = 2(i + j - 1) + f(i, j)$

10. Neka je $f : N \to N$, tako da za svako m,n$\in N$ važi:$f(n^2 f(m)) = m(f(n))^2$. Odrediti najmanju moguću vrednost za $f(1998)$.

11. Funkcija $f : Z \to Z$ zadovoljava sledeće uslove:

    (a) $0 \leq f(x) \leq 1996$ za svako $x \in Z$;

    (b) $f(x + 1997) = f(x)$ za svako $x\ inZ$;

(c) $f(xy) \equiv f(x)f(y)(mod 1997)$ za svako $x, y \in Z$;

(d) $f(2) = 999$.

Znamo da postoji jedinstvena takva funkcija. Naći najmanji $x \in N$ za koji je $f(x) = 1000$.

12. Neka funkcija $f : N_0 \to N_0$ zadovojlava sledeće uslove:

    (a) $f(0) = 0, f(1) = 1$;

    (b) $3f(n)f(2n+1) = f(2n)(1 + 3f(n))$;

    (c) $f(2n) < f(6n)$.
    Naći sva rešenja jednačine $f(k) + f(l) = 293, k < l$.

13. Da li postoji rastuća funkcija $f : N \to N$ takva da je $f(1) = 2$ i $f(f(n)) = f(n) + n$?

14. Naći sve funkcije $f : N_0 \to N_0$ koje zadovoljavaju sledeće uslove:

    (a) Za svaka dva $m, n \in N_0$ važi $2f(m^2 + n^2) = (f(m))^2 + (f(n))^2$.

    (b) Za svaka dva $m, n \in N_0$ i $m \geq n$ važi $f(m^2) \geq f(n^2)$.

15. Neka za funkciju $f : N \to N$ važi $f(n+1) = f(f(n))$ za svako $n \in N$. Dokazati da je $f(n) = n$ za svako $n \in N$

16. Naći sve funkcije $f : N \to N$ takve da je $2n \leq f(f(n)) + f(n) \leq 2n + 2001$ za sve $n \in N$.

17. Naći sve funcije $f : N_0 \to N_0$ za koje važi $f(f(n)) + f(n) = 2n + 3k$, za sve $n \in N_0$.

18. Naći sve funkcije $f : Q^+ \to Q^+$, takve da su za svako $x \in Q^+$ ispunjeni sledeći uslovi:

    (a) $f(x+1) = f(x) + 1$;

    (b) $f(x^2) = (f(x))^2$.

19. **Košijeva jednačina** Neka je $f : Q \to R$ funkcija za koju važi $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Dokazati da je $f(x) = ax$, za svako x,gde je $a \in R$.

20. Naći bar jednu funkciju $f : Q^+ \to Q^+$ sa svojstvom $f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$, $x, y \in Q^+$.

21. Neka je $f : R\backslash\{0\} \times R\backslash\{0\} \to R^+$ funkcija za koju važi:

    (a) $f(xy, z) = f(x, z)f(y, z)$;

    (b) $f(z, xy) = f(z, x)f(z, y)$;

    (c) $f(x, 1-x) = 1$, za sve x,y,$z \in R\backslash\{0\}$.
    Dokazati da je $f(x, x) = 1, f(x, -x) = 1$ i $f(x, y)f(y, x) = 1$ za sve $x, y \in R\backslash\{0\}$.

22. Neka su $f_i : R \to R, i = 1, 2$ aditivne funkcije, tj. neka važi $f_i(x + y) = f_i(x) + f_i(y)$ za svako $x, y \in R$. Ako je $f_1(x)f_2(x) = ax^2$ za neko $a \in R$ i za svako $x \in R$, dokazati da postoje $a_i \in R$ tako da je $f_i(x) = a_i x$ za svako $x \in R$.

23. Za koje realne vrednosti a postoji funkcija $f : R \to R$, različita od konstante, takva da za svako $x, y \in R$ važi: $f(a(x + y) = f(x) + f(y)$?

24. Neka je a dati realan broj. Naći sve funkcije $f : R_0^+ \to R_0^+$ takve da je $ax^2 f(\frac{1}{x} + f(x) = \frac{x}{x+1}$ za sve $x \in R^+$.

25. Naći sve funkcije $f : R\, rightarrow R$ takve da za proizvoljne realne brojeve x i y važi jednakost $f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy$.

26. Naći sve funkcije $f : R \to R$ tako da $xf(x) - yf(y) = (x - y)f(x + y)$ važi za sve $x, y \in R$.

27. Neka je $m = 2k$ i n zadati prirodan broj veći od 1. Ako funkcija $f : R^+ \to R$ zadovoljava uslove:

    (a) $f(\frac{x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m}{n}) = \frac{f(x_1)^m + f(x_2)^m + \ldots + f(x_n)^m}{n}$ za sve $x_i \in R_0^+$;
    (b) $f(2003) \neq 2003$;
    (c) $f(2005) \neq 0$.

    Dokazati da je $f(2004) = 1$.

28. Naći sve funkcije $f : R \to R$ takve da za proizvojlne $x, y \in R$ važi jednakost $x^2 f(y) + yf(x^2 = f(xy) + a$, gde je a realan parametar.

29. Naći sve funkcije $f : R \to R$ takve da za svako realno x i y važi $f(x+y) = f(x)f(y)f(xy)$

30. Odrediti sve funkcije $f : R \to R$ takve da: $f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y$, $x, y \in R$.

31. Rešiti jednavinu $f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$, x,y$\in R$.

32. Da li postoje funkcije $f : R \to R$ i $g : R \to R$takve da je za svako realno x:$x^2 = f([x]) + g(\{x\})$?

33. Naći sve funkcije $f : [1, +\infty) \to [1, +\infty)$ za koje važi:

    (a) $f(x) \leq 2(x + 1)$;
    (b) $f(x + 1) = \frac{1}{x}[(f(x))^2 - 1]$.

34. Neka je funkcija f bijekcija intervala [0,1] na samog sebe i neka ima svojstvo:$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - f(x)| + |y - f(y)|}{2}$. Dokazati da postoji tačno jedna tačka $x \in [0, 1]$ takva da je $f(x) = x$.

35. Neka je a realan broj i funkcija $f : R \to R$ takva da za sve x,y$\in R$ važi $f(x+y) = f(x)f(a-y) + f(y)f(a-x)$ i $f(0) = \frac{1}{2}$. Dokazati da je f konstantna.

36. Naći sve monotone invertibilne funkcije $f : R \to R$ za koje važi: $f(x) + f^{-1}(x) = 2x$.

37. Neka su a i b pozitivni realni brojevi. Dokazati da jednačina $f(f(x)) + af(x) = b(a+b)x)$ ima jedinstvrno rešenje u skupu $R^+ \to R^+$.

38. Funkcija $f : R^+ \to R^+$ zadovoljava jednakost $f(f(x)) + x = f(2x)$ za svaki $x \in R^+$. Dokazati da je $f(x) \geq x$ za svako $x \in R^+$.

39. Naći sve funkcije $f : R_0 \to R_0$ za koje je $f(f(x) - x) = 2x$.

40. Naći sve funkcije $g : R \to R$ takve da je za proizvoljne realne x i y:$g(x+y) + g(x)g(y) = g(xy) + g(x) + g(y)$

41. Neka je $S = \{x \in R : x > -1\}$. Naći sve $f : S \to S$ takve da je $\frac{f(x)}{x}$ strogo rastuća na svakom od intervala $(-1, 0)$ i $(0, +\infty)$ i da važi: $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$, $x, y \in R$.

42. Naći sve funkcije $f : R \to R$ takve da $f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$ za sve $x, y \in R$.

43. Odrediti sve funkcije $f : R^+ \to R^+$ takve da je $f(x)f(yf(x)) = f(x+y)$ za sve $x, y \in R^+$.

44. Naći sve $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, tako da je $f(f(x) + y) = xf(1 + xy)$ za sve x,y iz R^+.

45. Ako je funkcija $f : R \to R$ aditivna i rastuća na datom intervalu, onda je rastuća i na R. Dokazati.

46. Za funkciju u prethodnom zadatku dokazati da je oblika ax.

47. Ako je funkcija $f : R \to R$ aditivna i za svako $x \in R^+$ važi $f(x) \in R^+$, onda je $f(x) = ax$. Dokazati.

48. Naći sve funkcije $f : R \to R$ takve da je: $f(x^2 + y^2) = f(x^2 - y^2) + f(2xy)$ za sve $x, y \in R$.

49. Naći sve funkcije $f : (0, +\infty) \to (0, \infty)$ takve da je $f(x^y)f(x)^{f(y)}$ za sve x,y iz R_0^+.

50. Naći sve funkcije $f : R \to R$ za koje važi:

    (a) $f(1) = 1$;

    (b) za svako $a, b \in R$, $f(a+b) = f(a) + f(b)$;

    (c) $f(a)f(\frac{1}{a}) = 1$

51. Neka je $n \in N$. Naći sve monotone funkcije $f : R \to R$ tako da važi $f(x + f(y)) = f(x) + y^n$ za svako $x, y \in R$.

52. Naći sve funkcije $g : R \to R$ sa osobinom: postoji strogo monotona funkcija $f : R \to R$, tako da $f(x+y) = f(x)g(y)+f(y)$ za svako $x, y \in R$.

53. Neka su a i $w \neq 1$ kompleksni brojevi,$w^3 = 1$ i neka je $g : C \to C$ data funkcuja. Dokazati da postoji tačno jedna funkcija $f : C \to C$ takva da je $f(z) + f(wz + a) = g(z)$, za svaki $z \in C$.

54. Neka je $I = [0, 1], G = I^2, K \in N$. Naći sve $f : G \to I$ takve da za sve $x, y, z \in R$ važi:

    (a) $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$;

    (b) $f(x, 1) = x, f(1, y) = y$;

    (c) $f(zx, zy) = z^k f(x, y)$.

55. Data je funkcija $f : R^2 \to R$ i $n \in N, n \geq 3$ tako da za svaki pravilan mnogougao $A_1A_2...A_n$ važi $f(A_1) + f(A_2) + ... + f(A_n) = 0$ .Dokazati da je f nula-dunkcija