Matematička gimnazija, Beograd
Dodatna nastava za treći i četvrti razred, šk. 2005/06.

IZVODI I LAGRANŽOVI MNOŽIOCI U NEJEDNAKOSTIMA

Teorema 1 *Ako diferencijabilna funkcija $f : A \to \boldsymbol{R}$ u tački $a \in A \subset \boldsymbol{R}^m$ dostiže **lokalni** ekstremum tada je*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(a) = 0.$$

*Kako su lokalni ekstremumi definisani kao tačke čija je neka okolina sadržna u domenu funkcije, to se globalni ekstremumi trebaju tražiti među lokalnim ekstremumima i na **granici** A.*

Primetimo da u poslednjoj teoremi ne važi ekvivalencija, tj. ukoliko su svi parcijalni izvodi funkcije jednaki 0 u tački se ne mora dostizati lokalni ekstremum. Međutim ovo nam neće biti od preterane važnosti u zadacima sa nejednakostima, jer ćemo mi dokazati da data nejednakost važi za sve takve tačke (koje se inače nazivaju *stacionarne*).

Teorema 2 *Neka su f i φ_i, $1 \le i \le s$, neprekidno diferencijalne na **otvorenom** skupu $A \subset \boldsymbol{R}^m$, $s < m$, i pri tome funkcije φ_i ne zavise jedna od druge. Ukoliko funkcija f u tački a ima lokalni ekstremum pri uslovima $\varphi_i = 0$, onda postoje realni brojevi $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ takvi da je a stacionarna tačka funkcije*

$$F = f + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \varphi_i.$$

Globalni ekstremum je neki od lokalnih ekstremuma ili se nalazi u okolini granica zatvorenja skupa A.

U prethodnoj teoremi spominje se nekoliko zbunjujućih pojmova. Kao prvo postavalja se pitanje koje su to neprekidno diferencijabilne funkcije. Na ovome se neću zadržavati, ali dovoljno je znati da su sve elementarne funkcije i kompozicije elementarnih neprekidno diferencijabilne osim možda u tačkama u kojima imamo neko deljenje sa nulom.

Često će u zadacima najteži deo biti ispitivanje granice intervala. Da ne bismo ulazili u striktnu definiciju granice i zatvorenja, objasnimo pojam granice i otvorenog skupa na nekim jednostavnim primerima. Granica kruga je kružna linija, a unutrašnjost kruga (bez kružne linije) je otvoren skup. Skup $S_1 = \{(x, y) |\, x \ge 0,\ y \ge 0\}$ nije otvoren, a njegove granične tačke su one za koje $x = 0$ ili $y = 0$, ali se pri tome mora ispitati funkcija i u tačkama u kojima jedna promenljiva „teži" beskonačnosti (ove tačke se mogu shvatiti kao granične tačke u $(\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}) \times (\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\})$)). Skup $S_2 = \{(x, y) |\, x > 0,\ y > 0\}$ je otvoren i u ovom slučaju se trebaju ispitati tačke iz „beskonačnosti" i one kod kojih jedna koordinata „teži" nuli (jer je zatvorenje ovog skupa upravo S_1).

1. Naći $f(D)$, gde je $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(x, y, z) = xyz$, a $D = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1 \,\wedge\, x + y + z = 1\}$.

2. (Mala Olimpijada 1967) Ako je $a_k \ge 0$ za $k = 1, 2, \ldots, n$ i $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, dokazati da je

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \le 1 + S + \frac{1}{2!}S^2 + \ldots + \frac{1}{n!}S^n.$$

3. (Savezno 1998, 3-4. raz) Neka je $n > 1$ prirodan broj i $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ pozitivni realni brojevi. Dokazati da je

$$\Big(\sum_{i \ne j} a_i b_j\Big)^2 \ge \Big(\sum_{i \ne j} a_i a_j\Big)\Big(\sum_{i \ne j} b_i b_j\Big).$$

4. (Velika Britanija 1995) Naći maksimum izraza $x^2y + y^2z + z^2x - x^2z - y^2x - z^2y$, gde je $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ i $0 \le z \le 1$.

5. Naći maksimum izraza $a + b + c + abc$, ako je $a^2 + b^2 + c^2 + abc \le 4$.

6. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje važi uslov $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$. Dokazati nejednakost

$$\frac{a}{b^2c^2} + \frac{b}{c^2a^2} + \frac{c}{a^2b^2} \ge \frac{9}{a + b + c}.$$

7. (Poljska 1995) Za dati prirodan broj $n \ge 1$ izračunati minimalnu vrednost sume

$$x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^3}{3} + \ldots + \frac{x_n^n}{n},$$

gde su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitivni realni brojevi za koje važi $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n} = n$.

8. (IMO 1998, predlog) Neka su $r_1, r_2, \ldots, r_n$ realni brojevi, ne manji od 1. Dokazati nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i+1} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{r_1 r_2 \cdots r_n}}.$$

9. (IMO 1999, 2. zad) Neka je n fiksiran ceo broj, takav da je $n \geq 2$.

(a) Odrediti najmanju konstantu C tako da nejednakost $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C\Big(\sum_{1\leq i\leq n} x_i\Big)^4$ važi za sve realne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$.

(b) Za tu konstantu C odrediti kada važi jednakost.

10. (IMO 2001, 2. zad) Dokazati da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c važi nejednakost

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

11. (Izborno 2005) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje je $abc = 1$. Dokazati nejednakost

$$\frac{a}{a^2+2} + \frac{b}{b^2+2} + \frac{c}{c^2+2} \leq 1.$$

12. Dokazati da za pozitivne realne brojeve a, b, c važi sledeća dupla nejendakost

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}} \geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{3}.$$

13. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc \leq 8$. Dokazati da je

$$\frac{1}{a^2-a+1} + \frac{1}{b^2-b+1} + \frac{1}{c^2-c+1} \geq 1.$$

14. Neka su a, b, c, x, y, z realni brojevi takvi da je $(a+b+c)(x+y+z) = 3$ i $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) = 4$. Dokazati da je $ax+by+cz \geq 0$.

15. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokazati da je

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

16. (Kina 2005) Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi za koje važi $abcd = 1$. Dokazati da je

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1.$$

17. Dokazati da za pozitivne realne brojeve a, b, c, d takve da je $a+b+c+d+abcd = 5$ važi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq 4.$$

18. (Vijetnam 2001) Pozitivni realni brojevi a, b, c zadovoljavaju uslov $21ab + 2bc + 8ca \leq 12$. Naći najmanju moguću vrednost izraza

$$P(a,b,c) = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}.$$

19. (IMO 1993, predlog) Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c+d = 1$. Dokazati nejednakost

$$abc + bcd + cda + dab \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd.$$

20. (Vijetnam 1996) Neka su a, b, c, d nenegativni realni brojevi koji zadovoljavaju uslov $2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) + abc+abd+acd+bcd = 16$. Dokazati nejednakost

$$a+b+c+d \geq \frac{2}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd).$$

21. Neka su $a, b, c, d \geq 0$ realni brojevi takvi da je $3(a+b+c+d) + 4(abc+bcd+cda+dab) = 8$. Dokazati nejednakost

$$ab+bc+ac+ad+bd+cd \leq 2.$$

radmarko@yahoo.com
februar 2006.