Dodatna nastava iz matematike u MG-u

Uvod u nejednakosti

Predavač: Aleksandar Pejčev

Teorijski uvod

1. **Nejednakosti izmedju sredina**:
Neka su $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitivni realni brojevi i s bilo koji realan broj različit od nule. Uvedimo oznaku $A_s(a_1, a_2, ..., a_n) = (\frac{a_1^s + a_2^s + ... + a_n^s}{n})^{\frac{1}{s}}$. Tada važi implikacija:
$$s \leq t \Rightarrow A_s(a_1, ..., a_n) \leq A_t(a_1, ..., a_n),$$
pri čemu jednakost važi **akko** je $a_1 = a_2 = ... = a_n$. Izraz $A_s(a_1, ..., a_n)$ se za vrednosti $1, 2, -1$ broja s zove redom aritmetička, kvadratna, harmonijska sredina brojeva $a_1, a_2, ..., a_n$.
Uvedimo oznaku $H(a_1, ..., a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2, ... a_n}$. Dotični izraz se zove geometrijska sredina brojeva $a_1, ..., a_n$. Neka je s bilo koji realan broj različit od nule (opet). Ako je $s > 0$, onda je $A_s(a_1, ..., a_n) \geq H(a_1, ..., a_n)$, a ako je $s < 0$, onda je $A_s(a_1, ..., a_n) \leq H(a_1, ..., a_n)$, pri čemu jednakosti u oba slučaja važe **akko** je $a_1 = a_2 = ... = a_n$.
Najčešći oblici u kojima se javljaju i koriste navedene nejednakosti su:
$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2, ... a_n} \leq \frac{a_1 + ... + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + ... + a_n^2}{n}}.$$
Za poslednje nejednakosti se obično koriste skraćenice AH, AG, AK (arimtetička i harmonijska, aritmetička i geometrijska, aritmetička i kvadratna itd).

2. **Nejednakost Koši-Švarca**:
Neka su $a_1, ..., a_n$ i $b_1, ..., b_n$ dve n-torke realnih brojeva. Tada važi nejednakost
$$(a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + ... + a_n b_n)^2;$$
Posledica : Neka su $a_1, ..., a_n$, $b_1, ..., b_n$, $c_1, ..., c_n$ tri $n-$torke POZITIVNIH realnih brojeva. Tada važe nejednakosti
$$(\frac{a_1}{b_1} + ... + \frac{a_n}{b_n})(c_1 b_1 + ... + c_n b_n) \geq (\sqrt{a_1 c_1} + ... + \sqrt{a_n c_n})^2;$$
$$(\frac{a_1}{b_1} + ... + \frac{a_n}{b_n})(a_1 b_1 + ... + a_n b_n) \geq (a_1 + ... + a_n)^2.$$

Zadaci

1. Dokazati da je $\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$.
2. Dokazati da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c vazi nejednakost
$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$
3. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokazati nejednakosti:
   (a) $2(a^4 + b^4 + c^4) \geq a^3 b + b^3 c + c^3 a + ab^3 + bc^3 + ca^3$;
   (b) $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$.
4. Dokazati da za pozitivne brojeve x, y, z, t važi nejednakost
$$\frac{(x + y + z + t)^{10}}{xy^2 z^3 t^4} > \frac{10^6}{3}.$$

5. Neka je $x > y \geq 0$. Dokazati da je $x + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} \geq 3$.

6. Neka su a, b, c realni brojevi takvi da je $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Dokazati nejednakost

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} \geq 3 + \frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc}$$

7. Ako je $a \geq 1$ i $b \geq 1$, dokazati nejednakost

$$3(\frac{a^2 - b^2}{8})^2 + \frac{ab}{a+b} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{8}}.$$

8. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi, takvi da je $a > c$ i $b > c$. Dokazati da je

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}.$$

9. Neka je k dati prirodan broj. Rešiti sistem

$$x_1 + x_2 + ... + x_k = 9$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_k} = 1$$

u skupu pozitivnih realnih brojeva.

10. Ako su a, b, c dužine stranica nekog trougla, dokazati da je

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 2(ab + bc + ca).$$

11. Neka su a, b, c bilo koji realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokazati da su najviše dva od brojeva $2a - \frac{1}{b}, 2b - \frac{1}{c}, 2c - \frac{1}{a}$ veći od 1.

12. Neka su $x, y, z \geq 0$ i $x + y + z = 3$. Dokazati nejednakost

$$\sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} \geq xy + yz + zx.$$

13. Dokazati da za pozitivne realne brojeve a, b, c, d, e, f važi nejednakost

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d} + \frac{ef}{e+f} \leq \frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}$$

14. Neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$. Dokazati nejednakost

$$\frac{a^{x_1 - x_2}}{x_1 + x_2} + \frac{a^{x_2 - x_3}}{x_2 + x_3} + ... + \frac{a^{x_n - x_1}}{x_n + x_1} \geq \frac{n^2}{2}.$$

15. Neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ pozitivni realni brojevi, pri čemu je $n \geq 4$. Dokazati nejednakost

$$\frac{x_1}{x_n + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + ... + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_1} \geq 2.$$

16. Dokazati da za pozitivne brojeve a, b, c važi $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

17. Ako je M bilo koja tačka u ravni jednakostraničnog trougla ABC dokazati da je $MA \leq MB + MC$.

18. Naći u trouglu ABC tačku M za koju je zbir $MA + MB + MC$ najmanji moguć (**Toričelijeva tačka trougla** ABC).

19. Neka je $ABCDEF$ konveksan šestougao u kom je $AB = BC, CD = DE, EF = FA$. Dokazati da je

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}.$$

20. U trouglu ABC izabrana je proizvoljna tačka M i konstruisane su redom prave AM, BM, CM do preseka A_1, B_1, C_1 sa naspramnim stranicama. Dokazati da važi nejednakost

$$\frac{AM}{A_1M} \cdot \frac{BM}{B_1M} \cdot \frac{CM}{C_1M} \geq 8.$$

21. Dokazati nejednakosti

   (a) $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 1$;

   (b) $1 \cdot 1! + 3 \cdot 2! + ... + n \cdot n! < (n+1)!$.

22. Neka su $p_1, p_2, ..., p_n$, gde je $n \geq 3$ prvih n prostih brojeva. Dokazati da je

$$\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + ... + \frac{1}{p_n^2} + \frac{1}{p_1 p_2 ... p_n} < \frac{1}{2}.$$

23. Neka je

$$S = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+2}} + 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3}} + ... + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + ... + \frac{1}{1+2+...+2000}}.$$

Dokazati da je $S > 1003$.

24. Neka su a_1, a_2, a_3 pozitivni realni brojevi koji zadovoljavaju uslov $a_1 + a_2 + a_3 = 1$. Dokazati da važi

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2^2}{a_2 + a_3} + \frac{a_3^2}{a_3 + a_1} \geq \frac{1}{2}.$$

25. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Pokazati nejednakosti:

   (a) $\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$;

   (b) $\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$;