

20. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

први круг – 02. 03. 2016.

ПРВИ РАЗРЕД

- Нађите све природне бројеве x и n такве да $x^n + 2^n + 1$ дели $x^{n+1} + 2^{n+1} + 1$.
- Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао. Парови правих AB и EF , EF и CD , CD и AB секу се редом у тачкама P , Q и R . Парови правих BC и DE , DE и FA , FA и BC секу се редом у тачакма S , T и U . Ако је

$$\frac{AB}{PR} = \frac{CD}{RQ} = \frac{EF}{QP},$$

доказати да је

$$\frac{BC}{US} = \frac{DE}{ST} = \frac{FA}{TU}.$$

- Нека је P полином са целобројним коефицијентима.
 - Ако за цео број a важи $P^{2015}(a) = a$, доказати да је онда $P(a) = a$.
 - Ако за цео број a важи $P^{2016}(a) = a$, доказати да је онда $P(a) = a$ или за неко $b \neq a$ важи $P(a) = b$ и $P(b) = a$.
- Ученик у току године решава задатке из математике. Он сваког дана реши бар један задатак, али да се не би преморио, у току једне седмице реши највише 12 задатака. Доказати да постоји неколико узастопних дана у години у току којих ће ученик укупно решити тачно 20 задатака.

Време за рад 240 минута.

Задатке детаљно образложити.

Сваки задатак писати на засебном папиру.

Желимо вам пуно успеха.

20. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

први круг – 02. 03. 2016.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Дати су комплексни бројеви a, b, c . Ако је $a + b + c = 0$ и $|a| = |b| = |c|$, доказати да је $a^3 = b^3 = c^3$. Важи ли аналогно тврђење за четири комплексна броја?
2. Нека је a цео број већи од 1. Доказати да скуп позитивних целих бројева

$$\{a^2 + a - 1, a^3 + a^2 - 1, \dots, a^{n+1} + a^n - 1, \dots\}$$

садржи бесконачан скуп по паровима узајамно простих бројева.

3. Нека су H, S и T редом ортоцентар, центар уписаног круга и ортоцен-тар неједнакокраког троугла. Доказати да је угао HST туп.
4. На правој је дато $2015^2 + 2015 + 1$ дужи . Доказати да међу њима постоји 2016 дужи које имају заједничку тачку или 2017 дужи од којих су сваке две међусобно дисјунктне.

Време за рад 240 минута.

Задатке детаљно образложити.

Сваки задатак писати на засебном папиру.

Желимо вам пуно успеха.

20. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ
МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ
први круг – 02. 03. 2016.

ТРЕЋИ И ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Да ли је могуће на јединичној кружници изабрати
1) 2016; 2) бесконачно много
тачака таквих да је растојање између сваке две међу њима рационалан
број?
2. Низ a_n је дат релацијом $a_{n+2}a_n = a_{n+1}^2 + 8$, $n \in \mathbb{N}$ уз почетне услове $a_1 = 4$ и $a_2 = 6$. Доказати да је број $9a_n^2 - 128$ квадрат рационалног броја за свако $n \in \mathbb{N}$.
3. Круг k_a додирује ивице AB и AC , као и круг описан око датог троугла ABC изнутра у тачки A_1 . Аналогно дефинишемо тачке B_1 и C_1 . Доказати да се праве AA_1 , BB_1 и CC_1 секу у једној тачки.
4. Нека је $n \geq 3$ природан број и $X \subset \{1, 2, \dots, n^3\}$ скуп од $3n^2$ елемената. Доказати да увек можемо одабрати 9 међусобно различитих елемената $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ скупа X таквих да систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{aligned}$$

има решење чије су све три компоненте различите од 0.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.