

## 19. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

први круг – 20. 02. 2015.

### ПРВИ РАЗРЕД

- Наћи све природне бројеве  $n$  такве да кад год  $n$  дели  $a^2b + 1$  за неке природне бројеве  $a$  и  $b$ , онда  $n$  дели и  $a^2 + b$ .
- Круг који садржи теме  $A$  и средиште  $M$  странице  $BC$  троугла  $ABC$  сече странице  $AB$  и  $AC$  по други пут у тачкама  $P$  и  $Q$ . Ако је угао код темена  $A$  једнак  $60^\circ$ , доказати да је обим троугла  $APQ$  мањи од  $AB + AC + \frac{1}{2}BC$ .
- Нека је  $n > 1$  природан број и  $a_1, \dots, a_n$  цели бројеви који су већи од  $-2$  и нису сви једнаки  $0$ . Ако важи  $a_1 + 2a_2 + 2^2a_3 + \dots + 2^{n-1}a_n = 0$ , доказати да је  $a_1 + a_2 + \dots + a_n > 0$ .
- На папиру су записани сви природни бројеви од  $1$  до  $4k$ , где је  $k$  природан број. У сваком кораку се бирају четири различита броја облика  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $a+b+c$  (ако такви постоје) и замењују се са три броја  $a+b$ ,  $b+c$  и  $c+a$ . Доказати да је број корака које можемо извршити мањи од  $k$ .

Време за рад 240 минута.

Задатке детаљно образложити.

Сваки задатак писати на засебном папиру.

Желимо вам пуно успеха.

## 19. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

први круг – 20. 02. 2015.

### ДРУГИ РАЗРЕД

1. Показати да свако реално решење једначине

$$x^3 + px + q = 0$$

задовољава  $4qx \leq p^2$ .

2. У оштроуглом троуглу  $ABC$  тачке  $D, E$  и  $F$  су средишта страница  $BC, CA$  и  $AB$  редом, а  $R$  је подножје висине из темена  $C$ . Кругови описани око троуглова  $AER$  и  $BDR$  секу се у тачки  $K \neq R$ . Доказати да је  $\angle ACK = \angle BCF$ .
3. Доказати да постоји природан број који је дељив са 2015 и чији је збир цифара једнак 2015.
4. а) Имамо на располагању 300 јабука, од којих се сваке две по тежини разликују не више од 2 пута. Доказати да се оне могу поделити у пакете од по 2 јабуке тако да се свака два пакета разликују по тежини не више од 1.5 пута.  
б) Имамо на располагању 300 јабука, од којих се сваке две по тежини разликују не више од 3 пута. Доказати да се оне могу поделити у пакете од по 4 јабуке тако да се свака два пакета разликују по тежини не више од 1.5 пута.

Време за рад 240 минута.

Задатке детаљно образложити.

Сваки задатак писати на засебном папиру.

Желимо вам пуно успеха.

19. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ  
МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ  
први круг – 20. 02. 2015.

ТРЕЋИ И ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

- У оштроуглом троуглу  $ABC$  тачке  $D, E$  и  $F$  су средишта страница  $BC, CA$  и  $AB$  редом, а  $R$  је подножје висине из темена  $C$ . Кругови описани око троуглова  $AER$  и  $BDR$  секу се у тачки  $K \neq R$ . Доказати да је  $\angle ACK = \angle BCF$ .
- Наћи све природне бројеве  $a$  и  $b$  такве да  $a$  дели  $b^2 + b + 1$  и  $b$  дели  $a^2 + a + 1$ .
- Показати да ако су  $a, b, c$  комплексни бројеви такви да је

$$\begin{aligned}(a+b)(a+c) &= b, \\ (b+c)(b+a) &= c, \\ (c+a)(c+b) &= a,\end{aligned}$$

онда су ти бројеви реални.

- а) Имамо на располагању 300 јабука, од којих се сваке две по тежини разликују не више од 2 пута. Доказати да се оне могу поделити у пакете од по 2 јабуке тако да се свака два пакета разликују по тежини не више од 1.5 пута.  
б) Имамо на располагању 300 јабука, од којих се сваке две по тежини разликују не више од 3 пута. Доказати да се оне могу поделити у пакете од по 4 јабуке тако да се свака два пакета разликују по тежини не више од 1.5 пута.

Време за рад 240 минута.

Задатке детаљно образложити.

Сваки задатак писати на засебном папиру.

Желимо вам пуно успеха.

## РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

### ПРВИ РАЗРЕД

1. Очито  $n = 1$  задовољава услове задатка. Претпоставимо да  $n \geq 2$  има тражено својство и нека је  $a$  природан број узајамно прост са  $n$ . Тада постоји природан број  $b$  такав да је  $ba^2 \equiv -1 \pmod{n}$ . Како  $n$  дели  $a^2 + b$ , то  $n$  дели и  $a^2(a^2 + b) - (a^2b + 1) = a^4 - 1$ .  
Нека је  $n = 2^\alpha k$ , где је  $k$  непарно и  $\alpha \in \mathbb{N}_0$ . Претпоставимо да је  $k \geq 3$ . Тада је  $(n, k - 2) = 1$ , те  $2^\alpha k \mid (k - 2)^4 - 1$ , односно  $k \mid 15$ . Значи  $n$  је облика  $2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ , где је  $\alpha \geq 0$ ,  $0 \leq \beta, \gamma \leq 1$ . Дакле  $n \mid 11^4 - 1$ , на основу чега закључујемо да је  $\alpha \leq 4$ . Ако је  $n = 2^\alpha$ , тада  $2^\alpha \mid 3^4 - 1$  и видимо да је опет  $\alpha \leq 4$ . Дакле,  $n$  мора бити делилац броја 240.  
Обрнуто, нека је  $n$  делилац броја 240. Докажимо да  $n$  задовољава услове задатка. Заиста, ако  $3 \mid a^2b + 1$ , онда  $3 \nmid a$  па  $3 \mid a^4 - 1$ , одакле следи да  $3 \mid a^2 + b$ . Аналогно доказујемо и за 5. Докажимо сада за 2, 4, 8, 16. Ако  $2^k \mid a^2 + b$  за  $1 \leq k \leq 3$ , онда је  $a$  непаран природан број и  $8 \mid a^2 - 1$ . Дакле  $2^k \mid b + 1$ , тј.  $2^k \mid a^2 + b$ . Ако  $16 \mid a^2b + 1$ ,  $a$  је непарно па је  $a^2$  по модулу 16 конгруентно са 1 или 9. Ово повлачи да  $b$  по модулу 16 мора бити конгруентно са 15 или 7 респективно и опет  $16 \mid a^2 + b$ .
2. Како је четвороугао  $APMQ$  тетиван, имамо да је  $\angle PMQ = 120^\circ$  и  $\angle BMP + \angle CMQ = 60^\circ$ . Означимо са  $B'$  и  $C'$  тачке симетричне са  $B$  и  $C$  редом у односу на  $PM$  и  $QM$ . Из подударности троуглова  $BMP$  и  $B'MP$ , односно  $CMQ$  и  $C'MQ$  добијамо да је  $B'M = BM = CM = C'M$  и  $\angle B'MC' = 60^\circ$ , па је троугао  $B'MC'$  једнакостраничен. Из неједнакости троугла лако следи да је  $PB' + B'C' + C'Q' \geq PQ$ , односно  $PB + BC/2 + QC \geq PQ$ , одакле одмах следи тразена неједнакост. Једнакост важи када тачке  $B'$  и  $C'$  леже на дужи  $PQ$ , што повлачи да је  $\angle PQC + \angle QPB = 2(\angle PQM + \angle QPM) = 120^\circ$ . Ово је у контрадикцији са условом да је  $\angle APQ + \angle AQP = 120^\circ$ , па заправо увек важи строга неједнакост.
3. Тврђење доказујемо математичком индукцијом. База  $n = 2$ :  $a_1 + 2a_2 = 0$ ,  $a_1, a_2 \geq -1$ , па је једина могућност  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = -1$  и  $2 - 1 > 0$ . Индуктивна хипотеза и корак: Нека тврђење важи за  $n$  и доказујемо за  $n+1$ : Ако је  $a_1 = 0$ , онда је  $a_2 + 2a_3 + \dots + 2^{n-1}a_{n+1} = 0$  и сви су бар -1, па по индуктивној хипотези важи  $a_2 + a_3 + \dots + a_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} > 0$ . У супротном, због тога што је  $a_1$  паран и  $a_1 > -2$ , онда је  $a_1 = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Услов постаје  $k + a_2 + 2a_3 + \dots + 2^{n-1}a_{n+1} = 0$  и још је  $k + a_2 \geq a_2 > -2$ , па можемо применити индуктивну хипотезу, одакле је  $k + a_2 + a_3 + \dots + a_{n+1} > 0$ . А тада је и  $2k + a_2 + \dots + a_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} > 0$ , што је и требало доказати.
4. Уочавамо две ствари које се не мењају применом ових трансформација:

$a + b + c + (a + b + c) = (a + b) + (b + c) + (c + a)$  - збир бројева на папиру и  $a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 = (a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2$  - збир квадрата бројева на папиру. Дакле, у сваком кораку је збир бројева на табли  $2k(4k + 1)$ , као и збир квадрата бројева на табли  $\frac{2k(4k + 1)(8k + 1)}{3}$ . Ако има  $n$  бројева на папиру,  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , по неједнакости између аритметичке и квадратне средине следи  $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$ , тј.  $n \geq \frac{6k(4k + 1)}{8k + 1} > 3k$ , јер  $2(4k + 1) > 8k + 1$ . Према томе, број бројева на папиру је већи од  $3k$ , а како се у сваком потезу тај број смањује за тачно 1, следи да није могуће извршити бар  $k$  потеза, што је и требало доказати.

## ДРУГИ РАЗРЕД

1. Први начин: Квадратна једначина

$$xt^2 + pt + q = 0$$

има реално решење по  $t$  (једино што је једначина таква да има решење које је једнако најстаријем коефицијенту,  $t = x$ ), те стога њена дискриминанта  $D = p^2 - 4xq$  мора бити ненегативна и тврђење задатка непосредно следи.

Други начин: Ако је  $x_0$  корен дате једначине, онда је  $x^3 + px + q \equiv (x - x_0)(x^2 + ax + b) \equiv x^3 + (a - x_0)x^2 + (b - ax_0) - bx_0$ . Дакле  $a = x_0$ ,  $p = b - ax_0 = b - x_0^2$ ,  $-q = bx_0$ . Следи  $p^2 = b^2 - 2bx_0^2 + x_0^4$ , а такође је и  $4x_0q = -4x_0^2b$ , па је  $p^2 - 4x_0q = b^2 + 2bx_0^2 + x_0^4 = (b + x_0^2)^2$ .

2. Нека је  $Q$  тачка таква да су троуглови  $CEQ$  и  $CFB$  директно слични. Из  $\angle ECQ = \angle FCB$  следи  $\angle QCD = \angle ACF$ , а такође је  $\frac{QC}{CD} = \frac{QC}{CE} \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{CF} \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{CF}$ , па су и троуглови  $QCD$  и  $ACF$  директно слични. Обртна хомотетија са центром у  $C$  која слика  $\triangle CEQ$  у  $\triangle CFB$  такође слика  $A$  у тачку  $C'$  симетричну тачки  $C$  у односу на  $F$ . Зато је  $\angle AQE = \angle C'BF = \angle A = \angle AKE$ , па тачка  $Q$  лежи на кругу  $AKE$ . Слично,  $Q$  је на кругу  $BKD$ , па је  $Q \equiv P$ .
3. Важи  $2015 = 5 \cdot 403$ , при чему је  $NZD(10, 403) = 1$ . На основу Ојлерове теореме постоји  $k \in \mathbb{N}$  (нпр.  $k = \varphi(403)$ ) тако да је  $10^k \equiv 1 \pmod{403}$ . Посматрајмо сада број

$$A = \sum_{i=1}^{2015} 10^{ik}.$$

Очито је његов збир цифара једнак 2015 (јасно је како  $A$  изгледа у свом декадном запису) и притом је  $A \equiv 2015 \equiv 0 \pmod{403}$ , као и  $A \equiv 0 \pmod{5}$ , дакле  $A \equiv 0 \pmod{2015}$ .

4. (а) Нека су  $x_1 < x_2 < \dots < x_{2n}$  тежине јабука; у нашем случају је  $n = 150$ . За  $i = 1, 2, \dots, n$ , у  $i$ -ти пакет стављамо јабуке тежина  $x_i$  и  $x_{2n-i}$ . Како је  $x_{2n-i} \leq 2x_i$ , за  $i < j$  важи  $\frac{2}{3}(x_i + x_{2n-i}) \leq 2x_i \leq x_j + x_{2n-j} \leq 2x_{2n-i} \leq \frac{4}{3}(x_i + x_{2n-i})$ , што значи да овакви пакети задовољавају услове.
- (б) Слично као у делу под (а), јабуке можемо да поделимо у 150 пакета од по две јабуке тако да се тежине свака два пакета разликују највише два пута. Сада на добијене пакете (уместо на јабуке) можемо да применимо резултат из (а).

## ТРЕЋИ И ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Видети решење 2. задатка за 2. разред.
2. Јасно да је услов задатка еквивалентан са тим да постоји  $K \in \mathbb{N}$  тако да важи

$$a^2 + b^2 + a + b + 1 = Kab.$$

Посматрамо квадратну једначину

$$t^2 - (Kb - 1)t + (b^2 + b + 1) = 0.$$

Један њен корен је  $t_1 = a$ . Други корен је, на основу Виетових формулa,

$$t_2 = (Kb - 1) - a = \frac{b^2 + b + 1}{a}.$$

На основу првог облика следи да је  $t_2 \in \mathbb{Z}$ , а на основу другог да је позитиван. Следи  $t_2 \in \mathbb{N}$ . Даље, ако је уређен пар  $(a, b)$  решење дате једначине (за конкретно  $K \in \mathbb{N}$ ), онда су и парови  $(\frac{b^2+b+1}{a}, b)$  и  $(a, \frac{a^2+a+1}{b})$  такође решења. Како за  $(a, b) \neq (1, 1)$  не може бити  $a = b$  и како за  $a > b$  важи  $\frac{b^2+b+1}{a} < a$ , због симетрије је јасно да на овај начин, од којег код уређеног пара  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$  да пођемо, после коначног броја корака можемо добити уређен пар  $(1, 1)$ . Даље  $K$  мора бити једнако 5. Лако видимо да је уређен пар  $(a, b)$  решење дате једначине ако су  $a$  и  $b$  узастопни чланови низа  $\{x_n\}$  дефинисаног са

$$x_0 = x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 5x_n - x_{n-1} - 1,$$

чије је опште решење

$$x_n = \frac{1}{3} + \frac{7 - \sqrt{21}}{21} \left( \frac{5 + \sqrt{21}}{2} \right)^n + \frac{7 + \sqrt{21}}{21} \left( \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \right)^n.$$

3. Нека је  $P(x) = x^3 - sx^2 + qx - p$  полином чији су корени  $a, b, c$ . Имамо да је  $s = a + b + c$ ,  $p = ab + bc + ca$ ,  $r = abc$ . Дате неједнакости су еквивалентне са

$$sa + bc = b$$

$$sb + ca = c$$

$$sc + ab = a$$

Кад их саберемо, добијамо да је  $q = s - s^2$ . Множећи претходне три једнакости са  $a, b, c$  редом, а потом их сабирајући добијамо

$$s(a^2 + b^2 + c^2) + 3p = q$$

или после једноставног рачуна

$$3p = -3s^3 + s^2 + s \quad (1)$$

Ако сад написемо дати систем у облику

$$(s - c)(s - b) = b$$

$$(s - a)(s - c) = c$$

$$(s - b)(s - a) = a,$$

множењем добијамо

$$((s - a)(s - b)(s - c))^2 = abc,$$

што је ако изразимо  $p$  и  $q$  преко  $s$  еквивалентно (кад се растави) са

$$s(4s - 3)(s + 1)^2 = 0$$

Ако је  $s = 0$ , онда је  $P(x) = x^3$  па је  $a = b = c = 0$ . Ако је  $s = -1$ , онда је  $P(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$ . Пошто овај полином мења знак на интервалима  $(-2, -1), (-1, 0), (1, 2)$ - има три реална корена, па су  $a, b, c$  реални бројеви. Ако је  $s = \frac{3}{4}$ , онда је  $P(x) = x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{16}x + \frac{1}{64} = (x - \frac{1}{4})^3$ , па је  $a = b = c = \frac{1}{4}$ .

4. Видети решење 4. задатка за 2. разред.

18. ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ У ОКВИРУ ПРИПРЕМА  
ЗА БМО 2015.  
МАТЕМАТИЧКА ГИМНАЗИЈА  
први круг – 28. 04. 2015.

1. Дати су реални бројеви  $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{2n} < x_{2n+1} = 1$ . Показати неједнакост

$$\frac{1-h}{2} < \sum_{i=1}^n x_{2i}(x_{2i+1} - x_{2i-1}) < \frac{1+h}{2}.$$

2. Доказати да се сваки конвексан многоугао може покрити кругом чији је полупречник једнак четвртини обима тог многоугла.
3. Наћи све полиноме са реалним коефицијентима за које је

$$P(x) P(2x^2 - 1) = P(x^2) P(2x - 1).$$

4. Коначан скуп позитивних целих бројева назива се добрым ако сваки од бројева дели збир осталих. Доказати да је сваки коначан скуп природних бројева подскуп неког доброг скупа.

Време за рад 240 минута.

Задатке детаљно образложити.

Сваки задатак писати на засебном папиру.

Желимо вам пуно успеха.