Школско такмичење из математике

27. децембар 2013. године
Гимназија "Светозар Марковић", Ниш

Први дан

1. Дат је правилан $nk-$ тоугао. Одабрано је $n+k$ његових темена, при чему је n обојено плавом, а k црвеном бојом. Доказати да постоје дужи које су међусобно једнаке, где су крајеви једне обојени плавом, а друге црвеном бојом.

2. Кружница k додирује краке AB и AC једнакокраког троугла ABC и сече основицу BC у тачкама K и L. Нека је $M \neq K$ друга пресечна тачка кружнице k и праве AK, а тачке P и Q, редом, тачке које су симетричне са K у односу на B и C. Доказати да описани круг око троугла PQM додирује k.

3. Нека је $p > 2$ прост број. Доказати да међу бројевима n из скупа $\{1, 2, ..., p-1\}$ има бар њих $\frac{p-1}{2}$ за које број $\sum_{k=0}^{p-1} k!n^k$ није дељив са p.

Време за рад 270 минута
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 поена.

Школско такмичење из математике

28. децембар 2013. године
Гимназија "Светозар Марковић", Ниш

Други дан

4. Нека су M, B_1 и C_1, редом, тачке на страницама BC, AB и AC троугла ABC такве да је $MB_1 = MB$ и $MC_1 = MC$. Ако је I центар уписаног круга троугла MB_1C_1, а H ортоцентар троугла ABC, доказати да тачке B_1, C_1, I и H припадају једној кружници.

5. При дељењу полинома x^{2013} полиномом

$$x^3 - 12^{-12}x^2 + 28^{-28}x - 2013^{-2013}$$

добија се количник $K(x)$ и остатак $R(x)$. Колико позитивних коефицијената има полином $K(x)$?

6. За пермутацију π, скупа $\{1, 2, ..., n\}$ кажемо да је $k-$лимитирана акко за свако $i = \overline{1, n}$ важи $|\pi(i) - i| \leq k$. Одредити све природне бројеве n за које је број $2013-$лимитираних пермутација непаран.

Време за рад 270 минута
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 7 поена.

Школско такмичење из математике

28. децембар 2013. године
Гимназија "Светозар Марковић", Ниш

Први разред

1. Доказати да вредност израза

$$\frac{1}{1+2013^{a-b}+2013^{a-c}}+\frac{1}{1+2013^{b-c}+2013^{b-a}}+\frac{1}{1+2013^{c-a}+2013^{c-b}}$$

не зависи од реалних бројева a, b и c.

2. Нека је I центар уписаног круга троугла ABC и нека је D пресечна тачка праве AI са кругом описаним око троугла ABC (различита од A). Доказати да је D центар описаног круга троугла BCI.

3. Скуп S, који чине неке цифре, зовемо блентав акко је за сваки природан број n, бар једна од цифара бројева n или $3n$ из скупа S. Колико најмање елемената може имати блентав скуп?

4. У сваком пољу таблице 10×10 уписан је знак $+$ или $-$. У једном потезу дозвољено је истовремено променити знаке у свим пољима која припадају једној колони или свим пољима која припадају једној врсти ($+$ прелази у $-$ а $-$ прелази у $+$). Познато је да је распоред знакова такав да се после неколико потеза може добити таблица у којој су сви знаци једнаки. Доказати да се ово може постићи у највише 10 потеза.

5. Нека је ABC оштроугли троугао код кога је $\angle A = 60^\circ$. Нека је H ортоцентар а O центар описане кружнице овог троугла. Нека је даље M тачка пресека симетрале дужи BH и праве AB, а N тачка пресека симетрале дужи CH и праве AC. Доказати да су тачке M, N, H и O колинеарне.

Време за рад 240 минута
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 20 поена.

Школско такмичење из математике

28. децембар 2013. године
Гимназија "Светозар Марковић", Ниш

Други разред

1. Нека су a, b и c реални бројеви за које важи $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Одреди највећу и најмању могућу вредност израза $ab + bc + ca$.

2. Доказати да је за сваки природан број n могуће пронаћи природан број x који је дељив са n, такав да се из декадног записа броја x може избацити једна цифра различита од нуле, а да новодобијени број буде дељив са n.

3. Четвороугао $ABCD$ уписан је у круг са центром O, при чему O није на дијагоналама тог четвороугла. Познато је да центар описане кружнице око троугла AOC лежи на правој BD. Доказати да центар описане кружнице око троугла BOD лежи на правој AC.

4. Мађионичар има шпил од 52 карте, који је промешао. Његов асистент зна распоред карата и жели у што мање питања да омогући гледаоцима да и они погоде распоред карата у шпилу (било одозго на доле или обрнуто). У сваком питању асистент именује две карте, а мађионичар саопштава (гледаоцима) колико карата у шпилу је између те две карте.

а) Доказати да је 33 питања недовољно да би гледаоци са сигурношћу погодили распоред карата.

б) Доказати да је 34 питања довољно да би гледаоци са сигурношћу погодили распоред карата.

Време за рад 240 минута
Решења задатака детаљно образложити.
Сваки задатак вреди 25 поена.