18. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

први круг – 25. 12. 2013.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Дат је квадрат $ABCD$. Тачке E и F се налазе на страницама DA и DC респективно и притом важи $DE = DF$. Ако је G подножје нормале из D на EC, доказати да је $\angle BGF = 90^o$.

2. Доказати да се конвексни 21-тоугао не може разложити на 14 четвороуглова чија су темена - или темена 21-тоугла или леже унутар њега, али тако да ниједно теме ниједног четвороугла није унутрашња тачка неког другог четвороугла?

3. Колико има природних бројева који у свом декадном запису садрже 2013 цифара и то - бар једну цифру 1, бар две цифре 2,..., бар осам цифри 8 и бар девет цифри 9, при чему те цифре посматрано слева на десно чине монотоно растући низ?

4. На научној конференцији учествовало је 17 научника из разних земаља. Они су се споразумевали на енглеском, немачком и француском језику. Свака два учесника споразумевала су се међу собом на тачно једном одређеном језику. Доказати да се међу учесницима конференције могу наћи троје научника који су се међусобно споразумевали на једном истом језику.

5. Ако су природни бројеви a и b такви да је број $\dfrac{a^2+b^2+a}{ab}$ природан, онда је a потпун квадрат. Доказати.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.

18. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

први круг – 25. 12. 2013.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Колико има природних бројева који у свом декадном запису садрже највише 2013 цифара и то - бар једну цифру 1, бар две цифре 2,..., бар осам цифри 8 и бар девет цифри 9, при чему те цифре посматрано слева на десно чине монотоно растући низ?

2. Квадратни трином $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ је такав да једначина $f(x) = x$ нема реалних решења. Доказати да тада ни једначина $f(f(...(x)...)) = x$ нема решења, где је функција f на аргумент x примењена 2013 пута.

3. Ако су природни бројеви a и b такви да је број $m = \dfrac{a^2 + b^2 + a}{ab}$ природан, доказати да онда број a мора бити потпун квадрат. Одредити све природне бројеве m који се могу приказати у наведеном облику за неке природне бројеве a и b.

4. Унутар троугла ABC дате су тачке M и N такве да је $\angle MAB = \angle NAC$ и $\angle MBC = \angle NBA$.

а) Доказати да је $\angle MCA = \angle NCB$.

б) Ако из тачака M и N спустимо нормале на странице троугла ABC, доказати да добијених 6 подножја нормала припадају једној кружници.

5. За дато $x \in \mathbb{N}$ означимо са $S(x)$ збир цифара броја x. Да ли постоји природан број n такав да је $S(n) = 2013$ и $S(n^3) = 2013^3$?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.

ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА СМО

Авала, март 2014.

1. Наћи све реалне полиноме $P(x)$ за које важи

$$P(x) \cdot \left(P(x^2) - x^2\right) = P(x^3)$$

за свако реално x.

2. Дат је троугао ABC и тачке M и N на страници AB. Доказати да је полупречник уписаног круга троугла ACM подударан полупречнику уписаног круга троугла BCN ако и само ако је полупречник уписаног круга троугла ACN подударан полупречнику уписаног круга троугла BCM.

3. Нека је n непаран природан број већи од 1 и $X_0 = (x_1^0, ..., x_n^0) = (0, 0, ..., 0, 1, 1)$. Претпоставимо да је $x_i^k = 0$ ако је $x_i^{k-1} = x_{i+1}^{k-1}$ и $x_i^k = 1$ у супротном (индексирање је по модулу n). Означимо са $X_k = (x_1^k, ..., x_n^k)$ за $k = 1, 2, ...$ Ако $m \in \mathbb{N}$ задовољава $X_m = X_n$, доказати да онда n дели m.

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.