17. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

први круг – 27. 12. 2012.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Дато је 2013 бројева који имају следећу особину: ако сваки од тих бројева заменимо збиром преосталих, добијамо тих истих 2013 бројева. Доказати да је производ свих датих бројева једнак 0.

2. Нека је H ортоцентар, а S центар описаног круга троугла ABC. Нека је, даље, D таква тачка да је S средиште дужи HD и нека су T_1, T_2 и T_3, редом, тежишта троуглова BCD, CAD и ABD. Доказати да је

$$AT_1 = BT_2 = CT_3.$$

3. Ако су дијагонале тангентног четвороугла узајамно нормалне, доказати да је тај четвороугао делтоид.

4. Нека је n природан број. Доказати да једначина

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3n$$

нема решења у скупу позитивних рационалних бројева.

5. Колико има 2012-цифрених природних бројева чији је збир цифара паран?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.

17. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

први круг – 27. 12. 2012.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Нека је $n \geq 2$ дати природан број. Колико решења има систем једначина

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_n^2 &= 4x_n \\
x_2 + x_1^2 &= 4x_1 \\
&\vdots \\
x_n + x_{n-1}^2 &= 4x_{n-1}
\end{aligned}
$$

у скупу реалних бројева?

2. Нека је H ортоцентар троугла ABC, а P тачка круга описаног око тог троугла различита од A, B, C. Нека је E подножје висине BH троугла ABC, нека су $PAQB$ и $PARC$ паралелограми и нека AQ сече HR у X. Доказати да је EX паралелно са AP.

3. Нека је ABC правоугли троугао са правим углом код темена C, CD висина тог троугла и K тачка ван равни троугла, таква да је $AK = AC$. Доказати да је пречник круга описаног око троугла ABK, који садржи тачку A, нормалан на праву DK.

4. Нека је p прост број, а a и n природни бројеви. Ако је

$$2^p + 3^p = a^n,$$

доказати да је $n = 1$.

5. Познато је да између било која 4 учесника неког такмичења бар један познаје осталу тројицу. Доказати да бар један учесник такмичења познаје све остале.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.

17. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

први круг – 27. 12. 2012.

3. И 4. РАЗРЕД

1. Одредити све функције $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такве да је $f(1) = 1$ и

$$f(m+n)(f(m) - f(n)) = f(m-n)(f(m) + f(n))$$

за све $m, n \in \mathbb{Z}$.

2. Нека бисектрисе унутрашњих углова код темена A, B, C троугла ABC секу наспрамне странице у тачкама A_1, B_1, C_1 редом. Ако је четвороугао $BA_1B_1C_1$ тетиван, доказати да је

$$\frac{BC}{AC + AB} = \frac{AC}{AB + BC} - \frac{AB}{BC + AC}.$$

3. За дати природан број r, означимо са N_r најмањи природан број такав да су сви бројеви $\frac{N_r}{n+r}\binom{2n}{n}$ цели. Доказати да је $N_r = \frac{r}{2}\binom{2r}{r}$.

4. У држави са шест градова, неке парове градова је потребно спојити двосмерним аутопутевима. На колико начина се то може учинити тако да се тим аутопутевима из сваког града може стићи у сваки други?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.