Школско такмичење из математике

Други, трећи и четврти разред
(скице решења)

1. Сви чланови низа су позитивни, па је $a_{2k} > 1$ и $a_{2k+1} < 1$. Пошто је $a_{2k+1} = \frac{1}{a_{2k}}$, довољно је доказати тврђење за рационалне бројеве веће од 1. Нека је n паран број, а његово растављање по степенима броја 2 :

$$n = 2^{\alpha_0} + 2^{\alpha_0+\alpha_1} + 2^{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2} + ... + 2^{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k},\ \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{N}.$$

Користећи дефиницију низа, није тешко доказати да је

$$a_n = \alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 + \cfrac{1}{\ddots \alpha_{k-1} + \cfrac{1}{\alpha_k}}}}}. \tag{1}$$

Сваки рационалан број, $\frac{a}{b}$, већи од 1 може се записати у облику

$$\frac{a}{b} = \beta_0 + \cfrac{1}{\beta_1 + \cfrac{1}{\beta_2 + \cfrac{1}{\beta_3 + \cfrac{1}{\ddots \beta_{l-1} + \cfrac{1}{\beta_l}}}}},$$

за неке $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_l \in \mathbb{N}$. Ову тврдњу лако доказујемо индукцијом по b. Одавде, на основу (1), за сваки рационалан број $\frac{a}{b} > 1$, постоји погодан број m такав да је $a_m = \frac{a}{b}$.

Докажимо још да је $a_i \neq a_j$, за $i < j$. Претпоставимо супротно и нека је $i > 1$ најмањи индекс за који постоји $j > i$ тако да је $a_i = a_j$. Индекси i и j морају бити исте парности. Из $a_i = a_j$ добијамо $a_{i-1} = a_{j-1}$ или $a_{i/2} = a_{j/2}$, што је у супротности са избором индекса i.

2. Ако имамо $m-$точлани низ, онда је број посматраних збирова $\binom{m}{2} + m$. Зато мора да важи $\binom{m}{2} + m \geq 2013$, па је $m \geq 63$, односно $f(2013) \geq 63$.

Направимо сада пример низа дужине 88 који има наведену особину. Потражимо низ у облику

$$\underbrace{1, 1, ..., 1}_{k-1}, \underbrace{k, k, ..., k}_{a}.$$

Сабирањем узастопних елемената оваквог низа можемо добити све природне бројеве од 1 до $k-1+ka$. Сада је довољно да важи $k-1+a = 88$ и $k-1+ka \geq 2013$. Последњи систем има решења, а једно од њих је $k = 47, a = 42$. Зато низ $\underbrace{1, 1, ..., 1}_{46}, \underbrace{47, 47, ..., 47}_{42}$ сведочи да је $f(2013) \leq 88$.

3. Нека је k_2 јединична центрирана кружица у комплексној равни. У зависности од a, b и d одредимо све остале тачке. Како је c на тетиви bd, то је $\overline{c} = \frac{b+d-c}{bd}$. Пошто c лежи и на кружници k_1, чији је центар тачка $a+b$, имамо и $|a+b-c| = 1$. Решавањем овог система добијамо $c = a+b-\frac{bd}{a}$(добија се квадратна једначина за коју знамо да је једно њено решење b - лежи на bd и k_2, као и тачка c, па искористимо Вијетове везе). Троуглови cbp и dac су слични и исте су оријентације, па је $\frac{c-b}{p-b} = \frac{d-a}{c-a}$. Сређивањем последње једнакости лако налазимо $p = \frac{b^2 d}{a^2}$. Нека је s средиште дужи

cd. Из колинеарности a, s и l имамо $\frac{s-a}{\overline{s}-\overline{a}} = \frac{l-a}{\overline{l}-\overline{a}}$, односно $bd = -al$, те је $l = -\frac{bd}{a}$. Тачку e тражимо из услова припадности правој sa (па важи $\frac{e-a}{\overline{e}-\overline{a}} = \frac{s-a}{\overline{s}-\overline{a}} = bd$) и припадности кружници k_2 (па је $|a+b-e| = 1$). Решавајући овај систем добијамо квадратну једначину чије је једно решење a (пошто a, као и e, лежи на k_2 и на правој as). Вијетовим формулама лако налазимо $e = a+b+d$ (ово нам показује да тачка e ортоцентар троугла abd, што за ово решење неће бити важно). Тачку f налазимо из услова $f+d = p+e$, те је $f = a+b+\frac{b^2d}{a^2}$.

Сада прелазимо на доказ егзистенције тачке X. Конструишимо тачку X тако да су позитивно оријентисани углови LFX и XDC једнаки $30°$ (користећи само задате углове, за тачку X потенцијално имамо 4 могућности; након прецизно нацртане слике уочавамо да је X баш она тачка коју смо дефинисали у претходном делу ове реченице). Нека је $\varepsilon = e^{i\frac{\pi}{6}}$, при чему важи $\varepsilon^4 - \varepsilon^2 + 1 = 0$. Тада је $\frac{z-f}{(e-f)\varepsilon} = \frac{\overline{z}-\overline{f}}{(\overline{e}-\overline{f})\overline{\varepsilon}}$, што након краћег рачуна даје

$$x - f = -\varepsilon^2 \frac{b^2d^2}{a^2}(\overline{x} - \overline{f}). \tag{$\clubsuit$}$$

Слично је $\frac{b-d}{(x-d)\varepsilon} = \frac{\overline{b}-\overline{d}}{(\overline{x}-\overline{d})\overline{\varepsilon}}$, па је

$$x - d = -\frac{1}{\varepsilon^2} bd(\overline{x} - \overline{d}). \tag{$\heartsuit$}$$

Множењем једнакости ($\heartsuit$) са $-\varepsilon^4 \frac{bd}{a^2}$ и додавањем једнакости ($\clubsuit$) добијамо

$$x(1 - \varepsilon^4 \frac{bd}{a^2}) = \varepsilon^2 \frac{b^2d^2}{a^2}\overline{f} + f - (d + \frac{1}{\varepsilon^2}\overline{d})\varepsilon^4 \frac{bd}{a^2}.$$

Пажљивом трасформацијом десне стране последње једнакости, са мотивацијом издвајања фактора $\varepsilon^4 bd - a^2$ који учествује и на левој страни, уз употребу $\varepsilon^4 - \varepsilon^2 + 1 = 0$, напокон добијамо $x = a+b+\varepsilon^2 d + \frac{\varepsilon^4 bd}{a}$. Отуда је $x - c = d\varepsilon^2 + \frac{bd\varepsilon^4}{a} + \frac{bd}{a} = d\varepsilon^2 + \frac{bd}{a}(1+\varepsilon^4) = d\varepsilon^2 + \frac{bd}{a}\varepsilon^2$. Зато је $|x-c| = |a+b|$, чиме смо доказали да је $CX = O_1O_2$.

4. Како је $2027 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0$, то $2027 \mid P(2b, b)$, где је $P(a,b)$ задати полином. Бројеви 2027 и 1013 су прости. Претпоставимо супротно тврдјењу задатка. Нека је $b \in B$. Тада елемент $2b$ (односно онај из скупа $\{1, 2, ..., 2026\}$ који је са њим конгруентан по модулу 2027 - ово надаље нећемо наглашавати), због $2027 \mid P(2b, b)$, припада скупу B. Настављајући овај поступак добијамо да су $b, 2^1b, 2^2b, ..., 2^{2025}b \in B$. Докажимо да су наведени бројеви различити (по модулу 2027). За то је довољно доказати да је $r_{2027}(2) = 2006$. Како је $(\frac{2}{2027}) = -1$ (2 је квадратни остатак по простим модулима који су облика $8k \pm 1$), то је $2^{1013} \equiv_{2027} -1$, односно $r_{2027}(2) \neq 1013$. Очито није ни $r_{2027}(2) \in \{1, 2\}$, па је $r_{2027}(2) = 2026$ (пошто $r_{2027}(2) \in \{1, 2, 1013, 2026\}$). Дакле, различити бројеви $b, 2^1b, 2^2b, ..., 2^{2025}b$ припадају скупу B, па је A празан скуп. Контрадикција.