Школско такмичење из математике

Први разред

23. децембар 2012. године
Гимназија "Светозар Марковић", Ниш

1. Нека је $ABCD$ једнакокраки трапез, код кога је $AB||CD$. Обележимо са M средину странице BC, а са E подножје висине трапеза из темена C на основицу AB. У ком односу дуж DE дели дуж AM?

2. Дара је замислила позитиван реалан број x, а затим је бројеве

$$x, x^2, x^3, ..., x^{2012}$$

у неком редоследу, распоредила у 1006 парова. Мара је приметила да су збирови бројева по паровима сви међусобно једнаки. Одредити које бројеве је Дара могла да замисли.

3. У правоугаони рам димензије 8×5, постављено је, без преклапања, неколико подударних кружних жетона, чији је пречник не већи од 1. Да ли се сви ти жетони и кружни жетон пречника 2, могу поставити без преклапања у квадратни рам димензије 7×7?

4. Подударне кружнице k_1 и k_2, секу се у тачкама A и B. Нека је P произвољна тачка на луку AB, кружнице k_2, који се налази унутар кружнице k_1. Права AP сече кружницу k_1 у C, а права CB кружницу k_2 у тачки D. Симетрала угла CAD сече, кружницу k_1 у E и кружницу k_2 у L. Ако права LB пресеца кружницу k_1 у тачки F, доказати да тачке P, D, E, F чине темена паралелограма.

5. Нека су $r_2, r_3, ..., r_{2013}$, редом, остаци при дељењу неког непарног природног броја n са $2, 3, ..., 2013$. Познато је да су свака два остатка различита, при чему је неки од њих једнак нули. Одредити који то остатак може бити.

Време за рад 240 минута
Сваки задатак вреди 20 поена

Школско такмичење из математике

Други, трећи и четврти разред

23. децембар 2012. године
Гимназија "Светозар Марковић", Ниш

1. Низ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, задат је са $x_1 = 1, x_{2k} = 1 + x_k,\ x_{2k+1} = \frac{1}{x_{2k}},\ k \in \mathbb{N}$. Доказати да се сваки позитиван рационалан број јавља тачно једном у овом низу.

2. За дати природан број n, коначан низ природних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_m$ зовемо n-*добрим* ако се сваки природан број из скупа $\{1, 2, ..., n\}$ може представити као сума неколико (можда једног) узастопних елемената тог низа. Означимо са $f(n)$ дужину најкраћег n-доброг низа. Доказати да је:

$$8 \cdot 8 - 1 \leq f(2012) \leq 88.$$

3. Подударне кружнице k_1 и k_2, чији су центри, редом, O_1 и O_2, секу се у тачкама A и B. Нека је P тачка на луку AB, кружнице k_2, који се налази у унутрашњости кружнице k_1. Права AP сече кружницу k_1 у C, а права CB кружницу k_2 у тачки D. Симетрала угла CAD сече, редом, кружнице k_1 и k_2 у E и L. Нека је F симетрична тачка тачки D у односу на средиште дужи PE. Доказати да постоји тачка X за коју важи $\angle XFL = \angle XDC = 30^\circ$ и $CX = O_1O_2$.

4. Нека су A и B непразни дисјунктни скупови за које важи $A \cup B = \{1, 2, ..., 2026\}$. Доказати да постоје $a \in A$ и $b \in B$, тако да

$$2027 \mid a^{10} + a^9b + a^8b^2 + a^7b^3 + a^6b^4 + a^5b^5 + a^3b^7 + ab^9 + b^{10}$$

Време за рад 240 минута
Сваки задатак вреди 25 поена