

Školsko takmičenje iz matematike

I i II razred

25. decembar 2011. godine
Prirodno matematički fakultet, Niš

1. Na tabli je zapisan broj 2011. U svakom koraku se trenutno zapisani broj briše i umesto njega se zapisuje zbir tog broja i njegovih cifara. Dokazati da, primenom opisane procedure, na tabli nikada neće biti zapisan broj $25 \cdot 12 \cdot 2011$.

2. Dati su pozitivni realni brojevi $a_1, a_2, \dots, a_{2011}$ i $b_1, b_2, \dots, b_{2011}$, takvi da je $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2} < \dots < \frac{a_{2011}}{b_{2011}}$. Poređati po veličini brojeve

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}, \dots, \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{2011}}{b_1 + b_2 + \dots + b_{2011}}.$$

3. Na stranicama AB i AC trougla ABC date su tačke E i F , redom, tako da je $BE = CF$. Ako su M i N sredine duži BC i EF , redom, dokazati da je prava MN paralelna simetrali ugla $\angle BAC$.

4. Neka je (p_1, p_2, \dots, p_n) proizvoljna permutacija brojeva $\{1, 2, \dots, n\}$. Za dva broja p_i i p_j ove permutacije kažemo da čine *loš par* ako je $i < j$ i $p_i > p_j$.

Neka je $(a_1, a_2, \dots, a_{20})$ permutacija brojeva $\{1, 2, \dots, 20\}$ koja ima tačno 100 loših parova. Dokazati da permutacija

$$(a_{19}, a_{20}, a_{17}, a_{18}, \dots, a_1, a_2)$$

ima ne više od 100 loših parova.

5. Dat je trougao $\triangle ABC$. Posmatrajmo tačke X , Y i Z redom na stranicama BC , CA i AB takve da je trougao $\triangle XYZ$ sličan trouglu $\triangle ABC$ ($\angle X = \angle A$, $\angle Y = \angle B$). Dokazati da krug opisan oko trougla $\triangle XYZ$ uvek prolazi kroz fiksnu tačku, različitu od A , nezavisno od izbora tačaka X , Y , Z .

Vreme za rad 240 minuta
Svaki zadatak vredi 20 poena

Školsko takmičenje iz matematike

III i IV razred

25. decembar 2011. godine
Prirodno matematički fakultet, Niš

- 1.** Neka je $P \in \mathbb{Z}[x]$. Da li (obavezno) postoji prirodan broj n , takav da $2011 \mid P(1) + P(2) + \dots + P(n)$?
- 2.** Želimo da obojimo sve brojeve iz skupa $\{1, 2, \dots, 2011\}$ tako da svaka dva različita broja a i b , za koje važi $a \mid b$, budu obojena različitim bojama. Koliko najmanje boja nam je potrebno?
- 3.** Svakoj tački A jedne ravni dodeljen je pozitivan broj $f(A)$. Za proizvoljne tri nekolinearne tačke A, B, C , obeležimo sa T_{ABC} i H_{ABC} redom težište i ortocentar $\triangle ABC$.

 - (a) Ako za svake tri nekolinearne tačke A, B, C koje ne obrazuju pravougli trougao važi: $f(H_{ABC}) = \sqrt[3]{f(A)f(B)f(C)}$, da li mora da važi da je svakoj tački te ravni dodeljen isti broj?
 - (b) Ako za svake tri nekolinearne tačke A, B, C važi: $f(T_{ABC}) = \sqrt[3]{f(A)f(B)f(C)}$, da li mora da važi da je svakoj tački te ravni dodeljen isti broj?
- 4.** Neka je $ABCD$ tetivni četvorougao kod koga je AB prečnik opisanog kruga, sa centrom u O . Tačka E je presek dijagonala AC i BD tog četvorougla, a prava kroz E paralelna sa AB seče opisani krug u tačkama M i N . Prava OE seče krug opisan oko trougla CDE u tački F (različitoj od E). Dokazati da je četvorougao $OMFN$ tetivan.
- 5.** Za prirodan broj $n > 1$ kažemo da je *dobar* akko za ma koje prirodne brojeve $1 \leq a_1, a_2, \dots, a_{n-1} < n$ i za svaki ceo broj $0 \leq i \leq n - 1$, postoji podskup S skupa $\{1, 2, \dots, n - 1\}$, takav da je $\sum_{k \in S} a_k \equiv_n i$. Ako je S prazan skup, odgovarajuća suma je 0. Odrediti sve dobre brojeve.

Vreme za rad 240 minuta
Svaki zadatak vredi 20 poena