15. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ
МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

први круг – 30. 12. 2010.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Колико има 2010−цифрених бројева чији је збир цифара једнак 10?

2. Доказати да једначина $7^m = n^4 + 2010$ нема решења у скупу природних бројева.

3. У оштроуглом троуглу ABC тачка D је подножје висине из темена C и важи $AD = BC$. Ако је K пресечна тачка висине из темена A и симетрале унутрашњег угла код темена B, доказати да је $DK \parallel BC$.

4. Дате су тачке A_1, B_1, C_1 на страницама BC, AC, AB, редом, такве да се дужи AA_1, BB_1, CC_1 секу у тачки P. Означимо са Q пресечну тачку дужи AP и B_1C_1. Доказати да важи

$$\frac{AP}{PA_1} = 2 \cdot \frac{AQ}{QA_1}.$$

5. У једном разреду неке школе има 35 ученика који имају 10 предмета. Просечна оцена сваког предмета на полугодишту је већа од $4\frac{2}{3}$. Доказати да постоји бар 5 ученика који немају закључене јединице и двојке.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.

15. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ
МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

первi круг – 30. 12. 2010.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Унутар квадрата $ABCD$ лежи квадрат $PQRS$ тако да се дужи AP, BQ, CR и DS не секу међусобно и не секу странице квадрата $PQRS$. Доказати да је збир површина четвороуглова $ABQP$ и $CDSR$ једнак збиру површина четвороуглова $BCRQ$ и $DAPS$.

2. Међу свим многоугловима уписаним у дату кружницу наћи онај са највећим збиром квадрата дужина страница.

3. Дати су природни бројеви m и n такви да је број $m+n+1$ прост и важи

$$m+n+1 \mid 2(m^2+n^2)-1.$$

Доказати да је $m=n$.

4. Доказати да за произвољне реалне бројеве $x, y \in [0,1]$ важи неједнакост:

$$x^4+y^5+(x-y)^6 \leqslant 2.$$

5. Колико највише квадара димензија $4\times 1\times 1$ може да се смести у коцку ивице 2010?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.

15. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ
МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

первi круг – 30. 12. 2010.

ТРЕЋИ И ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. У скупу реалних бројева решити систем једначина:

$$\begin{aligned}
(x_3+x_4+x_5)^5 &= 3x_1\\
(x_4+x_5+x_1)^5 &= 3x_2\\
(x_5+x_1+x_2)^5 &= 3x_3\\
(x_1+x_2+x_3)^5 &= 3x_4\\
(x_2+x_3+x_4)^5 &= 3x_5.
\end{aligned}$$

2. Дат је низ $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{a_n}{2^n}$. Доказати да су сви чланови овог низа мањи од 3.

3. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао. Означимо са P, Q, R и S пресеке симетрала спољашњих углова ABD и ADB, DAB и DBA, ACD и ADC, DAC и DCA, редом. Доказати да је четвороугао $PQRS$ такође тетиван.

4. Нека је n природан број и $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2} \ldots, \overrightarrow{a_n}$ вектори интензитета не већег од 1. Доказати да се у изразу

$$\pm\overrightarrow{a_1} \pm \overrightarrow{a_2} \pm \ldots \pm \overrightarrow{a_n}$$

знаци могу одабрати тако да интензитет добијеног вектора буде не већи од $\sqrt{2}$.

5. Да ли постоје у паровима узајамно прости природни бројеви a, b и c већи од 1 такви да $b \mid 2^a+1$, $c \mid 2^b+1$ и $a \mid 2^c+1$.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.