

# ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА БМО

Авала, 26.04.2011.

- Наћи минимални члан низа природних бројева  $(a_n)_{n \geq 1}$  датог са:

$$a_1 = 1993^{1994^{1995}},$$
$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n, & 2 \mid a_n, \\ a_n + 7, & 2 \nmid a_n. \end{cases} \quad (1)$$

- Нека је  $A_1A_2A_3$  троугао и  $T_1, T_2, T_3$  додирне тачке споља приписаних кругова са одговарајућим страницама троугла. Ако су  $H_1, H_2, H_3$  ортоцентри троуглова  $A_1T_2T_3, A_2T_3T_1, A_3T_1T_2$  редом, доказати да су праве  $H_1T_1, H_2T_2, H_3T_3$  конкурентне.
- Нека је  $n$  природан број и  $x_1, x_2, \dots, x_n$  позитивни реални бројеви чији је збир једнак 1. Доказати неједнакост

$$x_1^2x_2^2 \dots x_n^2 + x_2^2x_3^2 \dots x_{n+1}^2 + \dots + x_{2n}^2x_1^2 \dots x_{n-1}^2 < \frac{1}{n^{2n}}.$$

- Нека је  $p$  прост број,  $p \geq 5$  и  $\mathbb{Z}_p^* = \{1, 2, \dots, p-1\}$ . Доказати да за сваку трочлану партицију скупа  $\mathbb{Z}_p^*$  постоји решење једначине

$$x + y \equiv z \pmod{p},$$

при чему свака променљива припада засебном члану партиције.

Време за рад 270 минута.

Сваки задатак писати на засебном папиру.

Желимо вам пуно успеха.