

14. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

први круг – 16.01.2010.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Записује се ток промене резултата у гемовима у једном сету тениског меча (на пример $0 : 1$, $0 : 2$, $1 : 2$, $2 : 2, \dots$). Колико има различитих могућих записа ако је познато да је сет освојио први играч?

Дат је шпил од 52 карте нумерисане бројевима од 1 до 52. Дозвољено је тачно једном пресећи шпил и заменити места блоковима добијеним тим пресецањем. Доказати да то може да се спроведе тако да се после те операције бар две карте нађу на својим позицијама (тј. да се за бар две различите вредности i карта нумерисана са i нађе на i -том месту у шпилу).

3. Одредити све природне бројеве m и n за које је број $6^m + 2^n + 2$ потпун квадрат.
4. Дат је троугао ABC . Нека је G његово тежиште и тачке M , N и P , редом, на страницима AB , BC и CA такве да је $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$. Означимо са G_1 , G_2 , G_3 тежишта троуглова AMP , BMN , CNP , редом. Доказати да:
- троуглови ABC и $G_1G_2G_3$ имају заједничко тежиште;
 - за сваку тачку D у равни троугла ABC важе неједнакости

$$3DG < DG_1 + DG_2 + DG_3 < DA + DB + DC.$$

5. На табли је написана реч ББАББААБАБАБ. У сваком кораку дозвољено је избрисати два суседна слова БА или додати два суседна слова АБ на било ком месту у речи. Да ли је могуће на тај начин дату реч претворити у реч:
- ББААББААБАБА;
 - АББАБАААББААБ;
 - БАБААБААББАББ?

Време за рад 240 минута.

Задатке детаљно образложити.

Сваки задатак писати на засебном папиру.

Желимо вам пуно успеха.

14. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

први круг – 16.01.2010.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Доказати да постоји 2010 узастопних природних бројева који се не могу представити као збир квадрата два природна броја.
2. Тачке A и B леже на истом пречнику дате кружнице. Конструисати две тетиве те кружнице исте дужине и са једним заједничким крајем - једну кроз A , другу кроз B .
3. На страницама BC и CD квадрата $ABCD$ изабране су тачке M и N тако да важи $CM + CN = AB$. Дужи AM и AN деле дијагоналу BD на три дела. Доказати да се из њих увек може саставити троугао чији је један угао 60° .
4. Наћи све реалне бројеве r такве да неједнакост

$$r(ab + bc + ca) + (3 - r) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geqslant 9$$

важи за све позитивне реалне бројеве a, b, c .

5. Мађионичар и његов помоћник изводе следећи трик: неко из публике извлачи 5 карата из стандардног шпила од 52 карте, показује их помоћнику, а затим од тих пет карата бира једну коју мађионичар треба да одреди. Помоћник затим преостале четири карте распоређује у низ на столу, при чему може поставити све карте окренуте slikom ka столу или све карте окренута наопачке. Мађионичар на основу постављених карата одређује коју је карту изабрала публика, при чему уколико су карте окренуте slikom ka столу може их окренuti. Доказати да помоћник и мађионичар трик увек могу успешно извршити (без обзира на карте које је изабрала публика). (Помоћник и мађионичар не могу комуницирати у току трика, али могу пре.) Карте су симетричне, нема никаквих малих ротација при постављању карата и сл. Једино сто је битно је распоред карата и ништа више.

Време за рад 240 минута.

Задатке детаљно образложити.

Сваки задатак писати на засебном папиру.

Желимо вам пуно успеха.