

13. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ
МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ
други круг – 24.03.2009.

ПРВИ РАЗРЕД

1. Дат је оштроугли троугао ABC . Нека је AD висина из темена A , а тачка E пресек праве BC и пречника са крајем у A кружнице описане око троугла ABC . Нека су тачке M и N симетричне тачки D у односу на праве AC и AB , редом. Доказати да је

$$\angle EMC = \angle BNE.$$

2. Природни бројеви од 1 до 999999 подељени су у две групе: у прву су стављени сви бројеви чији је најближи потпун квадрат непаран, а у другу сви бројеви чији је најближи потпун квадрат паран. У ком скупу је сума свих бројева већа?
3. Дато је $2n$ идентичних новчића, од којих n има масу a , а преосталих n масу b ($a < b$). Уколико нам је на располагању вага помоћу које можемо мерити масу било којих n новчића, доказати да се у $n+1$ мерења могу одредити бројеви a и b .
4. Дат је трогао ABC . На страницама AB , BC и CA изабране су тачке M , N и P , редом, тако да је четвороугао $CPMN$ паралелограм. Нека је $\{R\} = AN \cap MP$, $\{S\} = BP \cap MN$ и $\{Q\} = AN \cap BP$. Доказати да је површина четвороугла $MRQS$ једнака површини троугла NQP .
5. На табли је написана реч ББАББААБАБАБ. У сваком кораку дозвољено је избрисати два суседна слова БА или додати два суседна слова АБ на било ком месту у речи. Да ли је могуће на тај начин дату реч претворити у реч:
- ББАББАБААББА;
 - АББАБАААББААБ;
 - БАБААБААББАББ?

Време за рад 240 минута.

Задатке детаљно образложити.

Сваки задатак писати на засебном папиру.

Желимо вам пуно успеха.

13. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ
МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ
други круг – 24.03.2009.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Дата је права p и тачке A, B, C, D и E на њој тако да је

$$AB = BC = CD = DE \quad \text{и} \quad A - B - C - D - E.$$

Нека је F произвољна тачка која се не налази на правој p . Уколико су G и H центри кругова описаних око троуглова AFD и BFE , редом, доказати да је $GH \perp CF$.

2. Нека су a, b, c природни бројеви такви да $a+b+c \mid a^2+b^2+c^2$. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n за које

$$a+b+c \mid a^n+b^n+c^n.$$

3. Дати су позитивни бројеви $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$. Доказати неједнакост

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3) + 4 \cdot \left(\frac{1}{a_1 b_1} + \frac{1}{a_2 b_2} + \frac{1}{a_3 b_3} \right) \geq 20.$$

4. Кругови \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 секу се у тачкама P и Q . На кругу \mathcal{S}_1 одабране су тачке A_1 и B_1 , различите од P и Q . Праве A_1P и B_1P секу круг \mathcal{S}_2 у тачкама A_2 и B_2 , редом. Означимо са C пресечну тачку правих A_1B_1 и A_2B_2 . Доказати да центри кругова описаних око троуглова A_1A_2C , добијених за различите положаје тачака A_1 и B_1 , леже на фиксираном кругу.
5. У речи састављеној од слова a и A можемо да мењамо блокове слова на следећи начин:

(1) aAa са A и обратно;

(2) AAa са a и обратно.

Да ли је оваквим трансформацијама могуће полазећи од речи $\underbrace{aa\dots a}_{2009} A$ добити реч $A\underbrace{aa\dots a}_{2009}$?

Време за рад 240 минута.

Задатке детаљно образложити.

Сваки задатак писати на засебном папиру.

Желимо вам пуно успеха.

13. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ
МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ
други круг – 21.03.2009.

ТРЕЋИ И ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n таквих да број 3^n нема мањи збир цифара од броја 3^{n+1} .
2. Нека су l_a , l_b , l_c дужине симетрала углова датог троугла, а l'_a , l'_b , l'_c дужине њихових делова између центра уписане кружнице и одговарајућих странница. Доказати да важи неједнакост

$$l'_a + l'_b + l'_c \leq \frac{1}{3}(l_a + l_b + l_c).$$

3. У правилном $6n$ -тоуглу по $2n$ темена обојено је једном од три дате боје. Затим је свака дуж која спаја темена исте боје обојена том бојом (остале дужи нису обојене). Доказати да постоје две подударне дужи обојене различитим бојама.
4. Нека је \mathcal{S} скуп свих рационалних бројева који задовољавају следеће услове:

$$1) \quad \frac{1}{2} \in \mathcal{S};$$

$$2) \quad \text{ако је } x \in \mathcal{S}, \text{ онда } \frac{1}{x+1} \in \mathcal{S}, \quad \frac{x}{x+1} \in \mathcal{S}.$$

Доказати да скуп \mathcal{S} садржи све рационалне бројеве из интервала $(0, 1)$.

5. Дат је неједнакокраки троугао ABC . Уписани круг k са центром у тачки O додирује странице AB , BC , CA у тачкама C_1 , A_1 , B_1 , редом. Означимо пресечне тачке дужи AA_1 , BB_1 и круга k са A_2 и B_2 . Нека је пресек симетрале угла $\angle B_1 A_1 C_1$ и дужи $B_1 C_1$ тачка A_3 , а симетрале угла $\angle A_1 B_1 C_1$ и дужи $A_1 C_1$ тачка B_3 . Такође, означимо са P и Q пресечне тачке кругова описаних око троуглова $A_1 A_2 A_3$ и $B_1 B_2 B_3$. Доказати да је $A_2 A_3$ симетрала угла $\angle B_1 A_2 C_1$, као и да су тачке P , O , Q колинеарне.

Време за рад 240 минута.

Задатке детаљно образложити.

Сваки задатак писати на засебном папиру.

Желимо вам пуно успеха.