ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА БМО

Београд, 20.04.2008.

Први дан

1. Одредити све просте бројеве p такве да је $p^3 - p + 1$ потпун квадрат природног броја.

2. Посматрајмо све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такве да неједнакост

$$f(m+n) \geqslant f(m) + f(f(n)) - 1$$

важи за све m, $n \in \mathbb{N}$. Одредити све могуће вредности за $f(2007)$.

3. У датом троуглу ABC тачке A_1, B_1 и C_1 су средишта страница BC, CA и AB, редом. Нека је P произвољна тачка на описаном кругу. Праве PA_1, PB_1 и PC_1 секу описани круг по други пут у тачкама A', B' и C', редом. Претпоставимо да су тачке A, B, C, A', B', C' различите и да праве AA', BB' и CC' граде троугао. Доказати да површина овог троугла не зависи од положаја тачке P.

4. У равни је дат конвексан n-тоугао P. Троугао формиран од темена P називамо *добар* ако све његове странице имају јединичну дужину. Доказати да постоји највише $\frac{2}{3}n$ добрих троуглова.

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.

ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА БМО

Београд, 22.04.2008.

Други дан

1. Нека је $n > 1$ природан број. Одредити све низове дужине $n^2 + n$ чији су сви чланови 0 или 1, такве да за сваких $2n$ узастопних чланова низа у првих n има мање јединица него у задњих n.

2. Трапез $ABCD$ ($AB \parallel CD$) је такав да на крацима AD и BC постоје тачке P и Q тако да је

$$\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD \qquad \text{и} \qquad \sphericalangle\, AQB = \sphericalangle CQD.$$

Доказати да су тачке P и Q подједнако удаљене од пресека дијагонала трапеза.

3. Дат је природан број n. Доказати да постоји полином $P(x) \in \mathbb{R}[X]$ степена n који има n различитих реалних корена, такав да важи

$$P(x) \cdot P(4 - x) = P(x \cdot (4 - x)).$$

Време за рад 210 минута.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.

ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА БМО

Београд, 30.04.2008.

Трећи дан

1. Нека је M средиште основице BC једнакокраког троугла ABC. На мањем луку MA круга описаног око троугла ABM изабрана је тачка X. Нека је T тачка угла BMA за коју је $\sphericalangle TMX = 90^\circ$ и $TX = BX$. Доказати да $\sphericalangle MTB - \sphericalangle CTM$ не зависи од избора тачке X.

2. Доказати да за реалне бројеве a, b и c важи неједнакост

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geqslant 9(ab+bc+ca).$$

3. Дефинишимо низ $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ са $a_{2n} = a_n$ и $a_{2n+1} = (-1)^n$. Тачка P се креће у координатној равни на следећи начин:

(а) Нека је P_0 координатни почетак. Прво се P креће од P_0 до $(1,0)$. Означимо ову тачку са P_1.

(б) Пошто се P помери у P_i, окреће се за 90° на леву страну и помера за 1 ако је $a_i = 1$, а окреће за 90° на десно и помера за 1 ако је $a_i = -1$. Означимо ову тачку са P_{i+1}

Доказати да P не може проћи кроз исти сегмент два пута.

4. Доказати да за сваки природан број $k \geqslant 2$ важи

$$2^{3k} \parallel \binom{2^{k+1}}{2^k} - \binom{2^k}{2^{k-1}}.$$

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.