12. традиционално интерно такмичење ученика Математичке гимназије

другу круг – 24.03.2008.

ПРВИ РАЗРЕД

1. На страницама AB, BC, CA троугла $\triangle ABC$ изабране су тачке D, E и F тако да је $DE = BE$ и $FE = CE$. Доказати да центар круга описаног око троугла $\triangle ADF$ лежи на симетрали угла $\sphericalangle DEF$.

2. У паралелограму $ABCD$ изабрана је тачка K таква да је средиште L дужи AD подједнако удаљено од тачака K и C, а средиште M дужи CD подједнако удаљено од тачака K и A. Нека је N средиште дужи BK. Доказати да су углови $\sphericalangle NAK$ и $\sphericalangle NCK$ међусобно подударни.

3. Доказати да је број $15^4 + 4^{15}$ сложен.

4. Аца, Бојан, Цаки и Драган су решили да купе 16 чоколадица. Аца је рекао да може да купи једну, 2 или 3 чоколадице. Бојан је рекао да може да купи 2, 3 или 4. Цаки је рекао да може да купи 3, 4 или 5. Драган је рекао да може да 4, 5 или 6. На колико различитих начина они могу да изврше куповину тих 16 чоколадица?

5. Нека је $A_1A_2\ldots A_n$ конвексни $n-$тоугао, $n \geqslant 3$. На почетку је у темену A_1 уписан број 1, а у осталим теменима 0. Следећа операција је дозвољена: одабрати теме A_i $n-$тоугла у коме је написан број 1 и заменити бројеве a, b, c у теменима A_{i-1}, A_i, A_{i+1} са $1-a$, $1-b$, $1-c$, редом ($A_0 \equiv A_n$, $A_{n+1} \equiv A_1$). Да ли је могуће након коначног броја операција добити 0 у свим теменима, ако је: **а)** $n = 2007$; **б)** $n = 2008$?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.

12. традиционално интерно такмичење ученика Математичке гимназије

другი круг – 24.03.2008.

ДРУГИ РАЗРЕД

1. Израчунати суму
$$\sum_{i=0}^{2007} \frac{{x_i}^3}{1 - 3x_i + 3{x_i}^2},$$
где је $x_i = \dfrac{i}{2007}$ за $i = 0, 1, ..., 2007$.

2. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви за које је $a + b + c \geqslant \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$. Доказати неједнакост:
$$a + b + c \geqslant \frac{3}{a + b + c} + \frac{2}{abc}.$$

3. Унутар троугла $\triangle ABC$ налази се тачка M таква да је
$$\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBC = \sphericalangle MCA = \varphi.$$
Доказати да је
$$\frac{1}{\sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\sin^2 \gamma},$$
где је $\alpha = \sphericalangle BAC$, $\beta = \sphericalangle CBA$, $\gamma = \sphericalangle ACB$.

4. Кругови $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ секу се у тачкама P и Q. Заједничка тангента ових кругова, ближа тачки P, додирује кругове у тачкама A и B, редом. Тангента круга $\mathcal{C}_1$ у тачки P сече круг $\mathcal{C}_2$ у тачки E, различитој од P, док тангента круга $\mathcal{C}_2$ у P сече $\mathcal{C}_1$ у тачки F, различитој од P. Нека су H и K тачке на дужима AF и BE, редом, такве да је $AH = AP$ и $BK = BP$. Доказати да су тачке A, H, Q, K, B концикличне.

5. Дато је 8 јединичних коцки, при чему су 24 стране обојено у плаво и 24 у црвено. Доказати да од њих можемо саставити коцку димензија $2 \times 2 \times 2$ која има једнак број плавих и црвених јединичних квадрата на површини.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.

12. традиционално интерно такмичење ученика Математичке гимназије

другi круг – 25.03.2008.

ТРЕЋИ И ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

1. Решити систем једначина

$$\sqrt{x} - \frac{1}{y} = \sqrt{y} - \frac{1}{z} = \sqrt{z} - \frac{1}{x}$$

у скупу реалних бројева.

2. Дат је 2008-оугао чије се никоје три дијагонале не секу у једној тачки. Свака од његових дијагонала обојена је једном од 1003 боје. Доказати да постоји троугао чије све странице леже на дијагоналама које имају исту боју.

3. Одредити све целе бројеве a такве да је број

$$\frac{a^{8k} - 1}{a - 1}$$

потпун квадрат, за неки природан број k.

4. Дат је троугао $\triangle ABC$ и тачка M која не лежи ни на једној висини тог троугла. Права кроз M нормална на AM сече праву BC у тачки A_1. Тачке B_1 и C_1 дефинишу се аналогно. Доказати да су A_1, B_1, C_1 колинеарне тачке.

5. Функција $f : \mathbb{N} \diagdown \{0, 1\} \to \mathbb{N}$ дефинисана је на следећи начин:

$$f(n) = \text{НЗС}(1, 2, \ldots, n)$$

Доказати да постоји 2008 узастопних природних бројева у којима функција има исту вредност.

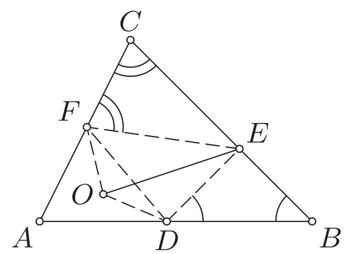
Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.

Решења задатака за први разред

1. Како је $\sphericalangle FEC = 180^\circ - 2\gamma$ и $\sphericalangle DEB = 180^\circ - 2\beta$, то је $\sphericalangle FED = 180^\circ - 2\alpha$. Ако са O означимо центар описаног круга трогла AFD из $\sphericalangle FOD = 2\alpha$, добијамо да је четвороугао $EFDO$ тетиван. Самим тим како је FOD једнакокрак, из тетивности добијамо

$$\sphericalangle DEO = \sphericalangle DFO = \sphericalangle FDO = \sphericalangle FEO,$$

што је и требало доказати.

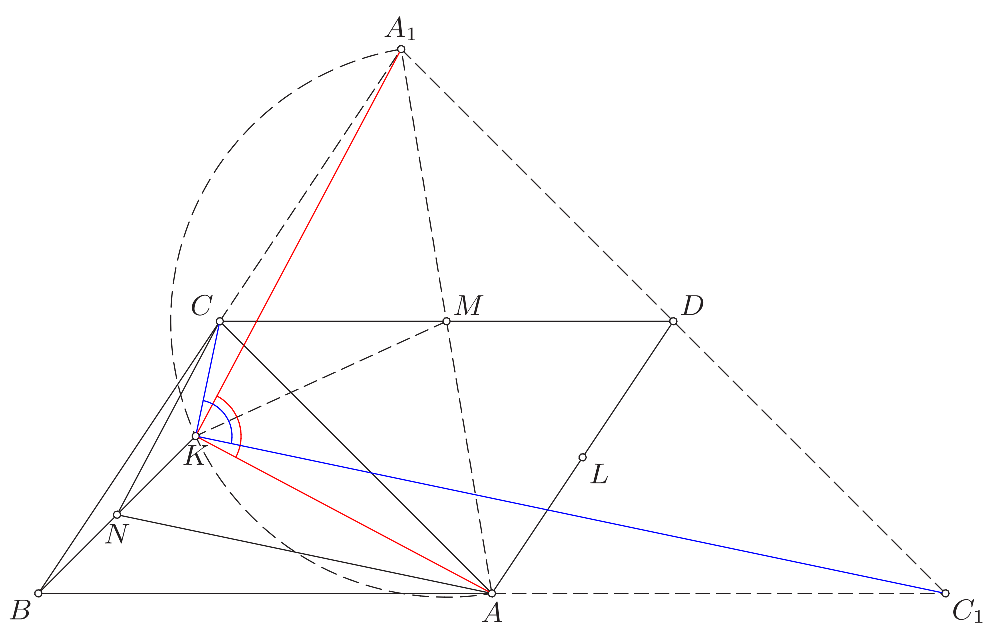


2. Допунимо паралелограм $ABCD$ до троугла $\triangle BA_1C_1$ тако да дуж AC буде средња линија троугла $\triangle BA_1C_1$. Због тога уочимо кроз D праву паралелну са AC и означимо са A_1 и C_1 пресеке те праве са продужецима страница BC и BA редом. Тада ће четвороуглови ACA_1D и CAC_1D бити паралелограми. Тачке A, M, A_1 ће бити колинеарне јер се у паралелограму дијагонале полове. Дакле у троуглу $\triangle AKA_1$ угао $\sphericalangle AKA_1$ је прав јер је тачка M подједнако удаљена од тачака A, K, A_1. Аналогно закључујемо да је и угао $\sphericalangle CKC_1$ прав. Стога је

$$\sphericalangle CKA_1 = 90^\circ - \sphericalangle A_1KC_1 = \sphericalangle C_1KA.$$

Одсечци CN и KA_1 су паралелни јер је CN средња линија троугла $\sphericalangle KBA_1$. Аналогно ус паралелни и одсечци AN и KC_1. Следи да је

$$\sphericalangle NCK = \sphericalangle CKA_1 = \sphericalangle C_1KA = \sphericalangle NAK.$$



3. Допунимо дати израз до разлике квадрата:

$$\begin{aligned} 15^4 - 4^{15} &= 15^4 + 2\cdot 15^2 \cdot 2^{15} + 4^{15} - 2\cdot 15^2\cdot 2^{15} = (15^2 + 2^{15})^2 - (2^8\cdot 15)^2 \\ &= (15^2 + 2^{15} - 2^8\cdot 15)(15^2 + 2^{15} + 2^8 \cdot 15). \end{aligned}$$

Овим нисмо показали да је дати број сложен, јер морамо да покажемо још и да је сваки од горња 2 фактора већи од 1. У другом фактору су сви сабирци већи од 1 па је је и $15^2 + 2^{15} + 2^8\cdot 15 > 1$. За први фактор имамо да је $2^{15} > 2^{12} = 2^8 \cdot 2^4 > 2^8 \cdot 15$, па имамо да је и $15^2 + 2^{15} - 2^8 \cdot 15 > 15^2 > 1$. Тиме смо показали да су оба фактора већи од 1, па је дати број сложен.

Напомена. Овим решењем смо показали да је $15^4 - 4^{15} = 29\,153 \cdot 36\,833$. Може се показати да су оба ова броја, и 29 153 и 36 833 прости.

4. *Решење 1*: Помоћу смена $a = 1+\alpha$, $b = 2+\beta$, $c = 3+\gamma$, $d = 4+\delta$, полазни систем (који се састоји од 1 једначине и 4 неједначине) се своди на

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 7, \qquad 0 \leqslant \alpha,\beta,\gamma,\delta \leqslant 2.$$

Означимо са X скуп свих решења једначине $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 6$ у скупу $\mathbb{N}_0$, са A подскуп скупа X код којих је $\alpha \geqslant 3$, са B подскуп скупа X код којих је $\beta \geqslant 3$, са C подскуп скупа X код којих је $\gamma \geqslant 3$, са D подскуп скупа X код којих је $\delta \geqslant 3$. Размотримо број елемената сваког од скупова који се јављају у Принципу укључења-искључења.

Број елемената скупа X је једнак $|X| = \binom{4+6-1}{6} = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84$.

Број елемената скупа A је једнак броју решења једначине

$$\alpha' + \beta + \gamma + \delta = 6 - 3 = 3, \qquad \text{где су } \alpha', \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}_0$$

(увели смо смену $\alpha = 3 + \alpha'$), те је $|A| = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20$.

Аналогно добијамо да је и $|B| = |C| = |D| = \binom{6}{3} = 20$.

Број елемената скупа $A\cap B$ је једнак броју решења једначине

$$\alpha' + \beta' + \gamma + \delta = 6 - 3 - 3 = 0, \qquad \text{где су } \alpha', \beta', \gamma, \delta \in \mathbb{N}_0$$

(увели смо смену $\alpha = 3+\alpha'$ и $\beta = 3 + \beta'$), те је $|A\cap B| = \binom{0+1-1}{1} = \binom{1}{1} = 1$ (то једино решење је $\alpha' = \beta' = \gamma = \delta = 0$). Аналогно добијамо да је и $|A\cap C| = |A \cap D| = |B\cap C| = |B \cap D| = |C\cap D| = \binom{1}{1} = 1$.

Скуп $A\cap B\cap C$ је празан (ту би била решења код којих је $\alpha,\beta,\gamma \geqslant 3$, тј. ту би већ имали да је $\alpha+\beta+\gamma = 9$, а нама треба $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 6$), те добијамо да важи $|A\cap B\cap C| = 0$. Аналогно се добијамо да важи и да је $|A\cap B\cap D| = |A\cap C\cap D| = |B\cap C\cap D| = |A\cap B\cap C\cap D| = 0$.

Када све ово убацимо у Принцип укључења-искључења добијамо да је број решења дате једначине:

$$\begin{aligned} |X| &- \big(|A| + |B| + |C| + |D|\big) + \big(|A\cap B| + |A\cap C| + |A\cap D| + |B\cap C| \\ &+ |B\cap D| + |C \cap D|\big) - \big(|A\cap B\cap C| + |A\cap B\cap D| + |A\cap C\cap D| \\ &+ |B\cap C\cap D|\big) - |A\cap B\cap C\cap D| \\ &= \binom{9}{6} - \binom{4}{1}\cdot\binom{6}{3} + \binom{4}{2}\cdot\binom{1}{1} - \binom{4}{3}\cdot 0 + \binom{4}{4}\cdot 0 = 84 - 80 + 6 = 10. \end{aligned}$$

Решење 2: Како смо у претходном решењу добили мали резултат, видимо да смо до њега лакше могли да дођемо обичним логичко-комбинаторним расуђивањем.

Ако бисмо узели максималне вредности за a, b, c, d добили би збир $3 + 4 + 5 + 6 = 18$, а како нама треба збир 16 (за 2 мањи), до њега можемо доћи ако било коју непознату (a, b, c, d) умањимо за 2 (ту имамо $\binom{4}{1} = 4$ решења: $(a, b, c, d) \in \{(2, 4, 5, 6), (3, 3, 5, 6), (3, 4, 4, 6), (3, 4, 5, 5)\}$) или уколико неке 2 непознате умањимо за по 1 (у овом случају имамо $\binom{4}{2} = 6$ решења: $(a, b, c, d) \in \{(2, 3, 5, 6), (2, 4, 4, 6), (2, 4, 5, 5), (3, 3, 4, 6), (3, 3, 5, 5), (3, 4, 4, 5)\}$).

Куповину се може извршити на $4 + 6 = 10$ различитих начина.

5. **а)** Доказаћемо да је за бројеве облика $n = 3k$ немогуће добити 0 у свим теменима $n-$тоугла. Претпоставимо супротно и означимо са a_i број операција извршених над теменом A_i. Како свака операција мења број јединица за непаран број (1 или 3), следи да је укупан број извршених операција $S + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ непаран. С друге стране, приметимо да је $a_1 + a_2 + a_3$ заправо укупан број промена (са 0 на 1 и обрнуто) броја записаног у темену A_2. Како је и на почетку и на крају у темену A_2 записана 0, имамо да је број $a_1 + a_2 + a_3$ паран. Исто важи и за $a_4 + a_5 + a_6$ и тако даље. Према томе,

$$S = (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \ldots + (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k})$$

је сума парних бројева, тј. паран број, што је контрадикција са већ добијеном чињеницом да је S непаран. Дакле, одговор на питање је одречан, јер је 2007 дељиво са 3.

б) Ако је $n = 2008$, можемо поступити на следећи начин: извршимо операцију, редом, над теменима $A_1, A_2, \ldots, A_{2006}$ и добијамо 1 у свим теменима осим у A_{2006} у коме је 0. Према томе, темена $A_1, \ldots, A_{2005}$, A_{2007}, A_{2008} можемо поделити у 669 група од по 3 узастопна темена у којима су све јединице. Извршавањем операције у свакој од тих група засебно добијамо 0 у свим теменима, па је у овом случају одговор потврдан.

Решења задатака за други разред

1. Саберимо $(i+1)$-ви сабирак $\dfrac{x_i^3}{1-3x_i+3{x_i}^2}=\dfrac{i^3}{2007^3-3\cdot 2007^2\cdot i+3\cdot 2007\cdot i^2}$ и $(i+1)$-ви од позади $\dfrac{{x_{2007-i}}^3}{1-3x_{2007-i}+3{x_{2007-i}}^2}=\dfrac{(2007-i)^3}{2007^3-3\cdot 2007^2\cdot i+3\cdot 2007\cdot i^2}$ и добијамо да је

$$\frac{x_i^3}{1-3x_i+3x_i^2}+\frac{x_{2007-i}^3}{1-3x_{2007-i}+3x_{2007-i}^2}=\frac{2007^3-3\cdot 2007^2\cdot i+3\cdot 2007\cdot i^2}{2007^3-3\cdot 2007^2\cdot i+3\cdot 2007\cdot i^2}=1.$$

Одатле добијамо да је цела сума једнака 1004.

2. Из неједнакости Коши-Шварц-Буњаковског и услова, $a+b+c\geqslant\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$, следи да је $(a+b+c)^2\geqslant(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9$, па је

$$a+b+c\geqslant 3. \tag{$*$}$$

Из А–Г неједнакости имамо $\dfrac{x^2+y^2}{2}\geqslant xy$, $\dfrac{x^2+z^2}{2}\geqslant xz$ и $\dfrac{y^2+z^2}{2}\geqslant yz$. Сабирањем ових неједнакости уз додавање $2(xy+xz+yz)$ на обе стране добијамо $(x+y+z)^2\geqslant 3(xy+yz+zx)$. Када применимо ову неједнакост на бројеве $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{c}$ добијамо:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\geqslant\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\,. \tag{$**$}$$

Користећи неједнакости $(*)$ и $(**)$ и почетни услов, $a+b+c\geqslant\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$, добијамо:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &\overset{(*)}{\geqslant} 3+\frac{2}{3}(a+b+c)^2 \overset{\text{п.у.}}{\geqslant} 3+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\\ &\overset{(**)}{\geqslant} 3+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=3+\frac{2(a+b+c)}{abc}\,,\end{aligned}$$

одакле дељењем са $a+b+c$ добијамо тражену неједнакост. Једнакост важи акко је $a=b=c=1$.

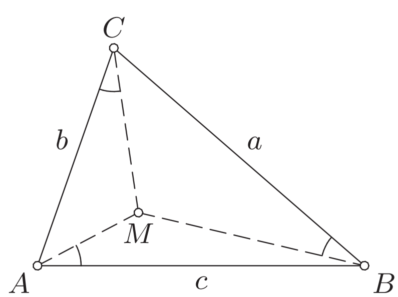
3. Како је $\sphericalangle AMC = 180^\circ - (\sphericalangle MCA + \sphericalangle MAC) = 180^\circ - \big(\varphi + (\alpha - \varphi)\big) = 180^\circ - \alpha$ имамо да је $\sin(\sphericalangle AMC) = \sin\alpha$. Стога, применом Синусне теореме на троугао $\triangle CAM$, као и аналогно на троуглове $\triangle ABM$ и $\triangle BCM$ добијамо

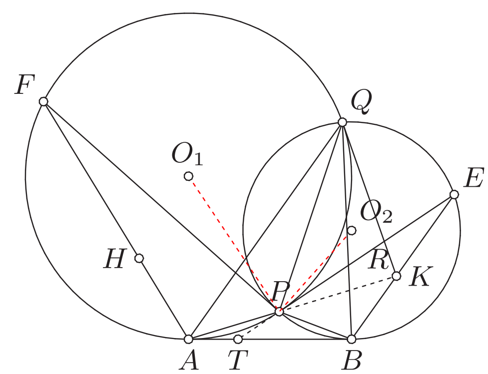
$$MA = b\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}\,, \qquad MB = c\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin\beta}\,, \qquad MC = a\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}\,.$$

То ћемо уврстити у наредном израчунавању

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABC} &= P_{\triangle ABM} + P_{\triangle BCM} + P_{\triangle CAM} \\ &= \frac{1}{2}\,MA\cdot MB\cdot\sin\beta + \frac{1}{2}\,MB\cdot MC\cdot\sin\gamma + \frac{1}{2}\,MC\cdot MA\cdot\sin\alpha \\ &= \frac{1}{2}\,bc\,\frac{\sin^2\varphi}{\sin\alpha} + \frac{1}{2}\,ca\,\frac{\sin^2\varphi}{\sin\beta} + \frac{1}{2}\,ab\,\frac{\sin^2\varphi}{\sin\gamma} \\ &= P_{\triangle ABC}\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\alpha} + P_{\triangle ABC}\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\beta} + P_{\triangle ABC}\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\gamma}\,. \end{aligned}$$

Одавде када поделимо све са $P_{\triangle ABC}$ добијамо $\dfrac{1}{\sin^2\varphi} = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} + \dfrac{1}{\sin^2\beta} + \dfrac{1}{\sin^2\gamma}$.





4. Због симетрије услова задатка, довољно је доказати да је четвороугао $ABKQ$ тетиван. Означимо пресек правих AP и BE са R, а AB и PE са T. Користећи својства тангентних и тетивних четвороуглова, имамо да је

$$\sphericalangle QAR = \sphericalangle QAP = \sphericalangle QPE = \sphericalangle QBE = \sphericalangle QBR,$$

па је четвороугао $ABRQ$ тетиван. Тврдимо да је $K \equiv R$. Из особина спољашњих углова троуглова ABP и EPR, као и тангенти AB и PT добијамо низ једнакости:

$$\begin{aligned} \sphericalangle BPR &= \sphericalangle BAP + \sphericalangle PBA \\ &= \sphericalangle AQP + \sphericalangle PQB \\ &= \sphericalangle APT + \sphericalangle PEB \\ &= \sphericalangle RPE + \sphericalangle PER \\ &= \sphericalangle PRB. \end{aligned}$$

Дакле, троугао BPR је једнакокрак и $BP = BR$, одакле закључујемо да се тачке R и K поклапају, чиме је доказ завршен.

5. На почетку саставимо коцку $2 \times 2 \times 2$ на произвољан начин. Означимо са m и n бројеве, редом, плавих и црвених јединичних квадрата на површини коцке. Ако је $m = n$ доказ је завршен, тако да можемо без умањења општости претпоставити надаље да је $m > n$. Тада је разлика плавих и црвених квадрата на површини $d = m - n > 0$ паран број, јер је $m + n = 24$, а $m - n$ и $m + n$ су бројеви исте парности. Приметимо да ротација сваке од јединичних коцки око неке осе симетрије паралелне страни велике коцке чини тачно један до тада видљив јединични квадрат невидљивим, и обрнуто, тачно један невидљив квадрат видљивим. Према томе, d остаје непромењено или се мења за 2. Међутим, користећи 3 такве ротације можемо учинити све 3 стране произвољне јединичне коцке, које су биле невидљиве, видљивим, тј. довести их на површину коцке $2 \times 2 \times 2$. Ако учинимо то са сваком од 8 јединичних коцки, добијамо коцку $2 \times 2 \times 2$ са m црвених и n плавих јединичних квадрата на површини, па је сада $d = n - m < 0$, што је опет паран број. У неком тренутку d је морало да буде 0, јер је и на почетку и на крају парно, при чему се мења за 0 или 2 приликом поменутих ротација. У том тренутку је једнак број црвених и плавих квадрата на површини веће коцке, чиме је доказ завршен.

Решења задатака за трећи и четврти разред

1. Из $\sqrt{x}-\dfrac{1}{y}=\sqrt{y}-\dfrac{1}{z}$ следи

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{z-y}{zy}. \tag{1}$$

Аналогно добијамо

$$\frac{y-z}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}=\frac{x-z}{xz}. \tag{2}$$

Ако је, нпр. $x=y$, из прве једначине добијамо $y=z$.

Дакле, ако међу датим бројевима има различитих, онда су сви међусобно различити. Можемо претпоставити да је x највећи од њих. Имамо следећа два случаја:

1° $y>z$ тада у једнакости (1) лева страна позитивна, а десна негативна;

2° $y<z$ тада је лева страна једнакости (2) негативна, а десна позитивна.

Тиме смо показали да у сваком од ова 2 случаја немамо решење, па је једино решење $(x,y,z)=(c,c,c)$, где је c позитиван реалан број.

2. Одаберимо теме A_{2008} датог многоугла. Назовимо *средњим* дијагоналама многоугла $A_1, A_2, ..., A_{2007}$ оне одсечке који спајају темена чији се одсечци разликују за 1003 или 1004. Размотримо све средње дијагонале. Њих је тачно 2007. Приметимо да се међу њима сваке две секу. Из сваког темена полазе две средње дијагонале. Како је $2007>2\cdot 1003$, наћи ће се три једнобојне дијагонале. Оне се међусобно секу у трима различитим тачкама. Те тачке су темена траженог троугла.

3. Једини бројеви који нису природни, а задовољавају полазни услов да је $\dfrac{a^{8k}-1}{a-1}$ потпун квадрат су $a=-1$ и $a=0$. Нека је даље $a>1$. Растављањем добијамо

$$\frac{a^{8k}-1}{a-1}=\frac{a^{2k}-1}{a-1}\cdot(a^{2k}+1)(a^{4k}+1).$$

Означимо чланове производа са десне стране редом са A, B, C. Тада важи

$$A\mid B-2,\qquad A\mid C-2,\qquad B\mid C-2,$$

па је НЗД било која два од ових бројева 1 или 2. Самим тим како бројеви B и C нису потпуни квадрати, они морају бити двоструки квадрати, па је број $4BC=4a^{6k}+4a^{4k}+4a^{2k}+4$ потпун квадрат. Међутим,

$$(2a^{3k}+a^k+1)^2>4a^{6k}+4a^{4k}+4a^{2k}+4>(2a^{3k}+a^k),$$

што је контрадикција.

Једина решења су $a=-1$ и $a=0$.

4. Означимо са A_2 и A_3, редом, подножја нормала из B и C на праву AM. Тада је $\dfrac{CA_1}{A_1B} = \dfrac{A_3M}{MA_2}$, јер су A_3M и MA_2 пројекције дужи CA_1 и A_1B на праву AM, редом. Аналогно је $\dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{B_3M}{MB_2}$ и $\dfrac{BC_1}{C_1A} = \dfrac{C_3M}{MC_2}$ где су B_2 и B_3 подножја нормала из C и A на праву BM, а C_2 и C_3 подножја нормала из A и B на праву CM, редом. Како је $\sphericalangle AA_2B = \sphericalangle AB_3B = 90^\circ$, то тачке A_2 и B_3 припадају кругу над пречником AB. Потенција тачке M у односу на овај круг нам даје $MB \cdot MB_3 = MA \cdot MA_2$, одакле је $\dfrac{MB_3}{MA_2} = \dfrac{MA}{MB}$. Аналогно је $\dfrac{MA_3}{MC_2} = \dfrac{MC}{MA}$ и $\dfrac{MC_3}{MB_2} = \dfrac{MB}{MC}$. Комбинујући то са претходно добијеним једнакостима добијамо

$$\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{MA}{MB} \cdot \frac{MC}{MA} \cdot \frac{MB}{MC} = 1,$$

па су према Чевиној теореми тачке A_1, B_1 и C_1 колинеарне.

5. Доказаћемо да је $f(n) < f(n+1)$ ако и само ако је $n+1$ степен неког простог броја.

Нека је $n + 1 = p^k$, за неки прост број p и $k \in \mathbb{N}$.

Како НЗС$(1, 2, \ldots, n)$ | НЗС$(1, 2, \ldots, n, n+1)$ имамо да је $f(n) \leqslant f(n+1)$. Даље, имамо да

$$p^{k-1} \parallel f(n) = \text{НЗС}(1, 2, \ldots, n) \qquad \text{и} \qquad p^k \parallel f(n+1) = \text{НЗС}(1, 2, \ldots, n, n+1),$$

што са претходном чињеницом повлачи $f(n) < f(n+1)$.

Обрнуто, претпоставимо да је $f(n) < f(n+1)$.

Нека је $n + 1 = {p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2} \ldots {p_r}^{k_r}$, где је $r \geqslant 2$ и $k_i \geqslant 1$. Како ${p_i}^{k_i} \mid n+1$, имамо ${p_i}^{k_i} \leqslant \frac{n+1}{2} \leqslant n$, па ${p_i}^{k_i}$ дели $f(n)$. Дакле, $n+1$ дели $f(n)$, па је $f(n+1) = f(n)$. Ово је контрадикција, тј. мора бити $r = 1$ и $n+1$ је степен простог броја.

Пређимо сада на тврђење задатка. Довољно је доказати да постоји 2008 узастопних природних бројева тако да ниједан од њих није степен неког простог броја. Нека су $\{p_1, \ldots, p_{2008}\}$ и $\{q_1, \ldots, q_{2008}\}$ различити прости бројеви. Према Кинеској теореми о остацима систем конгруенција

$$\begin{aligned}
x &\equiv -1 \pmod{p_1q_1}\\
x &\equiv -2 \pmod{p_2q_2}\\
&\vdots\\
x &\equiv -2008 \pmod{p_{2008}q_{2008}}
\end{aligned}$$

има решење, означимо га са n. Тада за свако $1 \leqslant i \leqslant 2008$ важи $p_iq_i \mid n+i$, па бројеви $n+1, \ldots, n+2008$ нису степени простог броја.