# 12. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ
# МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

први круг – 23.12.2007.

## ПРВИ РАЗРЕД

**1**. Доказати да број $2^n + n^2$ није дељив са 105 ни за једно $n \in \mathbb{N}$.

**2**. Капетан је добио задатак да распореди 12 војника (различитих по висини) у 3 врсте од по 4 војника, тако да је сваки војник нижи од свих војника који се налазе директно иза њега (у осталим врстама). На колико начина капетан то може учинити?

**3.** Нека су $K$ и $N$ средишта страница $AB$ и $CD$ четвороугла $ABCD$. Дужи $BN$ и $KC$ секу се у тачки $O$. Ако праве $AO$ и $DO$ деле дуж $BC$ на три једнака дела, доказати да је четвороугао $ABCD$ паралелограм.

**4**. Дата је табла $8 \times 10$ из које су исечена сва 4 угаона квадрата $2 \times 2$. Ова табла је покривена са доминама $1 \times 4$ и $1 \times 5$ (у покривању се јављају обе врсте домина). Колико може бити укупно домина?

**5**. У трапезу $ABCD$ дужина дијагонале $AC$ једнака је збиру дужина основица $AB$ и $CD$. Нека је $M$ средиште странице $BC$, а $B'$ тачка симетрична тачки $B$ у односу на праву $AM$. Доказати да је $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CB'D$.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.

# 12. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ
# МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

први круг – 23.12.2007.

## ДРУГИ РАЗРЕД

**1.** Одредити све парове $(x, y)$ природних бројева такве да

$$2^x - 1 \mid 2^y + 1.$$

**2.** Нека су $K$ и $L$ средишта, редом, страница $AC$ и $AB$ троугла $ABC$. Означимо додирне тачке уписаног круга тог троугла са страницама $BC$ и $AC$ са $D$ и $E$, редом. Доказати да се симетрала унутрашњег угла код темена $B$, права $KL$ и права $DE$ секу у једној тачки.

**3**. Око града изграђен је кружни пут. Све улице тог града имају почетак и крај на том путу и не постоје две међу њима које се секу више од једном. Делови на које улице и пут деле град називају се квартови. У целом граду уведен је пропис да све улице и пут морају бити једносмерни. Доказати да се бар један кварт може цео обићи (проћи свим деловима улица које га ограничавају) крећући се правилно.

**4.** Нека су $a$, $b$, $c$, $x$, $y$, $z$ позитивни реални бројеви такви да је $a \geqslant b \geqslant c$ и $x \geqslant y \geqslant z$. Доказати неједнакост

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} + \frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)} + \frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

**5.** Кругови $\mathcal{O}_1(O_1, R_1)$ и $\mathcal{O}_2(O_2, R_2)$ $(R_2 > R_1)$ додирују се споља у тачки $M$. На кругу $\mathcal{O}_2$ одабрана је тачка $A$ тако да $A$, $O_1$ и $O_2$ нису колинеарне тачке. Из тачке $A$ повучене су тангенте $AB$ и $AC$ на круг $\mathcal{O}_1$. Праве $MB$ и $MC$ секу круг $\mathcal{O}_2$ опет у тачкама $E$ и $F$, редом. Доказати да су права $EF$, тангента на круг $\mathcal{O}_2$ у тачки $A$ и заједничка тангента кругова $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$ у тачки $M$, конкурентне.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.

12. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ

# МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

први круг – 28.12.2007.

## ТРЕЋИ И ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

**1.** Имамо две посуде, А и Б, запремина $a$ и $b$ литара, редом, славину са водом и одвод за воду. Посуде се могу пунити водом било са славине (до врха), било пресипањем из друге посуде и то тако да се приликом пресипања или посуда у коју се сипа напуни водом до врха или посуда из које се сипа остане празна. Вода из посуде се може празнити у другу посуду или у одвод за воду (при чему се посуда празни). Користећи само ове операције, ако су посуде на почетку биле празне, наћи за које $m$ можемо постићи да се у посуди $B$ након неколико операција нађе тачно $m$ литара воде.

**2.** Одредити све функције $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ такве да за све $x, y \in \mathbb{Q}^+$ важи једнакост

$$f(x) + f(y) + 2xyf(xy) = \frac{f(xy)}{f(x+y)}.$$

**3.** Нека су $a_1$, $a_2, \ldots$, $a_n$ цели бројеви чији је збир 1. Означимо са $N_k$ број позитивних чланова у низу

$$a_k,\ a_k + a_{k+1},\ \ldots,\ a_k + \ldots + a_n + a_1 + \ldots + a_{k-1}.$$

Доказати да су бројеви $N_k$ међусобно различити.

**4.** Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Нека су $P$ и $Q$, редом, тачке на страницама $BC$ и $CD$ тако да важи $\sphericalangle BAP = \sphericalangle DAQ$. Доказати да троуглови $ABP$ и $ADQ$ имају једнаке површине ако и само ако је права која садржи њихове ортоцентре нормална на дијагоналу $AC$.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.