

ПРИПРЕМЕ ЕКИПЕ СРБИЈЕ ЗА ИМО

Београд, 19.06.2008.

ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ГЕОМЕТРИЈЕ

1. Кругови k_1 и k_2 секу се у тачкама A и B . Права p кроз тачку B сече круг k_1 у тачки K , а круг k_2 у тачки M . Тангента круга k_1 паралелна са AM додирује тај круг у тачки Q . Нека је R друга пресечна тачка праве AQ и круга k_2 .
 - (а) Доказати да је тангента круга k_2 у тачки R паралелна са AK .
 - (б) Доказати да су ове две тангенте и права KM конкурентне.
2. Нека су A_1 и B_1 тачке на правој одређеној основицом AB једнакокраког троугла ABC такве да је $\sphericalangle A_1CB_1 = \sphericalangle ABC$. Круг који споља додирује круг описан око троугла A_1B_1C додирује такође и праве CA и CB у тачкама A_2 и B_2 , редом. Доказати да је $A_2B_2 = 2 \cdot AB$.
3. Дат је троугао ABC у ком симетрала унутрашњег и спољашњег угла секу праву BC у тачкама D и E , редом. Нека је F ($F \neq A$) пресечна тачка праве AC са кругом k над пречником DE . Коначно, нека тангента у тачки A на круг описан око троугла ABF сече круг k у тачкама A и G . Доказати да је $AF = AG$.
4. Одредити најмањи позитиван реалан број k који има следеће својство: Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао и нека су A_1 , B_1 , C_1 и D_1 тачке на страницама AB , BC , CD и DA , редом. Нека је S збир најмање две од површина троуглова AA_1D_1 , BB_1A_1 , CC_1B_1 и DD_1C_1 , а S_1 површина троугла $A_1B_1C_1D_1$. Тада важи $kS_1 \geq S$.

Време за рад 270 минута.

Сваки задатак вреди 10 поена.

Сваки задатак писати на засебном папиру.

Желимо вам пуно успеха.