12. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ
МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

први круг – 23.12.2007.

Решења задатака за први разред

1. Доказећмо да број $2^n + n^2$ не може бити дељив са 7. Како је $2^3 \equiv 1 \pmod 7$, то број 2^n може давати остатке 2, 4 и 1 по модулу 7. Како по модулу 7 квадрати могу давати само остатке 0, 1, 2 и 4, то број $2^n + n^2$ никако не може бити дељив са 7, па ни са 105.

2. Дванаест војника се у 3 врсте и 4 колоне може распоредити на 12! начина. Сваки од ових распореда се може довести до правилног ако сви војници који су у истој колони замене места тако да у првој врсти буде најнижи, а у трећој највиши. Како се у једној колони 3 војника могу распоредити на укупно 3! начина, а сваком од ових распореда одговара један правилни, то је тражени број једнак

$$\frac{12!}{6^4} = 369600.$$

3. Нека је $\{A'\} = AO \cap BC$ и $\{D'\} = DO \cap BC$. Из услова задатка је $A'N$ средња линија троугла $DD'C$, а KD' средња линија троугла AA', па је $KD' \parallel AA'$ и $A'N \parallel DD'$. Сада су у троугловима $KD'C$ и BNA' дужи $A'O$ и $D'O$ редом средње линије, па тачка O полови дужи KC и NB. Значи четвороугао $KNCB$ је паралелограм, па је $KB \parallel NC$ и $KN \parallel BC$. Самим тим је и $AB \parallel DC$ и $AD \parallel BC$, па је и четвороугао $ABCD$ паралелограм.

4. Обојимо таблу по дијагоналама у 5 боја. Приметимо да имамо 12 – 12 – 13 – 14 – 13 поља по одговарајућим бојама. Како свака домина покрива највише једно поље сваке боје, то морамо да имамо бар 14 домина. 16 домина не можемо да имамо јер би тада све биле облика 1×4, што је у супротности са претпоставком да се у покривању јављају обе врсте домина. Није тешко видети да се поплочавање може извести са 14 (8: 1×5 и 6: 1×4) и 15 (4: 1×5 и 11: 1×4) домина.
Дакле, одговор је 14 или 15.

5. Нека је O пресек дијагонала. Прво што је потребно доказати је да је $AO = AB$ и $CO = CD$. Ово је могуће урадити на два начина:

Први начин: Нека је $AO > AB$. Тада је $\sphericalangle ABO > \sphericalangle AOB$, па је и $\sphericalangle CDO > \sphericalangle COD$. Међутим тада је и $CO > CD$, што је у контрадикцији са претпоставком $CD + AB = AC$. Слично се доказује и да је случај $AO < AB$ немогућ.

Други начин: Изаберимо на продужетку CD преко D тачку E тако да је $DE = AB$. Тада је четвороугао $EDBA$ паралелограм, а према услову задатка EAC једнакокрак. Самим тим $\sphericalangle AED = \sphericalangle ABD$ и $\sphericalangle AED = \sphericalangle EAC$, па како је $\sphericalangle EAC = \sphericalangle ACD + \sphericalangle DAB = \sphericalangle AOB$, то је $\triangle ABO$ заиста једнакокрак.

Како је B' симетрична тачки B у односу на праву AM, то је $AB' = AB$, па су према претходном тачке B, O и B' на кругу са центром у A. Такође, из исте симетрије, права AM дели BB' на пола и самим тим она је средња линија у троуглу $B'CB$. Сада како је $BB' \perp AM$ то је $\sphericalangle BB'C = 90^\circ$. Даље, како је $\sphericalangle OB'B = \frac{1}{2}\sphericalangle OAB$, то је $\sphericalangle OB'C = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle OAB$ и како је DOC једнакокрак, то је и $\sphericalangle ODC = 90^\circ - \sphericalangle OAB$, па је самим тим $DB'OC$ тетиван. Из тетивности је $\sphericalangle DB'C = \sphericalangle DOC = \sphericalangle ABD$, што је и требало доказати.

12. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНТЕРНО ТАКМИЧЕЊЕ
МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

први круг – 23.12.2007.

Решења задатака за други разред

1. Нека је n остатак при дељењу броја y са x, тј. $y = kx + n$ и $0 \leqslant n \leqslant x-1$. Како $2^x - 1 \mid 2^{kx} - 1$, то и $2^x - 1 \mid 2^{kx+n} - 2^n$, па одузимањем од $2^x - 1 \mid 2^{kx+n} - 1$ добијамо

$$2^x - 1 \mid 2^n + 2.$$

Самим тим је $2^x - 1 \leqslant 2^n + 2 \leqslant 2^{x-1} + 2$, односно $2^{x-1} \leqslant 3$. Значи $x = 1$ или $x = 2$.
Јасно је да за свако $n \in \mathbb{N}$ пар $(1, n)$ решење. За $x = 2$ имамо $3 \mid 2^y + 1$, па су у овом случају решења $(2, 2n-1)$ за $n \in \mathbb{N}$.

2. Нека симетрала угла $\sphericalangle ABC$ сече DE у тачки T. Доказаћемо да тачка T припада правој KL. Ако је $AB = BC$, тада $T \equiv K \in KL$. Можемо претпоставити да је $AB < BC$, јер је у супротном доказ аналоган. Приметимо да се центар уписаног круга I налази између тачака B и T, и такође да је $T \neq E$. Како је $ID = IE$ и $\sphericalangle DIE = 180^\circ - \gamma$, то је $\sphericalangle BDT = 90^\circ + \dfrac{\gamma}{2}$, па из $\triangle BDT$ закључујемо да је $\sphericalangle ITD = \dfrac{\alpha}{2}$. Како је и $\sphericalangle IAE = \dfrac{\alpha}{2}$, то је четвороугао $AITE$ тетиван. Одавде је $\sphericalangle ATB = \sphericalangle AEI = 90^\circ$. Како је L средиште хипотенузе AB правоуглог троугла ATB, то је L и центар описаног круга тог троугла, па важе једнакости $\sphericalangle LTB = \sphericalangle LBT = \sphericalangle TBC$, одакле је $LT \| BC$ и $T \in KL$, чиме је доказ завршен.

3. Доказ ћемо извести индукцијом по броју квартова у граду.
Ако је тај број једнак 1 , тврђење тривијално следи, јер град (једини кварт) можемо обићи кружним путем.
Претпоставимо да тврђење важи за све градове описане у задатку са мање од n квартова, и да је задат такав град са n квартова. Посматрајмо произвољну улицу тог града. Она дели град на два дела и један од њих има исту структуру као град описан у задатку. Како он има мање од n квартова, по индуктивној хипотези један од његових квартова може се обићи крећући се правилно.

4. На основу Леме о пермутацијама из $b \geqslant c$ и $y \geqslant z$ имамо $by + cz \geqslant bz + cy$. Слично закључујемо да је и $cz + ax \geqslant cx + az$ и $ax + by \geqslant ay + bx$, па је

$$\sum_{\text{sym}} \frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} \geqslant \sum_{\text{sym}} \frac{a^2x^2}{(by+cz)^2} = D.$$

Даље, како је $ax \geqslant by \geqslant cz$ и $\dfrac{1}{by+cz} \geqslant \dfrac{1}{ax+cz} \geqslant \dfrac{1}{ax+by}$, то је на основу Чебишевљеве неједнакости

$$D \geqslant \frac{1}{3} \cdot (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) \left(\frac{1}{(by+cz)^2} + \frac{1}{(ax+cz)^2} + \frac{1}{(ax+by)^2} \right) = D',$$

па на основу А-Х неједнакости важи

$$D' \geqslant \frac{a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2}{(by+cz)^2 + (ax+cz)^2 + (ax+by)^2}.$$

Тражена неједнакост сада следи из А-К неједнакости

$$(by+cz)^2 \leqslant 2(b^2y^2+c^2z^2), \ (ax+cz)^2 \leqslant 2(a^2x^2+c^2z^2), \ (ax+by)^2 \leqslant 2(a^2x^2+b^2y^2).$$

Јасно је да једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$ и $x = y = z$.

5. Нека је p заједничка тангента тих кругова у тачки M, а D тачка пресека праве EF и тангенте на круг $\mathcal{O}_2$ у тачки A. Како су CA и Mp тангенте на круг $\mathcal{O}_1$ у тачкама C и M, имамо $\sphericalangle FCA = \sphericalangle CMp$. Међутим, $\sphericalangle CMp = \sphericalangle FMP$ и $\sphericalangle FMP = \sphericalangle FAM$, па је $\sphericalangle FCA = \sphericalangle FAM$. У троугловима MFA и AFC важи $\sphericalangle MFA = \sphericalangle AFC$ и $\sphericalangle FAM = \sphericalangle FCA$, па су они слични. Одатле је $\dfrac{FM}{FA} = \dfrac{FA}{FC}$, тј. $FM \cdot FC = FA^2$. Међутим, $FM \cdot FC = FO_1^2 - R_1^2$, као потенција тачке F у односу на круг $\mathcal{O}_1$, па је $FO_1^2 - FA^2 = R_1^2$. Аналогно је $EO_1^2 - EA^2 = R_1^2$. Дакле,

$$FO_1^2 - FA^2 = EO_1^2 - EA^2,$$

па је $AO_1 \perp FE$. Како је D на правој EF,то је и $DO_1^2 - DA^2 = FO_1^2 - FA^2 = R_1^2$, па је $DO_1^2 - R_1^2 = DA^2$. Такође, DA је тангента на круг $\mathcal{O}_2$ у A, па је $DA^2 = DO_2^2 - R_2^2$, као потенција тачке D у односу на $\mathcal{O}_2$. Према томе, добили смо да важи

$$DO_1^2 - R_1^2 = DO_2^2 - R_2^2,$$

па тачка D има једнаку потенцију у односу на кругове $\mathcal{O}_1$ и $\mathcal{O}_2$, тј. лежи на њиховој радикалној оси.

12. ТРАДИЦИОНАЛНО ИНЕТРНО ТАКМИЧЕЊЕ
МАТЕМАТИЧКЕ ГИМНАЗИЈЕ

први круг – 28.12.2007.

Решења задатака за трећи и четврти разред

1. Неко је НЗД$(a,b)=d$. Доказаћемо да се могу добити све вредности m такве да $d \mid m$ и $m \le b$.
Јасно је да је број литара у посудама увек дељив са d. Остаје још да докажемо да је могуће добити свако m дељиво са d. Без умањења општости можемо претпоставити да је $d=1$, јер посуде можемо „смањити" d пута. У овом случају постоји k тако да је $ka \equiv m \pmod d$, па се m литара у посуди Б можемо добити сипањем k пута све течности из посуде А у посуду Б, уз евентуално пражњење посуде Б кад се она напуни до врха. Овим је доказ у потпуности завршен.

2. Одредимо $f(1)=a$. Уколико ставимо $y=1$ добијамо

$$f(x+1)=\frac{f(x)}{(1+2x)f(x)+a}, \tag{1}$$

па је редом $f(2)=\dfrac{1}{4}$, $f(3)=\dfrac{1}{5+4a}$ и $f(4)=\dfrac{1}{7+5a+4a^2}$. Са друге стране за $x=y=2$ добијамо

$$2f(2)+8f(4)=1,$$

па заменом вредности за $f(2)$ и $f(4)$, преко a, добијамо $a=1$.
Одредимо и $f(n)$ и то тако што ћемо из формуле (1) извести формулу за $f(x+n)$. Наиме, важи

$$f(x+n)=\frac{f(x)}{(n^2+2nx)f(x)+1}, \tag{2}$$

што доказујемо индукцијом. Из последње једнакости је $f(n+1)=\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Следеће што је потребно одредити је $f\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Из дате једнакости за $x=n$ и $y=\dfrac{1}{n}$, уз коришћење једнакости (2) добијамо

$$f(n)+f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{f(n+1/n)}=n^2+1+\frac{1}{f(1/n)}.$$

Заменом $f(n)$, после сређивања добијамо $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=n^2$.

Коначно за $x = m$ и $y = \dfrac{1}{n}$ из дате једнакости и једнакости (2) добијамо

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{n^2}{m^2}.$$

Провера показује да функција $f(r) = \dfrac{1}{r^2}$, за $r \in \mathbb{Q}^+$, задовољава услове задатка.

3. Распоредимо бројева $a_1, a_2, \dots, a_n$ тим редом на кружницу. Нека је A_k тачка која одговара броју a_k. Казаћемо да A_k мајорира A_j ако је сума бројева од a_k до a_{j-1} у смеру кретања казаљке на сату позитивна. Приметимо да је N_k управо број тачака које A_k мајорира.

Докажимо да ако A_k мајорира A_j и A_j мајорира A_i, да A_k мајорира A_i. Наиме, ако су на кругу редом A_k, па A_j, па A_i ствар је тривијална. У супротном ако су на кругу A_k, па A_i, па A_j, тада је сума од a_k до a_{i-1} једнака збиру сума од a_k до a_{j-1} и од a_j до a_{i-1} минус 1 (сума свих), а ово је барем $1+1-1=1$. Такође, имамо да или A_k мајорира A_j или A_j мајорира A_k (збир суме од a_k до a_{j-1} и од a_j до a_{k-1} је 1, па је барем једна од њих позитивна).

Кад смо ово закључили можемо приметити да важи: ако A_k мајорира A_j, онда и $N_k > N_j$. Наиме, све тачке које A_j мајорира, мајорира и A_k и још A_k мајорира A_j. Самим тим, из другог закључка који смо извели, за све $k \neq j$ је или $N_k > N_j$ или $N_j > N_k$, па су сви бројеви N_k заиста различити.

4. Нека је $\sphericalangle BAP = \sphericalangle DAQ = \alpha$, и нека су A_1 и P_1, односно A_2 и Q_2 подножја висина из темена A и P у троуглу ABP, односно из A и Q у троуглу ADQ, редом. Означимо са H' и H'' ортоцентре поменутих троуглова DAQ и PAB.
Претпоставимо да је $H'H'' \perp AC$, и нека је $\{H\} = H'H'' \cap AC$. Четвороуглови $HH''A_1C$ и $HH'A_2C$ су тетивни, па имамо

$$AH'' \cdot AA_1 = AH \cdot AC = AH' \cdot A_2C.$$

Такође, $DQ_2H'A_2$ и $BA_1H''P_1$ су тетивни, па је $AA_2 \cdot AH' = AD \cdot AQ_2$ и $AP_1 \cdot AB = AA_1 \cdot AH''$, што заједно са претходним једнакостима даје $AQ_1 \cdot AD = AP_1 \cdot AB$. Како је $AP_1 = AP\cos\alpha$ и $AQ = AQ_2\cos\alpha$, добијамо $AD \cdot AQ = AP \cdot AB$, па је и $\dfrac{1}{2}AD \cdot AQ \sin\alpha = \dfrac{1}{2}AP \cdot AB \sin\alpha$, тј. $S_{\triangle ADQ} = S_{\triangle ABP}$. Према томе, $H'H'' \perp AC$ повлачи $S_{\triangle ADQ} = S_{\triangle ABP}$.
Обрнуто, ако је $S_{\triangle ADQ} = S_{\triangle ABP}$, добијамо $AH' \cdot AA_2 = AH'' \cdot AA_1$. Нека су G и I, редом, подножја нормала из H'' и H' на AC. На основу претходног имамо

$$AI \cdot AC = AH' \cdot AA_2 = AH'' \cdot AA_1 = AG \cdot AC,$$

па је $G \equiv I$ и $H'H'' \perp AC$, чиме је доказ завршен.