Školsko takmičenje iz matematike
I i II razred

29. decembar 2007. godine
Gimnazija "Svetozar Marković" Niš

1. Izvršena je particija kvadrata $ABCD$ na disjunktne pravougaonike. Ako je zbir površina opisanih krugova oko svih pravougaonika jednaka površini opisanog kruga oko kvadrata $ABCD$, dokazati da svi pravougaonici moraju biti kvadrati.

2. Neka je $P(x)$ polinom sa pozitivnim celim koeficijentima stepena većeg ili jednakog 1. Naći sve prirodne brojeve n, tako da $P(n)$ deli $P(P(n)+1)$.

3. U hodniku se nalazi n ugašenih sijalica, numerisanih brojevima od 1 do n. Svaki od n učenika redom prolazi hodnikom i menja stanje sijalica na sledeći način: k-ti učenik pritiska prekidač za sijalice koje su označene rednim brojem koji je deljiv sa k (ako je sijalica bila upaljena - ona se gasi; ukoliko je bila ugašena - pali se). Odrediti broj upaljenih sijalica nakon prolaska poslednjeg učenika.

4. U trouglu $\triangle ABC$ simetrala ugla $\measuredangle BAC$ seče stranicu BC u tački D. Neka je ω krug koji sadrži tačku A i dodiruju BC u tački D. Tačka M je presek kruga ω sa stranicom AC. Neka je P druga presečna tačka duži BM sa krugom ω. Dokazati da P leži na težisnoj duži trougla $\triangle ABD$.

5. Odrediti sve parove prirodnih brojeva (m,n), tako da važi:

$$n^4(n+1) = 7^m - 1.$$

Vreme za rad 240 minuta
Svaki zadatak vredi 20 poena

Školsko takmičenje iz matematike

III i IV razred

29. decembar 2007. godine
Gimnazija "Svetozar Marković" Niš

1. Odrediti sve prirodne brojeve n, tako da je broj $f(n)$ racionalan:

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos \frac{k\pi}{2n+1}.$$

2. Svaki prirodan broj od 1 do 2007 je obojen jednom od tri boje. Dokazati da postoje dva različita broja x i y koji su obojeni istom bojom tako da je $|x-y|$ potpun kvadrat.

3. Upisani krug ω u trougao $\triangle ABC$ dodiruju stranice BC, AC, AB u tačkama A', B', C' redom. Neka je D dijamatralno suprotna tački C' na upisanom krugu ω, a tačka E je presek pravih $B'C'$ i $A'D$. Dokazati da je $CE = CA' = CB'$.

4. Dokazati da za svake pozitivne realne brojeve a, b, c, d važi:

$$\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{cd} \leq \sqrt[3]{(a+c+b)(a+c+d)}.$$

5. Neka su a i b prirodni brojevi tako da su $2a+1$ i $2b+1$ uzajamno prosti. Odrediti sve moguće proste brojeve p koji istovremeno dele brojeve $2^{2a+1} + 2^{a+1} + 1$ i $2^{2b+1} + 2^{b+1} + 1$.

Vreme za rad 240 minuta
Svaki zadatak vredi 20 poena