ПРОБНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА БМО

Београд, 19.04.2007.

1. Правоугаоник $\mathcal{P}$ издељен је на мање правоугаонике са страницама паралеленим страницама правоугаоника $\mathcal{P}$. Тачку називамо *раскршће* уколико је она теме четири правоугаоника поделе. Дуж поделе називамо *максимална* уколико не постоји нити једна друга дуж поделе која је садржи (дуж поделе је свака дуж састављена од ивица правоугаоника поделе и $\mathcal{P}$). Уколико је R број *раскршћа*, M број *максималних* дужи поделе и P број правоугаоника поделе, доказати да важи једнакост

$$R + M = P + 3.$$

2. Симетрале унутрашњих углова код темена A, B и C троугла ABC секу наспрамне странице у тачкама A_1, B_1 и C_1. Уколико је $AA_1B_1C_1$ тетиван четвороугао, доказати да је

$$\frac{BC}{AB + AC} = \frac{AB}{AC + BC} + \frac{AC}{AB + BC}$$

3. Одредити све парове (m, n) узајамно простих природних бројева такве да једначина

$$(x + m)^3 = nx$$

има три различита цела решења.

4. Нека су x_1, $x_2, \ldots, x_n$ реални бројеви такви да је $1 \geqslant x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 0$ и $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$. Уколико је $\left\lceil \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \right\rceil = m$ доказати да је $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_i \geqslant 1$.
(са $\lceil x \rceil$ означен је најмањи цео број не мањи од x)

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.