11. традиционално интерно такмичење ученика Математичке гимназије

први круг – 24.12.2006.

Први разред

1. Укротитељ изводи 5 лавова и 4 тигра. На колико начина их може распоредити у врсту ако тигрови не смеју бити један поред другог? Претпоставља се да су сви тигрови и сви лавови међусобно различити.

2. На основици BC и крацима AB и AC једнакокраког троугла ABC дате су тачке P, Q и R такве да је $PQ \parallel AC$ и $PR \parallel AB$. Доказати да тачка симетрична тачки P у односу на праву QR лежи на кругу описаном око троугла ABC.

3. Уколико је за неко $n \in \mathbb{N}$ број $5^n + 3^n + 1$ прост, доказати да је број n дељив са 12.

4. За тачку P у унутрашњости једнакостраничног троугла ABC важи да је $PA = 5$, $PB = 12$ и $PC = 13$. Одредити колика је вредност $\sphericalangle APB$.

5. Нека су a, b, c, d природни бројеви такви да је

$$a^2 + b^2 + ab = c^2 + d^2 + cd.$$

Доказати да је $a + b + c + d$ сложен број.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.

11. традиционално интерно такмичење ученика Математичке гимназије

први круг – 28.12.2006.

Други разред

1. Природан број n може се представити као сума k својих различитих делитеља. Доказати да n не може бити узајамно прост са $(k-1)!$.

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2006} = 2006$$

$$x_1^4 + x_2^4 + \ldots + x_{2006}^4 = x_1 + x_2 + \ldots + x_{2006}.$$

3. Кружнице k_1 и k_2 са центрима у O_1 и O_2 секу се у тачкама A и B. Права O_1B сече k_2 у тачки F, а права O_2B сече k_1 у тачки E. Уколико права кроз B паралелна са EF сече кружнице k_1 и k_2 у тачкама M и N, доказати да је $MN = AE + AF$.

4. Да ли је могуће распоредити бројеве од 1 до 25 на кружницу тако да сума сваких пет узастопних даје остатак 1 или 4 по модулу 5?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.

11. традиционално интерно такмичење ученика Математичке гимназије

први круг – 28.12.2006.

Трећи и четврти разред

1. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$, где је $n \geqslant 2$, позитивни реални бројеви.

(а) Доказати да важи неједнакост

$$\frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2a_3} + \frac{a_2^2}{a_2^2 + a_3a_4} + \ldots + \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}^2 + a_na_1} + \frac{a_n^2}{a_n^2 + a_1a_2} \leqslant n - 1.$$

(б) Да ли се $n - 1$ може заменити неким мањим бројем?

2. Тачке M и N су средишта страница CD и DE конвексног петоугла $ABCDE$ код кога је $BC \parallel AD$ и $BD \parallel AE$. Ако је O пресечна тачка дужи BN и AM, доказати да четвороугао $MDNO$ и троугао ABO имају једнаке површине.

3. Нека је S шаховска табла састављена из оних јединичних квадрата чија темена имају целобројне координате у координатној равни, и који се налазе цели унутар круга полупречника 2006 са центром у координатном почетку. У свако поље S уписујемо $+1$. Под једним „потезом” подразумевамо промену знака свим бројевима неке врсте, колоне или дијагонале S. Можемо ли овако да завршимо са тачно једним квадратом у коме пише -1?

4. Нека је m природан број. Дефинишимо низ $\{a_n\}_{n \geqslant 0}$ са $a_0 = 0$, $a_1 = m$ и $a_{n+1} = m^2 a_n - a_{n-1}$ за $n \geqslant 1$. Доказати да је пар (a, b) ненегативних целих бројева, где је $a \leqslant b$, решење једначине

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = m^2$$

ако и само ако је пар (a, b) једнак пару (a_n, a_{n+1}) за неко $n \geqslant 0$.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.