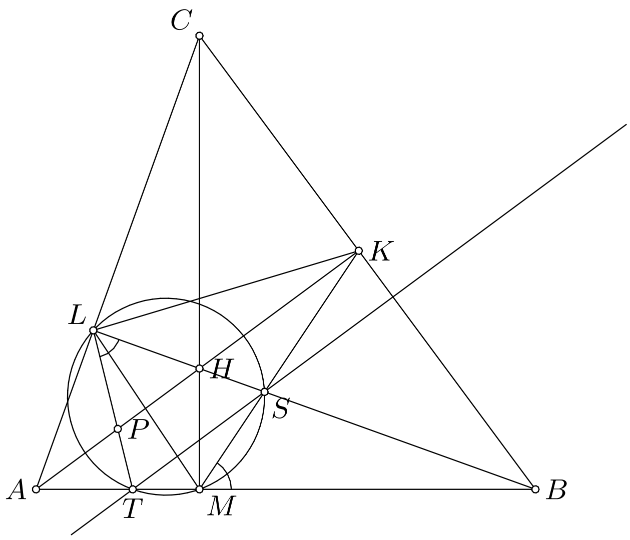
11. традиционално интерно такмичење ученика Математичке гимназије

други круг – 18.03.2007.

Решења задатака за први разред

1. Приметимо прво да је $\sphericalangle AHL = \sphericalangle KMB = \sphericalangle LMA = \sphericalangle ACB$. Како је LP тежишна дуж која одговара хипотенузи правоуглог троугла ALH, то је и $\sphericalangle PLH = \sphericalangle PHL$, па је четвороугао $LSMT$ тетиван. Сада је $\sphericalangle LST = \sphericalangle LMT = \sphericalangle AHL$, тј. праве HK и TS су паралелне. Како је $HK \perp BC$, то је и $TS \perp BC$.



2. Како је $1 - x - y + xy = (1-x)(1-y) \geqslant 0$ то је и

$$1 + x + y + xy = (x+1)(y+1) \geqslant 2(x+y).$$

Слично добијамо и неједнакости

$$(y+1)(z+1) \geqslant 2(y+z), \quad (z+1)(x+1) \geqslant 2(z+x).$$

Множењем ове три неједнакости и кореновањем добијамо тражену неједнакост.
Једнакост важи ако и само ако је $x = y = z = 1$.

3. Разликујемо два случаја:

(1) Координатни почетак је означен. Разбијмо преостале 24 тачке скупа $S \times S$ на 12 парова централно симетричних тачака (центар симетрије је координатни почетак). Како је означених тачака више од 13 у једном од ових парова су обе тачке означене. Те две тачке и координатни почетак су три тражене тачке.

(2) Координатни почетак није означен. Разбијмо преостале тачке скупа $S \times S$ на 8 тројки код којих је једна средиште преостале две. То можемо учинити на следећи начин :

(1) $((-2,2),(-1,2),(0,2))$; (2) $((-2,1),(-1,1),(0,1))$;
(3) $((-2,0),(-2,-1),(-2,-2))$; (4) $((-1,0),(-1,-1),(-1,-2))$;
(5) $((0,-1),(1,-1),(2,-1))$; (6) $((0,-2),(1,-2),(2,-2))$;
(7) $((1,0),(1,1),(1,2))$; (8) $((2,0),(2,1),(2,2))$;

Како је број означених тачака 17, на основу Дирихлеовог принципа постоји тројка у којој су све тачке означене, а те тачке задовољавају услове задатка.

4. Јасно је да је пар $(n,k)=(2,3)$ решење дате једначине. Докажимо да је то и једино решење.
Можемо претпоставити да је $n>2$. Посматрајмо дату једнакост по модулу 7. Десна страна дате једнакости даје остатке 1,2 и 4, а лева 6,1,1,6,5,0 и 3, по модулу 7, па самим тим обе стране морају давати остатак 1 по модулу 7. Ово је једино могуће уколико је k дељиво са 3, тј. уколико је 2^k потпун куб природног броја. Како је $n^3-5n+10<n^3$, то мора бити

$$n^3-5n+10 \leqslant (n-1)^3 = n^3-3n^2+3n+1,$$

(иначе би се број $n^3-5n+10$ могао сместити између два куба), тј. $3n^2-8n+9 \leqslant 0$. Међутим $3n^2-8n+9 = 3\left(n-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{11}{3} \geqslant \frac{11}{3}$, што доказаује да не постоји решење код кога је $n>2$.

5. Тражени максимум је $\left[\frac{n}{2}\right]$.
Докажимо прво да је ово горња граница тако што ћемо доказати да за пет узастопних темена n-тоугла A,B,C,D,E, не могу оба $ABCD$ и $BCDE$ бити тангентна. Претпоставимо супротно. Тада је

$$AB+CD=BC+AD \quad \text{и} \quad CB+DE=BD+CE,$$

а самим тим и $AB+DE=AD+BE$. Међутим последње је немогуће, јер је $ABDE$ конвексан четвороугао.
Докажимо и да се $\left[\frac{n}{2}\right]$ може остварити. Конструишимо тангентан трапез такав да су му углови на мањој основици $\frac{\pi(n-2)}{n}$. Нека је дужина његове мање основице x, а крака y. За n парно довољно је узети n-тоугао коме су сви углови једнаки а дужине страница редом $x,y,x,y,\ldots$ Уколико је n непаран можемо конструисати $n+1$-тоугао на претходни начин и затим избрисати A_{n+1}, а A_n преместити тако да је $A_{n-2}A_{n-1}A_nA_1$ тангентан, чиме добијамо тачно $\frac{n-1}{2}$ тражених четвороуглова.

11. традиционално интерно такмичење ученика Математичке гимназије

други круг – 18.03.2007.

Решења задатака за други разред

1. Ако заменимо $x = t$, $y = z = 0$, имамо

$$f(t) + f(0) + f(t) \geq 3f(t),$$

односно $f(0) \geq f(t)$. Ако заменимо $x = \frac{t}{2}$, $y = \frac{t}{2}$, $z = -\frac{t}{2}$, имамо

$$f(t) + f(0) + f(0) \geq 3f(0),$$

односно $f(t) \geq f(0)$. Дакле $f(t) = f(0)$ за свако t. Како константна функција задовољава услове задатка, све тражене функције су управо константне функције.

2. Како је троугао ABC једнакокрак, то је $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = \alpha$. Нека је $\sphericalangle ADB = \varphi$. Довољно је доказати да је $\varphi = \alpha$. Применом синусних теорема на троуглове ADB и ADC добијамо

$$\frac{AD}{\sin\alpha} = \frac{BD}{\sin(180^\circ - \varphi - \alpha)} \quad \text{и} \quad \frac{AD}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{AC}{\sin(180^\circ - \varphi)}.$$

Множењем ових једнакости и применом датог услова добијамо

$$\sin\alpha \cdot \sin 2\alpha = \sin\varphi \cdot \sin(\varphi + \alpha).$$

Из формула за трансформацију производа синуса у збир, из дате једнакости добијамо $\sin 3\alpha = \sin(2\varphi + \alpha)$, што је еквивалентно са $3\alpha = 2\varphi + \alpha$ или $3\alpha = 360^\circ - 2\varphi - \alpha$. Међутим друга једнакост не може да важи, јер из ње добијамо $\varphi = 180^\circ - 2\alpha$, тј. $\sphericalangle BAD = \alpha$, што је очигледно немогуће. Значи мора бити $\alpha = \varphi$, што је требало доказати.

3. Показаћемо да је одговор 2007.
Можемо закључујемо да је $n \geq 2007$, јер ако у првој врсти и првој колони обојимо све квадратиће сем оног који се налази у њиховом пресеку, обојили смо 2006 квадратића, а не постоји ниједан правоугли троугао са траженим особинама.
Обрнуто, претпоставимо да је обојено n квадратића тако да не постоји ниједан правоугли троугао са траженим особинама. Докажимо да је

$n \leq 2006$. Назовимо врсту или колону „тешком” ако садржи више од једног обојеног квадратића и „лаком” иначе. Дакле, не постоје тешка врста и тешка колона у чијем пресеку се налази обојени квадратић. Ако нема тешких врста, свака врста садржи највише један обојен квадратић, па их је највише 1004. Сличан закључак изводимо и за колоне. Ако постоје тешка врста и тешка колона, сваки обојени квадратић у тешкој колони, односно врсти, мора лежати у лакој врсти, односно колони. Дакле, број обојених квадратића је не већи од броја лаких врста и колона, који је највише $2(1004-1) = 2006$.

4. Како

$$7^m - p \cdot 2^n \mid 7^m + p \cdot 2^n \quad \text{то} \quad 7^m - p \cdot 2^n \mid 2 \cdot 7^m \text{ и } 7^m - p \cdot 2^n \mid 2^{n+1}p,$$

па самим тим $7^m - p \cdot 2^n$ дели и НЗД$(2 \cdot 7^m, 2^{n+1}p)$. Приметимо да је НЗД$(2 \cdot 7^m, 2^{n+1}p) = 2 \cdot$ НЗД$(7, p)$.

Уколико је $p = 7$ имамо $7^m - p \cdot 2^n = 7 \cdot (7^{m-1} - 2^n)$, па из $7 \cdot (7^{m-1} - 2^n) \mid 14$, закључујемо да је $7^{m-1} - 2^n = 1$. Међутим како је $7^{m-1} \equiv_3 1$, то последња једначина нема решења.

Значи можемо претпоставити да је $p \neq 7$. Тада $7^m - p \cdot 2^n \mid 2$, па самим тим $7^m - 1 = p \cdot 2^n$. Уколико је $m = 1$ добијамо $A = 13$, што задовољава услове задатке. Претпоставимо зато да је $m > 1$. Како је

$$7^m - 1 = (7-1)(7^{m-1} + 7^{m-2} + \ldots + 1),$$

то p мора бити једнако 3 и $7^{m-1} + \ldots + 7 + 1 = 2^{n-1}$. Посматрањем последње једнакости по модулу 2 видимо да је m паран, тј. $m = 2k$. Међутим тада је $7^m - 1 = 49^k - 1$, па на исти начин као и претходној једнакости доказујемо да је k паран или $k = 1$, тј. $A = 97$. Међутим тада је

$$49^k - 1 = (50-1)^k - 1 \equiv 0 \text{ (мод 5)},$$

што је очигледна контрадикција.

Значи једине могуће целобројне вредности за A су 13 и 97, које су прости бројеви.

5. Користићемо оријентисане углове.

Хомотетија са центром у N која слика k_2 у k_1, слика и праву BC у праву l тангентну на лук BC који не садржи тачку N. Због паралелности l са BC тачка поменутог додира мора бити тачка P лука BC. На основу особина хомотетије тачке N, M, P су колинеарне, па је $\sphericalangle MPB = \sphericalangle NPB$. Слично је и $\sphericalangle BQK = \sphericalangle BQN$. Како су четвороуглови BB_1MP и BB_1KQ тетивни, имамо да је

$$\sphericalangle BB_1M + \sphericalangle KB_1B = \sphericalangle BPM + \sphericalangle KQB = \sphericalangle BPN + \sphericalangle NQB = \pi,$$

те тачка B_1 лежи на правој KM. Следи да је

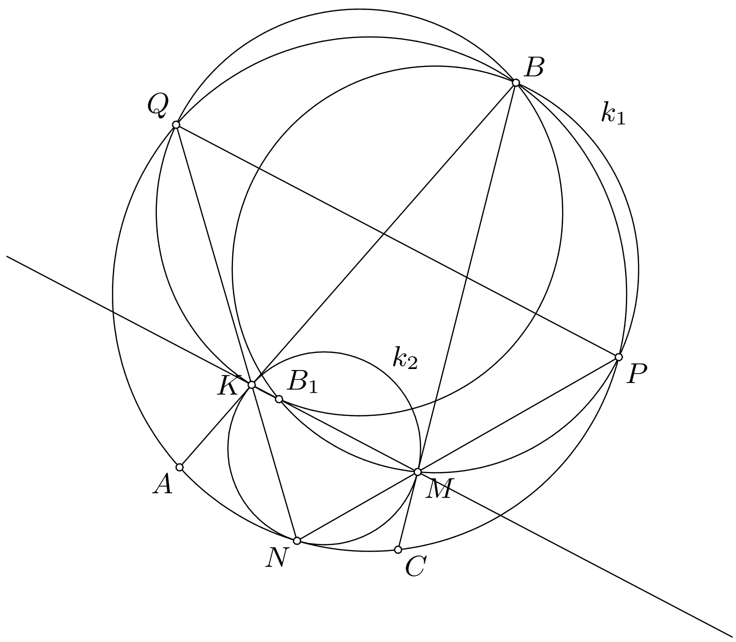
$$\sphericalangle BQB_1 = \sphericalangle BKB_1 = \sphericalangle BKM.$$

Како је BK тангента круга k_2 то је

$$\sphericalangle BKM = \sphericalangle KNM = \sphericalangle QNP = \sphericalangle QBP.$$

Значи $\sphericalangle BQB_1 = \sphericalangle QBP$, одакле следи да су праве BP и QB_1 паралелне. Слично се доказује и да су праве BQ и PB_1 паралелне. Овим је доказ завршен.

Напомена. Задатак се на исти начин може решити и коришћењем неоријентисаних углова.



11. традиционално интерно такмичење ученика Математичке гимназије

други круг – 21.03.2007.

Решења задатака за трећи и четврти разред

1. Како је $p \in A$, то морају постојати природни бројеви x и y такви да је

$$p^2 = x^2 + 2y^2.$$

Очито је $p > 2$, па је p непаран. Зато и x мора бити непарно, y парно (јер би иначе p^2 било конгруентно са 3 по модулу 8) и $(x, y) = 1$. Бројеви $\dfrac{p-x}{2}$ и $\dfrac{p+x}{2}$ су узајамно прости, јер им је збир прост број. Уколико запишемо $y = 2y_1$, из дате једначине добијамо

$$\frac{p-x}{2} \cdot \frac{p+x}{2} = 2y_1^2,$$

што значи да је

$$\frac{p-x}{2} = 2s^2, \quad \frac{p+x}{2} = t^2$$

или

$$\frac{p+x}{2} = 2s^2, \quad \frac{p-x}{2} = t^2.$$

У оба случаја је $p = 2s^2 + t^2$, тј. $p \in A$.

2. Приметимо да је

$$\frac{2a^3}{a^2+b^2} = 2a - \frac{2ab^2}{a^2+b^2}.$$

Како је по АГ неједнакости $\dfrac{2ab^2}{a^2+b^2} \leqslant \dfrac{2ab^2}{2ab} = b$ то је

$$\frac{2a^3}{a^2+b^2} + \frac{2b^3}{b^2+c^2} + \frac{2c^3}{c^2+a^2} \geqslant 2a - b + 2b - c + 2c - a = a + b + c.$$

Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$.

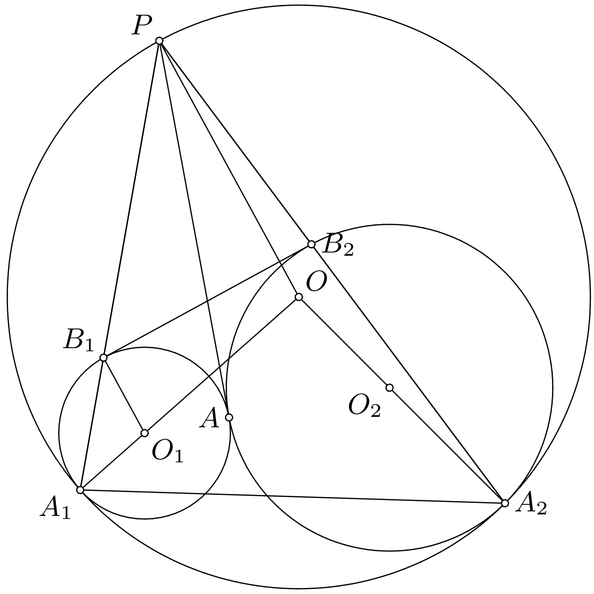
3. Означимо центре кругова k, k_1, k_2 са O, O_1 и O_2 редом. Из потенције тачке P у односу на круг k_1 добијамо $PB_1 \cdot PA_1 = PA^2$, а из потенције тачке P у односу на круг k_2, $PB_2 \cdot PA_2 = PA^2$. Самим тим имамо

$$\frac{PB_1}{PB_2} = \frac{PA_2}{PA_1},$$

па су троуглови PB_1B_2 и PA_2A_1 слични. Зато је $\sphericalangle B_2B_1P = \sphericalangle A_1A_2P$. Како је $\sphericalangle A_1O_1B_1 = \sphericalangle A_1OP = 2\sphericalangle A_1A_2P$, то је

$$\sphericalangle O_1B_1B_2 = 180^\circ - \sphericalangle B_2B_1P - \sphericalangle O_1B_1A_1 = 90^\circ,$$

што је и требало доказати.



4. Претпоставимо да је одговор позитиван, и да је без смањења општости бар половина колона претежно црвено обојена; притом претпостављамо да су колоне тако сортиране да је то баш лева половина. У тој половини морамо имати мање од 1/8 укупне површине таблице обојено у бело, па зато оних врста које садрже 1/4 белих поља у левој половини има мање од пола. Све остале врсте (дакле више од пола) садрже више од 1/4 црвених поља, што их по услову задатка чини преовлађујуће црвеним. Свака од тих преовлађујуће црвених врста садржи више од 1/4 црних поља у десној половини таблице, што чини више од 1/8 површине целе таблице. Међутим, у левој половини је бар 3/8 површине таблице црвено, па је површина црвеног дела таблице већа од 1/2. Овим добијамо контрадикцију, те тражено бојење није могуће.

5. Рачунањем првих неколико чланова низа добијамо

$$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_3 = 5,\ a_4 = 7,\ a_5 = 9,\ a_6 = 11,\ a_7 = 13.$$

Дакле за сваки прост број $p \leq 13$ постоји члан дељив са p. Докажимо сада да их има бесконачно. Претпоставимо супротно, тј. да их за неко $p \leqslant 13$ има коначно и нека је a_k онај са највећим индексом. Из рекурентне једначине добијамо

$$a_{3k} = a_{3k-1} + a_k,$$

$$a_{3k+1} = a_{3k} + a_k,$$

$$a_{3k+2} = a_{3k+1} + a_k,$$

па су бројеви $a_{3k-1}, a_{3k}, a_{3k+1}, a_{3k+2}$ конгруентни неком d по модулу p. Претпоставимо да нису дељиви са p јер би у супротном контрадикција са претпоставком већ била добијена. Даље имамо да је

$$a_{9k-3} = a_{9k-4} + a_{3k-1},$$

$$a_{9k-2} = a_{9k-3} + a_{3k-1},$$

$$\vdots$$

$$a_{9k+8} = a_{9k+7} + a_{3k+2}.$$

Дакле, добили смо да бројеви $a_{9k-4}, a_{9k-3}, ..., a_{9k+8}$ по модулу p чине аритметичку прогресију са кораком d који није дељив са p. Како ових бројева има баш 13, то за сваки прост број $p \leq 13$, међу њима постоји број дељив са p, што опет доводи до контрадикције. Овим је доказ у потпуности завршен.