Пробно такмичење пред ММО

Вршац, 16. јул 2007.

1. Наћи све тројке природних бројева (a, b, c) такве да су бројеви a^2+1 и b^2+1 прости и $(a^2+1)(b^2+1) = c^2+1$.

2. Нека је AD симетрала угла BAC троугла ABC у коме је $AC < AB$. Наћи потребан и довољан услов који треба да задовољавају углови троугла ABC да би постојале тачке E и F на страницама AB и AC редом, такве да је $BE = CF$ и $\angle BDE = \angle CDF$. Ако E и F постоје, изразити BE у функцији дужина страница троугла ABC.

3. У конвексном n-тоуглу $(n > 3)$ је нацртано $n-3$ дијагонала од којих се никоје две не секу, тако да из сваког темена n-тоугла полази паран број (може и нула) дијагонала. Доказати да је n дељиво са 3.

4. Реални бројеви $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ задовољавају једнакости $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 = y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2 = 1$. Доказати да је

$$(x_1y_2 - x_2y_1)^2 \le 2\left|1 - \sum_{k=1}^{n} x_ky_k\right|.$$

Када важи једнакост?

Време за рад: 270 минута.

Сваки задатак вреди 10 поена.

Желимо вам пуно успеха.