11. традиционално интерно такмичење ученика Математичке гимназије

други круг – 18.03.2007.

Први разред

1. Нека су AK, BL, CM висине троугла ABC, а H његов ортоцентар. Тачка P је средиште дужи AH. Уколико је пресек правих BH и MK тачка S, а пресек правих LP и AM тачка T, доказати да је TS нормално на BC.

2. Доказати да за реалне бројеве $x, y, z \in [0,1]$ важи неједнакост

$$(x+1)(y+1)(z+1) \geqslant \sqrt{8(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

3. Нека је $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и нека је у Декартовом координатном систему на произвољан начин означено 17 тачака из скупа $S \times S$. Доказати да међу обојеним тачкама постоје три такве да је једна од њих средиште дужи одређене са преостале две.

4. Одредити све парове (n, k) природних бројева који су решења једначине

$$n^3 - 5n + 10 = 2^k.$$

5. Нека је $n \geqslant 5$ природан број. Одредити највећи број k (у функцији од n) такав да постоји конвексан n-тоугао код којег је тачно k четвороуглова $A_iA_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ тангентно. (Узима се да је $A_{n+j} = A_j$.)

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.

11. традиционално интерно такмичење ученика Математичке гимназије

други круг – 18.03.2007.

Други разред

1. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ које задовољавају неједнакост

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \geq 3f(x+2y+3z)$$

за све $x, y, z \in \mathbb{R}$.

2. На страници BC једнакокраког троугла ABC ($AC = BC$) дата је тачка $D \neq C$ таква да је

$$AD^2 = BD \cdot BC.$$

Доказати да је $AD = AB$.

3. Дата је таблица димензија 1004×1004. Наћи најмањи природан број n такав да се за свако бојење n поља таблице могу наћи 3 обојена поља чији центри чине правоугли троугао са катетама паралелним ивицама таблице.

4. Нека су m и n природни бројеви, а p прост број. Уколико је

$$A = \frac{7^m + p \cdot 2^n}{7^m - p \cdot 2^n}$$

природан број, доказати да је онда он прост.

5. Кругови k_1 и k_2 се додирују изнутра у тачки N, при чему k_1 има већи полупречник. Тетиве BA и BC круга k_1 припадају тангентама круга k_2 у тачкама K и M редом. Нека су Q и P средишта оних лукова AB и BC који не садрже тачку N. Уколико се кругови описани око троуглова BQK и BPM секу у тачкама B и B_1, доказати да је четвроугао BPB_1Q паралелограм.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.

11. традиционално интерно такмичење ученика Математичке гимназије

други круг – 21.03.2007.

Трећи и четврти разред

1. Нека је $A = \{\, x^2 + 2y^2 \,|\, x, y \in \mathbb{N}\}$ и p прост број. Уколико је $p^2 \in A$, доказати да је и $p \in A$.

2. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви. Доказати неједнакост

$$\frac{2a^3}{a^2+b^2} + \frac{2b^3}{b^2+c^2} + \frac{2c^3}{c^2+a^2} \geq a + b + c.$$

3. Кружнице k_1 и k_2 додирују се споља у тачки A и додирују кружницу k изнутра у тачкама A_1 и A_2 редом. Нека је P тачка пресека кружнице k са заједничком тангентом кружница k_1 и k_2 у тачки A. Права PA_1 поново сече кружницу k_1 у B_1, а права PA_2 поново сече кружницу k_2 у B_2. Доказати да је права B_1B_2 заједничка тангента кружница k_1 и k_2.

4. Могу ли се поља правоугаоне таблице обојити у црвено и бело тако да је у целој таблици исти број црвених и белих поља, а у свакој врсти и колони поља обојена у једну од боја чине више од $\dfrac{3}{4}$ поља у њој?

5. Низ $\{a_n\}$ дефинисан је са $a_0 = 1$ и

$$a_n = a_{n-1} + a_{[n/3]} \quad \text{за } n \geqslant 1.$$

Доказати да за сваки прост број $p \leqslant 13$ постоји бесконачно много чланова датог низа који су дељиви са p.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Сваки задатак писати на засебном папиру.
Желимо вам пуно успеха.