

Školsko takmičenje iz matematike

I i II razred

18. januar 2006. godine
Gimnazija "Svetozar Marković" Niš

1. Dokazati da ne postoje funkcije $f(x)$ i $g(y)$, tako da za proizvoljne realne brojeve $x, y \in R$ važi:

$$x^2 + xy + y^2 = f(x) + g(y)$$

2. Košarkaš Pedja Stojaković šutira slobodna bacanja i vodi statistiku $s(n)$ - broj pogodaka u prvih n bacanja. Na početku sezone $s(n)$ je bio manji od 80 procenata od n , a na All Star meču je bio veći od 80 procenata od n . Da li je postojao trenutak kada je $s(n)$ bio jednak 80 procenata n ?

3. Neka su k i k' dve koncentricne kružnice sa centrom u O i odgovarajućim poluprečnicima $R < R'$. Prava kroz O seče krugove k i k' u tačkama A i B redom, tako da je O izmedju tačaka A i B . Poluprava sa početkom u O , različita od prethodne prave, seče krugove k i k' u tačkama E i F redom. Dokazati da se opisani krugovi oko trouglova OEA i OBF , i krugovi sa prečnicima AB i EF , sekju u jednoj tački.

4. U ravni je dat neparan broj intervala dužine 1. Neka je S skup svih brojeva sa realne prave koji se pojavljuju u neparnom broju intervala. Dokazati da je S unija disjunktnih intervala čija je ukupna dužina veća ili jednakra od 1.

5. Neka je $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} = 0$ niz realnih brojeva. Dokazati nejednakost:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k} \leq \sum_{k=1}^n \sqrt{k}(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}).$$

Vreme za rad 240 minuta
Svaki zadatak vredi 20 poena

Školsko takmičenje iz matematike

III i IV razred

18. januar 2006. godine
Gimnazija "Svetozar Marković" Niš

- Dokazati da je $\cos \frac{2\pi}{5}$ iracionalan broj.
- Neka je $n > 1$ prirodan broj. Broj n je magičan ako važi: za svaka dva broja x i y koji nisu uzajamno prosti sa n , broj $x+y$ nije uzajamno prost sa n . Odrediti sve magične brojeve.
- Dat je oštrogli trougao ABC sa $AB \neq AC$. Neka je H ortocentar trougla ABC , F sredina stranice BC , tačka D je podnožje normale iz A na duž BC , a presek prave AH i opisanog kruga oko trougla ABC označimo sa E . Tangenta na opisani krug oko trougla DEF u tački D seče prave AB i AC u tačkama M i N , redom. Dokazati da je $DN = DM$.
- Neka je $n \geq 2$ prirodan broj i skup $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Za svaki broj $1 \leq k \leq n-1$ neka je

$$x_k = \frac{1}{n+1} \sum_{|B|=k, B \subset A} (\min B + \max B)$$

Dokazati da su x_1, x_2, \dots, x_{n-1} prirodni brojevi, i da nisu svi brojevi deljivi sa 4.

- Ako polinomi $P(x)$ i $Q(x)$ imaju bar jedan realan koren (ne obavezno isti), i ako važi

$$P(1+x+Q^2(x)) = Q(1+x+P^2(x))$$

za svako $x \in R$, dokazati da je $P \equiv Q$.

Vreme za rad 240 minuta
Svaki zadatak vredi 20 poena