

**9. традиционално интерно такмичење ученика
Математичке гимназије**

други круг – 13. март 2005.

Први разред – А категорија

1. У оштроуглом троуглу $\triangle ABC$, C_0 је подножје висине из темена C , а C_1 спредиште странице AB . Нека су E и F тачке на страници AB такве да су $\angle ACE$ и $\angle FCB$ једнаки. Нека су затим, M и N подножја нормала из A и B на CE , односно CF . Доказати да тачке M, N, C_0 и C_1 леже на истом кругу.
2. Нека су a, b, c дужине страница тупоуглог троугла, при чему је $c > a, c > b$.
Доказати да важи

$$c^3 > a^3 + b^3.$$

3. Нека за позитивне реалне бројеве a, b, c важи

$$abc \geq ab + bc + ca.$$

Доказати да је

$$abc \geq 3(a + b + c).$$

4. Наћи све просте бројеве p такве да је $p^3 + p^2 + p + 1$ потпун квадрат.
5. У траку $1 \times n$ уписују се редом бројеви $1, 2, \dots, n$. У првом кораку се на произвољно место упише број 1. Затим се број 2 уписује на поље које је суседно са пољем на које је уписан број 1. У сваком следећем кораку се наредни број уписује у поље које је суседно са пољем у које је већ уписан неки број. У последњем кораку се број n упише у преостало слободно поље.
На колико начина је могуће извршити такво уписивање бројева?

Време за рад 240 минута.

Задатке детаљно образложити.

Сваки задатак писати на одвојеном листу папира.

Желимо вам пуно успеха.

**9. традиционално интерно такмичење ученика
Математичке гимназије**

други круг – 13. март 2005.

Други разред – А категорија

- Споља приписана кружница троугла $\triangle ABC$ додирује BC у K и продужетак AB у L . Друга споља приписана кружница додирује продужетке AB и BC у M и N . Пресек KL и MN је X . Доказати да је CX бисектриса угла ACN .
- Нека су x , y и z реални бројеви из интервала $(2, 4)$. Доказати неједнакост

$$\frac{x}{y^2 - z} + \frac{y}{z^2 - x} + \frac{z}{x^2 - y} > 1.$$

- Нека су n и k природни бројеви за које важи $n^k > (k+1)!$. Нека је $M = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \mid (\forall i) x_i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$. Доказати да од сваких $(k+1)! + 1$ елемената из M постоје два (a_1, a_2, \dots, a_k) и (b_1, b_2, \dots, b_k) такви да је

$$(k+1)! \mid (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_k - b_k)$$

- Дато је 18 тачака у равни. Они образују укупно $\binom{18}{3}$ троуглова чија је укупна површина P . Шест од тих тачака је обојено плаво, шест црвено и шест зелено. Доказати да збир површина троуглова чија су темена тачке исте боје није већи од $\frac{P}{4}$.

Време за рад 240 минута.

Задатке детаљно образложити.

Сваки задатак писати на одвојеном листу папира.

Желимо вам пуно успеха.

**9. традиционално интерно такмичење ученика
Математичке гимназије**

други круг – 13. март 2005.

Трећи разред – А категорија

- Споља приписана кружница троугла $\triangle ABC$ додирује AB и продужетке CA и CB у тачкама C_1, B_1 и A_1 тим редом. Друга споља приписана кружница додирује страницу AC и продужетке BA и BC у B_2, C_2 и A_2 . Праве A_1B_1 и A_2B_2 се секу у тачки P док се A_1C_1 и A_2C_2 секу у тачки Q . Доказати да су тачке A, P и Q колинеарне.

- Нека су x_1, \dots, x_n реални бројеви чији је збир 0. Нека је m најмањи, а M највећи од тих бројева. Доказати да је

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq -nmM.$$

- Нека је низ $\{a_n\}$ дат са $a_1 = 43, a_2 = 142$ и $a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2}$ за $n \geq 3$. Доказати:
 - a_n и a_{n+1} су узајамно прости;
 - за сваки природан број t постоји бесконачно много природних бројева n таквих да су и $a_n - 1$ и $a_{n+1} - 1$ дељиви са t .
- Нека су S_1, S_2, \dots, S_n подскупови скупа реалних бројева од којих је сваки унија два затворена интервала. Ако свака три од ових подскупова имају заједничку тачку, доказати да постоји тачка која припада бар половини ових подскупова.

Време за рад 240 минута.

Задатке детаљно образложити.

Сваки задатак писати на одвојеном листу папира.

Желимо вам пуно успеха.

**9. традиционално интерно такмичење ученика
Математичке гимназије**

други круг – 13. март 2005.

Четврти разред – А категорија

- Нека је тачка P пресек дијагонала AC и BD конвексног четвороугла $ABCD$ у ком је $AB = AC = BD$. Нека су O и I центри описаног и уписаног круга троугла $\triangle ABP$. Доказати да ако је $O \neq I$ онда су праве OI и CD нормалне.
- Нека су x_1, x_2, \dots, x_n цели бројеви чији је најмањи заједнички делилац 1, и нека је $s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$ за све природне бројеве k . Доказати да

$$\text{НЗД}(s_1, s_2, \dots, s_n) \mid \text{НЗС}(1, 2, \dots, n).$$

- Нека су a_1, a_2, \dots, a_n ($n \geq 4$) ненегативни реални бројеви чији је збир 1. Доказати да важи неједнакост:

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n + a_na_1 \leq \frac{1}{4}.$$

- Доказати да за сваки природан број n важи да је број $2n$ -тоцифрених природних бројева који имају n цифара 1 и n цифара 2 у свом декадном запису, једнак броју n -тоцифрених природних бројева записаних цифрама 1, 2, 3, 4 који у свом декадном запису имају исти број јединица и двојки.

Време за рад 240 минута.

Задатке детаљно образложити.

Сваки задатак писати на одвојеном листу папира.

Желимо вам пуно успеха.