

Прва лажна математичка олимпијада

Први дан

Нови Сад, 26. јун 2004.

1. Нека су $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$ произвољни природни бројеви. Доказати да важи

$$\frac{1}{[a_1, a_2]} + \frac{1}{[a_2, a_3]} + \dots + \frac{1}{[a_{n-1}, a_n]} < 1,$$

при чему $[x, y]$ означава НЗС(x, y).

2. Кругови γ_1 и γ_2 се секу у тачкама AB , а круг γ_3 их додирује споља у тачкама C и D редом. Права AB сече круг γ_3 у тачкама P и Q . Доказати да је $\angle PKC = \angle QKC$.

3. Нека су A_1, A_2, \dots, A_n скупови од по n дужи на датој правој. Доказати да се пресек $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ састоји од не више од $n^2 - n + 1$ дисјунктних дужи.

Време за рад: 270 минута.

Сваки задатак вреди 7 поена.

Желимо вам пуно успеха.

Прва лажна математичка олимпијада

Други дан

Нови Сад, 28. јун 2004.

4. Претпоставимо да низ природних бројева (a_n) задовољава $(a_i, a_j) = (i, j)$ за свака два различита природна броја i, j . Доказати да је $a_n = n$ за свако n .
5. Дат је троугао ABC . Тангента у темену A на круг описан око $\triangle ABC$ сече средњу линију троугла паралелну са BC у тачки A_1 . Аналогно дефинишемо тачке B_1 и C_1 . Доказати да тачке A_1, B_1, C_1 леже на правој и да је та права нормална на Ојлерову праву троугла ABC .
6. У поља бесконачне квадратне таблице уписани су природни бројеви тако да важи следеће својство: ако је у неко поље таблице уписан неки број a , тада је збир бројева у пољу испод и у пољу десно од посматраног поља једнак $2a + 1$. Доказати да су на свакој дијагонали паралелној правој $x = y$ сви бројеви различити.

Време за рад: 270 минута.

Сваки задатак вреди 7 поена.

Желимо вам пуно успеха.