

7. традиционално интерно такмичење ученика Математичке гимназије

други круг – 29. април 2003.

- Нека је l тангента у тачки M круга k са пречником MN . На дужи MN је дата тачка A . Произвољан круг са центром на l сече l у тачкама C и D . Нека праве NC и ND секу круг k редом у тачкама P и Q . Доказати да права PQ пролази кроз фиксну тачку. (8 поена)
- Дато је $n + 1$ различитих тројчаних подскупова скупа $\{1, 2, \dots, n\}$. Доказати да међу њима постоје два чији је пресек једночлан. (10 поена)
- Нека је S_0 коначан скуп природних бројева. Дефинишемо скупове $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ на следећи начин: природни број a припада скупу S_{n+1} ако и само ако тачно један од бројева a и $a - 1$ припада скупу S_n . Доказати да постоји бесконачно много природних бројева N са својством да је

$$S_N = S_0 \cup \{a + N \mid a \in S_0\}. \quad (12 \text{ поена})$$

- Нека су x_1, x_2, \dots, x_n позитивни реални бројеви такви да је $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Доказати да је

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}. \quad (12 \text{ поена})$$

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.
Желимо вам пуно успеха.