Потенција тачке

Душан Ђукић

Нека су дати круг k и тачка A у равни. Посматрајмо произвољну праву l кроз A и њене пресечне тачке B и C са кругом k. Производ $AB \cdot AC$ не зависи од избора праве l. Заиста, ако са D означимо средиште дужи BC, имамо $AB \cdot AC = (AD - DB)(AD + DB) = AD^2 - DB^2 = OA^2 - OD^2 - DB^2 = OA^2 - r^2$, где је $r = OB$ полупречник круга r.

Дефиниција. Производ $\mathcal{P}_{A,k} = AB \cdot AC = OA^2 - r^2$ је *потенција* тачке A у односу на круг k.

Дужи AB и AC сматрамо *оријентисаним*, тј. производ $AB \cdot AC$ је позитиван ако су $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ истог смера, а негативан у супротном.

Специјално, потенција тачке P у односу на круг k је позитивна за P ван круга, негативна за P унутар круга, и нула за P на кругу.

Ако су AB и CD две праве кроз тачку P, где су A, B, C, D тачке на кругу, онда су оријентисани производи $PA \cdot PB$ и $PC \cdot PD$ једнаки. Важи и други смер:

Т.1. Ако се праве AB и CD секу у тачки P и важи $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, где су дужи оријентисане, онда тачке A, B, C, D леже на истом кругу.

Доказ. Нека круг ABC сече праву BD у тачкама B и D'. Тада из $PC \cdot PD = PA \cdot PB = PC \cdot PD'$ следи $PD = PD'$ као оријентисане дужи, дакле $D' \equiv D$. $\square$

Геометријско место тачака потенције p у односу на круг k је круг са центром O и полупречником $\sqrt{r^2 + p}$, под претпоставком да је $p \geq -r^2$. "Круг" полупречника нула је тачка.

Задатак 1. Два круга k и l се секу у тачкама A и B и додирују праву p у тачкама C и D редом. Доказати да права AB полови дуж CD.

Решење. Нека AB сече CD у тачки M. Потенција тачке M у односу на оба круга је једнака $MA \cdot MB$, дакле $MC^2 = MA \cdot MB = MD^2$. $\triangle$

Природно се поставља питање које тачке у равни имају једнаке потенције у односу на дате кругове $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$.

Нека је P тачка у равни. Тада је $\mathcal{P}_{P,k_1} - \mathcal{P}_{P,k_2} = (O_1P^2 - r_1^2) - (O_2P^2 - r_2^2) = O_1P^2 - O_2P^2 - (r_1^2 - r_2^2) = O_1P'^2 - P'O_2^2 - (r_1^2 - r_2^2) = O_1O_2(2O_1P' - O_1O_2) - (r_1^2 - r_2^2)$, где је P' подножје нормале из P на O_1O_2. То значи да разлика $\mathcal{P}_{P,k_1} - \mathcal{P}_{P,k_2}$ зависи само од тачке P'. Другим речима, за дато d, геометријско место тачака P за које је $\mathcal{P}_{P,k_1} - \mathcal{P}_{P,k_2} = d$ је права нормална на O_1O_2. Специјално, за $d = 0$ имамо:

Т.2. Све тачке са једнаком потенцијом у односу на два неконцентрична круга k_1 и k_2 припадају истој правој, која је нормална на O_1O_2. $\square$

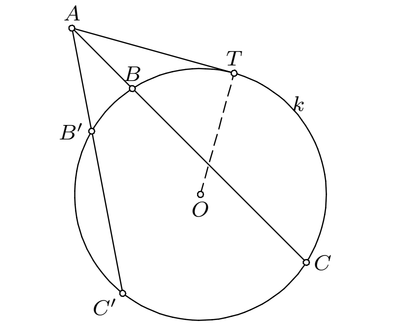
Дефиниција. Радикална оса два неконцентрична круга k_1 и k_2 је права чије све тачке имају једнаку потенцију у односу на оба круга.

Једна од последица је да средишта четири заједничке тангенте на два дата дисјунктна круга леже на радикалној оси, што је општије од тврђења у задатку 1.

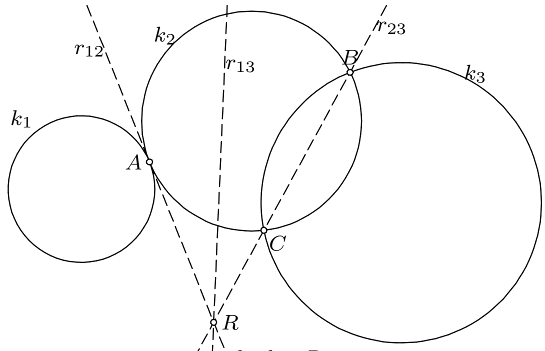
Ако се кругови k_1 и k_2 секу (или додирују), њихова радикална оса је одређена њиховом заједничком тетивом (односно тангентом).

Т.3. Нека су k_1, k_2, k_3 кругови који су неконцентрични у паровима. Радикалне осе кругова k_1 и k_2, k_2 и k_3, и k_3 и k_1 припадају истом прамену, тј. секу се у једној тачки или су паралелне или се поклапају.

Доказ. Пресек радикалних оса (k_1, k_2) и (k_2, k_3), ако постоји, има једнаку потенцију у односу на сва три круга, па зато припада и трећој радикалној оси (k_3, k_1). □



$\mathcal{P}_{A,k} = AB \cdot AC = AB' \cdot AC' = AT^2$



$r_{ij} =$ радикална оса k_i, k_j; $R =$ радикални центар

Дефиниција. Ако се радикалне осе три круга секу у једној тачки, та тачка је *радикални центар* тих кругова.

Последица. Ако се три круга секу, њихове три заједничке тетиве су конкурентне.

Следеће помоћно тврђење је често корисно, нпр. у задацима у којима се показује да шест тачака, по две на свакој страници троугла, припадају истом кругу.

Т.4. Дат је троугао ABC. Тачке A_1, A_2 на страници BC, B_1, B_2 на CA и C_1, C_2 на AB су такве да су по четири тачке (A_1, A_2, B_1, B_2), (B_1, B_2, C_1, C_2) и (C_1, C_2, A_1, A_2) концикличне. Тада свих шест тачака леже на истом кругу.

Доказ. Означимо кругове $B_1B_2C_1C_2$, $C_1C_2A_1A_2$ и $A_1A_2B_1B_2$ редом са k_a, k_b и k_c. Ако се ови кругови не поклапају, радикалне осе парова кругова (k_b, k_c), (k_c, k_a) и (k_a, k_b) су праве A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, редом. Али радикалне осе припадају истом прамену, а са ове три праве то очигледно није случај - контрадикција. Дакле, кругови морају да се поклапају. □

Задатак 2. У оштроуглом троуглу ABC, тачке H_a, H_b, H_c су подножја нормала из ортоцентра H на BC, CA, AB редом. Доказати да су ортогоналне пројекције тачака H_a на AB и AC, H_b на BA и BC, и H_c на CA и CB концикличне.

Решење. Означимо са H_{ab} и H_{ac} пројекције H_a на AC и AB редом; аналогно означавамо $H_{ba}, H_{bc}, H_{ca}, H_{cb}$. Покажимо да тачке $H_{ab}, H_{cb}, H_{ac}, H_{bc}$ припадају неком кругу k_a. Треба доказати да је $AH_{ab} \cdot AH_{cb} = AH_{ac} \cdot AH_{bc}$. Све четири дужине се једноставно израчунавају, па добијамо $AH_{ab} \cdot AH_{cb} = AH_{ac} \cdot AH_{bc} = AH \cdot AH_a \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

Аналогно, тачке $H_{ac}, H_{bc}, H_{ba}, H_{ca}$ леже на неком кругу k_b, а тачке $H_{ba}, H_{ca}, H_{ab}, H_{cb}$ на кругу k_c. По теореми 4, кругови k_a, k_b и k_c се поклапају. △

Нека су дати кругови $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ са $O_1 \neq O_2$. Посматрајмо круг $k(O, r)$ који сече k_1 и k_2 под правим углом (тј. ортогоналан је на њих), при чему сече k_1 у A_1 и B_1, а k_2 у A_2 и B_2. Угао OA_1O_1 је прав, па је $r^2 = OO_1^2 - r_1^2 = \mathcal{P}_{O,k_1}$; аналогно је и $\mathcal{P}_{O,k_2} = r^2$, што значи да O лежи на радикалној оси кругова k_1 и k_2.

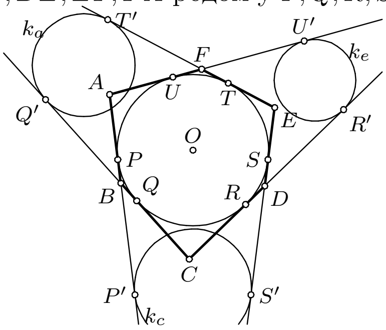
Т.5. Геометријско место центара кругова ортогоналних на дате кругове k_1, k_2 је радикална оса k_1 и k_2. □

Последица. Ако центри три круга не леже на истој правој, постоји тачно један круг ортогоналан на сва три круга, и његов центар је радикални центар ових кругова. □

Већ смо стекли неку представу о употребној вредности појма потенције тачке. Наравно, као и увек, моћ апарата зависи и од наше креативности при његовој употреби.

Задатак 3. *(Бријаншонова теорема)* Доказати да се у тангентном шестоуглу $ABCDEF$ дијагонале AD, BE и CF секу у једној тачки.

Решење. Нека уписани круг додирује праве AB, BC, CD, DE, EF, FA редом у P, Q, R, S, T, U.



Одаберимо тачке P', Q', R', S', T', U' редом на полуправим PB, QB, RD, SD, TF, UF тако да је $PP' = QQ' = RR' = SS' = TT' = UU' = m$. Посматрајмо сада кругове k_a, k_c, k_e такве да k_a додирује праве EF и BC у T' и Q' редом; k_c додирује AB и DE у P' и S' редом; и k_e додирује CD и FA у R' и U' редом.

Тачке A и D имају једнаке потенције у односу на k_c и k_e јер је $AP' = AP + m = AU + m = AU'$ и $DS' = m - DS = m - DR = DR'$; зато је AD радикална оса кругова k_c и k_e. Аналогно је BE радикална оса k_e, k_a, а CF радикална оса k_a, k_c. Праве AD, BE, CF се онда секу у радикалном центру кругова k_a, k_c, k_e. $\triangle$

Задаци

1. Уписани круг троугла ABC дели тежишну дуж AM на три дела тако да су два дела ван круга исте дужине. Доказати да је једна страница троугла двапут дужа од друге.

2. У оштроуглом троуглу ABC тачка H је ортоцентар. Круг кроз H са центром у средишту странице BC сече праву BC у A_1 и A_2. Слично, круг кроз H са центром у средишту CA сече CA у B_1 и B_2, а круг кроз H са центром у средишту AB сече AB у C_1 и C_2. Доказати да тачке $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ леже на истом кругу. *(ММО 2008.1)*

3. Два круга у равни се секу у X и Y. Доказати да постоје четири тачке P, Q, R, S са следећим својством: за сваки круг који додирује дате кругове у A и B и сече праву XY у C и D, свака од правих AC, AD, BC, BD пролази кроз једну од тачака P, Q, R, S.

4. У троуглу ABC, A', B' и C' су подножја висина из A, B и C редом. Праве BC и $B'C'$ секу се у X, праве CA и $C'A'$ у Y, а AB и $A'B'$ у Z. Доказати да тачке X, Y и Z леже на правој, и да је та права нормална на Ојлерову праву троугла ABC.

5. Круг k са центром O уписан је у конвексан четвороугао $ABCD$ и додирује странице AB, BC, CD и DA редом у тачкама K, L, M и N. Праве KL и MN се секу у тачки S. Доказати да је $OS \perp BD$.

6. Међу четири тачке A, B, C, D, никоје три нису колинеарне. Праве AB и CD секу се у E, а праве BC и DA у F. Доказати да кругови над пречницима AC, BD и EF или сви имају заједничку тачку, или никоја два немају.

7. Тачке P и Q унутар троугла ABC су такве да је $\angle PAC = \angle QAB$ и $\angle PBC = \angle QBA$.
   а) Доказати да подножја нормала из P и Q на странице троугла леже на кругу.
   б) Нека су D и E подножја нормала из P на праве BC и AC, а F подножје нормале из Q на AB. Праве DE и AB се секу у тачки M. Доказати да је $MP \perp CF$.

8. У троуглу ABC са најкраћом страницом BC, тачке P и Q на страницама AB и AC редом су такве да је $\angle PCB = \angle QBC = \angle BAC$. Доказати да центар O описаног круга троугла APQ лежи на симетрали странице BC.

9. Тачке P и Q на страници AB конвексног четвороугла $ABCD$ су такве да је $AP = QB$. Тачка $X \neq D$ је тачка пресека кругова APD и DQB, а $Y \neq C$ тачка пресека кругова ACP и QCB. Доказати да су тачке C, D, X и Y на истом кругу.

10. У оштроуглом троуглу ABC, тачке D, E и F су подножја висина из A, B, C, редом. Права кроз D паралелна са EF сече праве AC и AB у Q и R, редом. Права EF сече BC у P. Доказати да круг описан око $\triangle PQR$ пролази кроз средиште дужи BC.

11. Уписани круг троугла ABC додирује странице AB и AC у тачкама Z и Y, редом. Праве BY и CZ се секу у тачки G. Тачке R и S су такве да су $BCYR$ и $BCSZ$ паралелограми. Доказати да је $GR = GS$.

12. Нека је ABC троугао у коме је $\angle BCA = 90^\circ$ и D подножје висине из темена C. Тачка X припада унутрашњости дужи CD. Одаберимо тачку K дужи AX тако да је $BK = BC$, и тачку L дужи BX тако да је $AL = AC$. Праве AL и BK секу се у тачки M. Доказати да је $MK = ML$. *(ММО 2012.5)*

13. Странице AD и BC конвексног четвороугла $ABCD$ нису паралелне. Нека се кругови над пречницима AB и CD секу у тачкама E и F унутар четвороугла. Круг ω_E пролази кроз подножја нормала из E на праве AB, BC, CD, а ω_F пролази кроз подножја нормала из F на CD, DA, AB. Доказати да права кроз две пресечне тачке ω_E и ω_F садржи средиште дужи EF.

14. Нека су I и O редом центри уписаног и описаног круга троугла ABC. Нека је ω_a круг кроз B и C који додирује уписани круг троугла ABC; слично се дефинишу кругови ω_b и ω_c. Кругови ω_b и ω_c секу се у тачки A' различитој од A; слично се дефинишу тачке B' и C'. Доказати да се праве AA', BB' и CC' секу у тачки на правој IO.

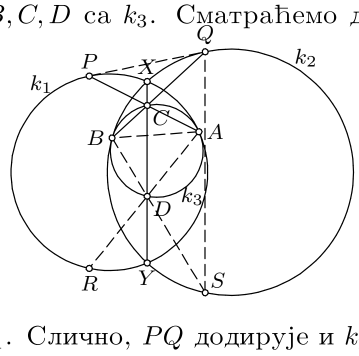
Решења

1. Означимо $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$, где је без смањења општости $b > c$. Нека су X и Y пресечне тачке уписаног круга и AM, уз распоред $A - X - Y$, и нека уписани круг k додирује BC у P и CA у Q. По услову задатка је $AX = YM$ и отуда $AY = XM$, па је $\mathcal{P}_{A,k} = AQ^2 = AX \cdot AY = MX \cdot MY = MP^2$, дакле $\frac{b+c-a}{2} = AQ = MP = \frac{b-c}{2}$, па је $a = 2c$.

2. Означимо са A', B', C' редом средишта BC, CA и AB. Тада је $CA_1 \cdot CA_2 = (CA' - A'A_1)(CA' + A'A_1) = \frac{b^2}{4} - A'H^2$ и аналогно $CB_1 \cdot CB_2 = \frac{a^2}{4} - B'H^2$. Како је $CH \perp A'B'$, имамо $A'H^2 - B'H^2 = A'C^2 - B'C^2 = \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4}$, одакле следи $CA_1 \cdot CA_2 - CB_1 \cdot CB_2 = \frac{b^2-a^2}{4} - (A'H^2 - B'H^2) = 0$, дакле A_1, A_2, B_1 и B_2 леже на неком кругу k_c.

   Аналогно, тачке B_1, B_2, C_1, C_2 су на неком кругу k_a, а тачке C_1, C_2, A_1, A_2 на кругу k_b. По Т.4, свих шест тачака су на истом кругу.

3. Означимо дате кругове са k_1, k_2, и круг кроз A, B, C, D са k_3. Сматраћемо да је k_3 унутар k_1 и k_2; други случај је аналоган. Нека AC и AD секу k_1 у тачкама P и R, и BC и BD секу k_2 у Q и S, редом. Показаћемо да су PQ и RS заједничке тангенте кругова k_1 и k_2, тако да су P, Q, R, S тражене тачке. Кругови k_1 и k_3 се додирују, па је $DC \parallel RP$. Како важи $AC \cdot CP = XC \cdot CY = BC \cdot CQ$, четвороугао $ABQP$ је тетиван, па је $\angle APQ = \angle ABQ = \angle ADC = \angle ARP$ једнаки. Следи да PQ додирује k_1. Слично, PQ додирује и k_2.



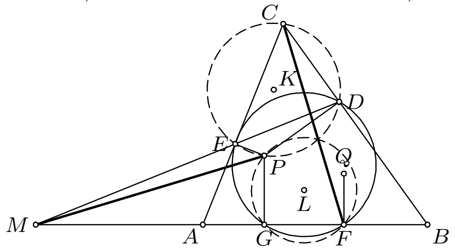
4. Тачке B, C, B', C' су на кругу, па је $XB \cdot XC = XB' \cdot XC'$, дакле X припада радикалној оси описаног круга k троугла ABC и његовог Ојлеровог круга k_e (описаног око $A_1B_1C_1$). Аналогно, Y и Z припадају радикалној оси k и k_e. Та радикална оса је нормална на праву кроз центре кругова k и k_e, а то је Ојлерова права.

5. Подножје нормале P из O на BD припада кругу k_1 над пречником OB и k_2 над пречником OD. Радикалне осе парова кругова (k, k_1) и (k, k_2) су праве KL и MN редом, па је радикални центар тачка S. Следи да S припада и радикалној оси кругова k_1 и k_2, а то је права OP.

6. Нека је H ортоцентар и A', D', E' подножја висина из A, D, E редом у троуглу ADE. Тачке A, D, A', D' су на кругу, тачке A, E, A', E' такође, па је $HA \cdot HA' = HD \cdot HD' = HE \cdot HE'$. Круг k_{AC} над пречником AC пролази кроз A', па је $\mathcal{P}_{H,k_{AC}} = HA \cdot HA'$. Слично добијамо да H има исту потенцију у односу на k_{BD} и k_{EF}.

   Аналогно, сваки од ортоцентара троуглова BCE, ABF и CDF има једнаку потенцију у односу на k_{AC}, k_{BD} и k_{EF}, и не поклапају се сви, дакле ова три круга имају заједничку радикалну осу (која садржи сва четири ортоцентра), одакле следи тврђење.

7. Нека је G подножје нормале из P на AB, а H, I подножја нормала из Q на CB и CA редом. Четвороуглови $AEPG$ и $AFQI$ су слични, па важи $\angle AEG = \angle AFI$, дакле тачке E, F, G, I су концикличне. Аналогно, тачке D, E, I, H су концикличне, као и тачке D, H, F, G. По Т.4, све тачке D, E, F, G, H, I су на кругу.



   Нека су K и L центри кругова $CDPE$ и PFG. Како је $MD \cdot ME = MF \cdot MG$, права MP је радикална оса ова два круга, и зато је нормална на праву KL која спаја њихове центре. Како су K и L средишта дужи PC и PF, праве KL и CF су паралелне, одакле следи $MP \perp CF$.

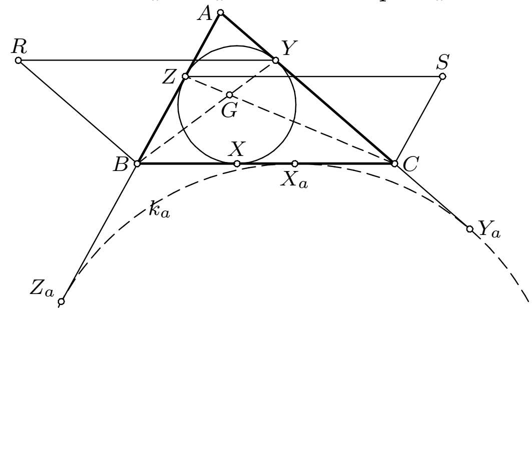
8. По услову задатка, троуглови CBP и ABC су слични, одакле је $BC^2 = BP \cdot BA$, што је потенција тачке B у односу на круг APQ, а та потенција је једнака $OB^2 - r^2$, где је r полупречник круга APQ. Следи да је $OB^2 = BC^2 + r^2$. Аналогно је $OC^2 = BC^2 + r^2$, дакле $OB = OC$.

9. Приметимо да је DX радикална оса кругова ADP и QDB. Пошто тачка K пресека DX и AB припада тој радикалној оси, важи $KP \cdot KA = KQ \cdot KB$. Због услова $AP = QB$, одавде добијамо да је K средиште AB. Аналогно, и права CY пролази кроз K. Следи да је $KX \cdot KD = KP \cdot KA = KQ \cdot KB = KY \cdot KC$, дакле C, D, X, Y су на кругу.

10. Нека је $AB > AC$. Тачка D припада дужима MP и QR, па ће тврђење задатка следити ако покажемо да је $DM \cdot DP = DQ \cdot DR$, где је M средиште BC. Троуглови ABC, AEF, AQR су слични, па су тачке B, C, Q, R на кругу, одакле је $DB \cdot DC = DQ \cdot DR$. Остаје да покажемо да је $DB \cdot DC = DM \cdot DP$.

    Тачке E, F, D, M су на Ојлеровом кругу, B, C, E, F су такође на кругу, па важи $PB \cdot PC = PE \cdot PF = PD \cdot PM$. Означимо $PB = x$ и $PC = y$. Тада је $PM = \frac{x+y}{2}$ и одатле $PD = \frac{2xy}{x+y}$. Следи да је $DB = PB - PD = \frac{x(x-y)}{x+y}$, $DC = \frac{y(x-y)}{x+y}$ и $DM = \frac{(x-y)^2}{2(x+y)}$, па директно добијамо $DB \cdot DC = DM \cdot DP = \frac{xy(x-y)^2}{(x+y)^2}$, што нам је и требало.

11. Посматрајмо приписани круг k_a преко пута темена A. Нека је уписани круг k и k_a редом додирују BC у тачкама X и X_a. Означимо са Z_a и Y_a тачке додира k_a са AB и AC. Тада је $ZZ_a = ZB + BZ_a = BX + BX_a = BX + CX = BC = ZS$, јер је $BX_a = CX$. С друге стране, $CY_a = CX_a = BX = BZ = CS$. Тачку S можемо да сматрамо за дегенерисани круг са центром S и полупречником 0. Тачке Z и C леже на радикалној оси кругова S и k_a. Аналогно, B и Y леже на радикалној оси k_a и R. Следи да је G радикални центар k_a, R и S, па је $GS = GR$.



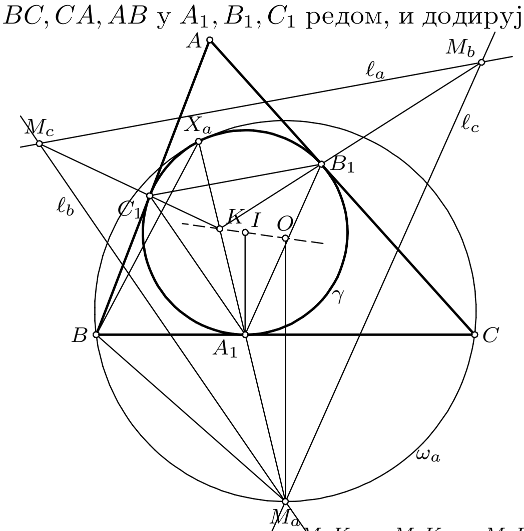
12. Посматрајмо кругове $k_1(A, AC)$ и $k_2(B, BC)$. Нека AX поново сече k_2 у K', а BX поново сече k_1 у L', и нека се k_1 и k_2 секу у C и C'. На основу потенције тачке X у односу на k_1 и k_2 следи $XL \cdot XL' = XC \cdot XC' = XK \cdot XK'$, па тачке K, K', L, L' припадају истом кругу, рецимо k_3. Како је $\angle BCA = 90°$, AC додирује k_2 и BC додирује k_1, па на основу потенције тачке A у односу на k_2 следи $AL^2 = AC^2 = AK \cdot AK'$, тј. AL додирује k_3 у L. Аналогно, BK додирује k_3 у K. Следи да су MK и ML тангентне дужи из тачке M на k_3, па је $MK = ML$.

13. Означимо са E_a, E_b, E_c и E_d подножја нормала из E редом на праве AB, BC, CD, DA, а са E_b' и E_d' пресечне тачке EE_b са DA и EE_d са BC, редом. Свих шест тачака E_a, $E_b, E_c, E_d, E_b', E_d'$ леже на кругу $\omega_E(E_aE_bE_c)$. Заиста, $\angle E_aE_bE_c + \angle E_cE_dE_a = \angle E_aE_bE + \angle EE_bE_c + \angle E_cE_dE + \angle EE_dE_a = \angle E_aBE + \angle ECE_c + \angle E_cDE + \angle EAE_a = 90° + 90° = 180°$, па E_d лежи на ω_E, а осим тога је $\angle E_d'E_dE_a = \angle EAE_a = \angle BEE_a = \angle BE_bE_a$, па је и E_d' (и аналогно E_b') на ω_E.

   Аналогно дефинисане тачке $F_a, F_b, F_c, F_d, F_b', F_d'$ су на кругу ω_F.

   Нека се праве EE_d и FF_b секу у U, а EE_b и FF_d у V. Тачке E_d, E_d', F_b, F_b' су на кругу јер је $\angle E_d'E_dF_b' = \angle F_b'F_bE_d' = 90°$, а потенција тачке U у односу на тај круг је $UE_d \cdot UE_d' = UF_b \cdot UF_b'$, што значи да је U на радикалној оси ω_E и ω_F. Аналогно је и V на тој радикалној оси, а права UV полови EF јер је $EUFV$ паралелограм, па тврђење задатка следи.

14. Нека уписани круг γ троугла ABC додирује BC, CA, AB у A_1, B_1, C_1 редом, и додирује ω_A у X_a. Хомотетија са центром X_a која слика γ у ω_A такође слика A_1 у тачку M_a на ω_A у којој је тангента паралелна BC, што значи да је M_A средиште лука BC круга ω_A који не садржи X_a. Следи да је $\angle M_aX_aB = \angle M_aBC$ и отуда $\triangle M_aBA_1 \sim \triangle M_aX_aB$. Одавде је $M_aB^2 = M_aA_1 \cdot M_aX_a$, па M_a припада радикалној оси ℓ_b кругова B и γ. Аналогно, M_a је на радикалној оси ℓ_C кругова C и γ. Слично уводимо тачке X_b, X_c, M_b, M_c и праву ℓ_a; праве ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c леже дуж страница троугла $M_aM_bM_c$.



   Праве ℓ_a и B_1C_1 су паралелне јер су обе нормалне на AI; слично је $\ell_b \parallel C_1A_1$ и $\ell_c \parallel A_1B_1$. Следи да је $\triangle M_aM_bM_c$ слика троугла $A_1B_1C_1$ при некој хомотетији Θ. Нека је K центар Θ и $k = \frac{M_aK}{A_1K} = \frac{M_bK}{B_1K} = \frac{M_cK}{C_1K}$ коефицијент сличности. Праве M_aA_1, M_bB_1, M_cC_1 се секу у K. Како су A_1, B_1, X_a, X_b на кругу, важи $A_1K \cdot KX_a = B_1K \cdot KX_b$; множењем са k добијамо $M_aK \cdot KX_a = M_bK \cdot KX_b$, па тачка K лежи на радикалној оси CC' кругова ω_A и ω_B. Слично, праве AA' и BB' садрже K.

   Нека Θ слика I у O'. Тачка O' је на правој кроз M_a паралелној са A_1I (и нормалној на BC); како је M_a средиште лука BC, та права се поклапа са M_aO. Слично, O' лежи на правој M_bO, па је $O' \equiv O$, дакле тачке I, K и O су колинеарне.

Београд, 2012