НИЗОВИ И РЕКУРЕНТНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

§ Линеарне рекурентне једначине - решавање

Најједноставнији начин задавања низова је линеарним рекурентним једначинама. У овом поглављу детаљније ћемо изучити теорију која решава овако задате једначине.
Општи облик линеарне рекурентне једначине је

$$c_k a_{n+k} + c_{k-1} a_{n+k-1} + \ldots + c_0 a_n = b_n \quad \text{за } n \geq 0, \tag{1}$$

где су $c_0, c_1, \ldots, c_k$ константе, $\{b_n\}$ дати низ, а $\{a_n\}$ тражени низ. Број чланова низа који учествује у једначини умањен за један назива се ред рекурентне једначине (у нашем случају ред је k). Приметимо да датом једначином решење није на јединствен начин одређено, јер нису јединствено одређени $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$. Значи решење рекурентне једначине реда k одређено је (и тада јединствено) тек задавањем првих k чланова.
Прво ћемо изучити најједноставнији облик дате једначине, када је $b_n \equiv 0$, тј. *хомогене линеарне рекурентне једначине*

$$c_k a_{n+k} + c_{k-1} a_{n+k-1} + \ldots + c_0 a_n = 0 \quad \text{за } n \geq 0. \tag{2}$$

Решавање ових једначина изводи се тако што се датој једначини придружи *каарктеристичан* полином

$$c_k t^k + c_{k-1} t^{k-1} + \ldots + c_0$$

и одреде све његове различите нуле $t_0, t_1, \ldots, t_s$. Затим се свакој нули α реда 1 придружи израз облика $C\alpha^n$, а свакој нули реда l израз облика $\alpha^n \cdot (C_0 + C_1 n + \ldots + C_{l-1} n^{l-1})$. *Опште* решење дате рекурентне једначине је низ

$$a_n = \text{збир бројева придружених нулама.}$$

Тражени низ се добија из општег решења тако што се замене вредности првих k чланова низа и одреде непознате константе C_i.
Да би разјаснили оно што је претходно речено урадимо следећи пример:

Пример 1. Одредити низ задат са $a_0 = 3$, $a_1 = 3$, $a_2 = 24$, $a_3 = 9$, $a_4 = 186$ и

$$a_{n+5} - 3a_{n+4} - 5a_{n+3} + 27a_{n+2} - 32a_{n+1} + 12a_n = 0.$$

Решење. Карактеристичан полином дате једначине је

$$t^5 - 3t^4 - 5t^3 + 27t^2 - 32t + 12 = (t-1)^2(t-2)^2(t+3),$$

па су све његове различите нуле 1 и 2 (реда 2) и -3 (реда 1). Према претходном опште решење ове једначине је

$$a_n = 1^n(A_1 + A_2 n) + 2^n(B_1 + B_2 n) + C \cdot (-3)^n.$$

Заменом вредности a_n за $n = 0, 1, 2, 3, 4$ добијамо систем једначина

$$A_1 + B_1 + C = 3, \quad A_1 + A_2 + 2B_1 + 2B_2 - 3C = 3, \quad A_1 + 2A_2 + 4B_1 + 8B_2 + 9C = 24,$$

$$A_1 + 3A_2 + 8B_1 + 24B_2 - 27C = 9, \quad A_1 + 4A_2 + 16B_1 + 64B_2 + 81C = 186,$$

чије је решење $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = C = 1$, па је тражени низ

$$a_n = 1 + n + 2^n(1+n) + (-3)^n. \qquad \square$$

Решавање линеарних рекурентних једначина има многоструке примене, јер постоје многи задаци везани за низове чије се решавање своди на решавање неке линеарне рекурентне једначине.
Први такав пример су системи (по неколико непознатих низова) линеарних рекурентних једначина. Као и код система обичних једначина, циљ нам је да добијемо једначину (која ће бити линеарна) по само једном непознатом низу, одакле тај низ можемо и одредити. Размотримо следећи пример:

Пример 2. Одредити низове $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ задате са $a_1 = 2$, $b_1 = 1$ и за $n \in \mathbb{N}$ са

$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 2b_n.$$

Решење. Јасно је да из прве једначине можемо изразити b_n преко a_n, тј. $3b_n = a_{n+1} - a_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Сада је и $3b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1}$ (јер претходна једнакост важи за свако n па и за $n+1$), па заменом у другу једнокост и множењем са 3 добијамо

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3a_n + 2a_{n+1} - 4a_n,$$

односно $a_{n+2} - 4a_{n+1} + a_n = 0$. Како је $a_1 = 2$ и из прве једнакости и $a_2 = 2a_1 + 3b_1 = 7$, то као и у примеру 1 можемо одредити низ a_n, а затим и заменом у прву једнакост низ b_n. После решавања добијамо

$$a_n = \frac{1}{2}\left((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right), \quad b_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right). \qquad \square$$

Линеарне рекурентне једначине примењују се и у задацима облика:

Пример 3. Одредити низ $\{a_n\}$ задат са $a_1 = 0$ и

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Решење. Идеја у овом задатку је представљање низа у облику $a_n = \dfrac{x_n}{y_n}$. Овом сменом дата рекурентна једначина постаје

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{x_n - y_n}{x_n + y_n}.$$

Приметимо да x_n и y_n још увек нису јединствено одређени. Зато ћемо ми пробати да наместимо да је $x_{n+1} = x_n - y_n$ и $y_{n+1} = x_n + 3y_n$, при чему је $x_1 = 0$, а y_1 је произвољан ненула број (касније га бирамо тако да добијемо што једноставније изразе). Последњи систем рекурентних једначина се наравно може решити (као у примеру 2) и његово решење је $x_n = 1 - n$ и $y_n = 1 + n$ (за $y_1 = 2$). Коначно

$$a_n = \frac{1-n}{1+n}, \qquad \text{за } n \geq 1. \qquad \square$$

Наставимо даље са проучавањем линеарних рекурентних једначина. Размотримо сада и случај када b_n није низ нула. У општем случају чак и ако се одговарајућа хомогена рекурентна једначина (она добијена заменом b_n са 0) може решити могуће је да се дата рекурентна једначина не може ефективно решити (тј. не може се одредити експлицитан израз за вредност датог низа). На срећу постоје многи случајеви у којима је то ипак могуће.
Иако се дата рекурентна једначина не може увек експлицитно решити, важи следеће тврђење:

Теорема 1. Опште решење једначине (1) је облика

$$a_n = a_n' + a_n'',$$

где је a_n' опште решење једначине (2), а a_n'' неко (тј. *партикуларно*) решење једначине (1).

Сада је јасно да је евентуална нерешивост дате рекурентне једначине условљена немогућношћу одређивања неког партикуларног решења (или немогућношћу одређивања нула карктеристицног полинома, али то условаљава и нерешивост одговарајуће хомогене једначине). Најзначајнији примери у којима је могуће одредити партикуларно решење су $b_n = P(n)$ и $b_n = P(n) \cdot a^n$, где је P неки полином.
У првом случају партикуларно решење треба тражити у облику $a_n'' = Q(n)$, а у другом у облику $a_n'' = Q(n) \cdot a^n$, где је Q полином степена већег или једнаког од степена полинома P. Наравно прво треба пробати у облику полинома степена једнаког степену полинома P, затим степена за један већег, итд. док се не нађе одговарајући полином. Најчешће је степен полинома Q баш једнак степену полинома P.
Напоменимо (за сваки случај), да је и константа полином степена 0.
Партикуларно решење најчешће треба тражити у облику сличном облику низа b_n.

Пример 4. Одредити општи члан низа $\{a_n\}$ задатог са $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = n^2, \qquad \text{за } n \geq 0.$$

Решење. Према теореми 1 опште решење једначине је облика $a_n = a_n' + a_n''$, где је a_n' опште решење једначине $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$, а a_n'' неко решење дате једначине. Поступајући као у задатку 1 добијамо $a_n = 2^n(C_1 + n \cdot C_2)$. Као што је претходно речено, партикуларно решење требамо тражити у облику полинома степена барем два. Нека је зато $a_n'' = \alpha \cdot n^2 + \beta \cdot n + \gamma$. Заменом у дату једначину добијамо

$$\alpha \cdot (n+2)^2 + \beta \cdot (n+2) + \gamma - 4\alpha \cdot (n+1)^2 - 4\beta \cdot (n+1) - 4\gamma + 4\alpha \cdot n^2 + 4\beta \cdot n + 4\gamma = n^2.$$

Изједначавањем коефицијената уз n^2, n и константи са обе стране једнакости (изједначавање вршимо, јер су полиноми једнаки једино уколико су им одговарајући коефицијенти једнаки) добијамо $\alpha = 1$, $\beta = 4\alpha = 4$ и $\gamma = -4\alpha - 2\beta = -12$. Значи опште решење дате једначине је

$$a_n = 2^n(C_1 + n \cdot C_2) + n^2 + 4n - 12,$$

па из $a_0 = 0$ и $a_1 = 1$ добијамо $C_1 = 12$ и $C_2 = -8$. □

Напомена. О свему претходно реченом детаљније и опширније можете наћи у књизи *Анализа са алгебром 3*, уџбенику за трећи разред Математичке гимназије.

До сада смо видели да се партикуларно решење нехомогене линеарне рекурентне једначине у неким случајевима може одредити директно, али је напоменуто и да то није могуће увек. У наредној теореми показаћемо метод смањивања степена рекурентне једначине, којим се низ ефективно може одредити:

Теорема 2. Нека је α корен карактеристичног полинома $P(t)$ рекурентне једначине (1) и нека је

$$Q(t) = b_{k-1}t^{k-1} + b_{k-2}t^{k-2} + \ldots + b_0$$

количник добијен дељењем полинома $P(t)$ са $t - \alpha$. Низ a_n је решење рекурентне једначине (2) ако и само ако је решење рекурентне једначине

$$b_{k-1}a_{n+k-1} + b_{k-2}a_{n+k-2} + \ldots + b_0a_n = v_n,$$

где је низ v_n задат са $v_n = \alpha^n \sum_{i=0}^{k-1} b_i a_i + \sum_{j=0}^{n-1} u_j \alpha^{n-1-j}$.

Следећи пример илуструје како се дата теорема може доказати, а уједно и њену примену:

Пример 5. У зависности од низа $\{b_n\}$ одредити низ $\{x_n\}$ задат са $a_0 = a, a_1 = b$ и

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = b_n, \qquad \text{за } n \geq 1.$$

Решење. Идеја записана у доказу претходне теореме је следећа: запишемо дату рекурентну једнчину за $0, 1, 2, \ldots, n$, тј.

$$\begin{aligned}
&x_{n+2} + x_{n+1} - x_n = b_n\\
&x_{n+1} + x_n - 2x_{n-1} = b_{n-1}\\
&\ldots\\
&x_2 + x_1 - x_0 = b_0
\end{aligned}$$

а затим тражиме бројеве којима требамо множити дате једнакости (наравно различите једнакости можемо множити различитим бројевима) тако да се после сабирања добије једначина реда за један мањег од почетне, тј. да се при сабирању скрате $x_n, x_{n-1}, \ldots$ а да нам остане само првих неколико чланова низа (нпр. x_0, x_1 и x_2). У овом случају ово множење је доста лако, јер се и самим сабирањем (тј. прво множењем са 1 па сабирањем) једначина своди на

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} - x_1 + 2x_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i,$$

што је једначина реда за један мањег од почетне. Наравно да бисмо задатак завршили требамо још једном смањити ред једначине. Међутим сада то није једноставно као у претходном случају (просто сабирање није довољно). Запишимо опет новодобијене рекурентне једначине

$$\begin{aligned}
&x_{n+2} + 2x_{n+1} = x_1 - 2x_0 + \sum_{i=0}^{n} b_i\\
&x_{n+1} + 2x_n = x_1 - 2x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} b_i\\
&\ldots\\
&x_2 + 2x_1 = x_1 - 2x_0 + b_0.
\end{aligned}$$

Размислимо како ћемо добити да се сви $x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \ldots$ скрате. Нека је прва једначина помножена са 1. Да би се x_{n+1} скратило следећу једначину морамо помножити са -2, јер се x_{n+1} појављује само у ове две једначине. Затим да би се x_n скратило следећу једначину морамо помножити са 4, јер се x_n не појављује у наредним једначинама, а до сада је било уз коефицијент -4 (из претходног множења)... Настављајући овај поступак добијамо да је k-ту једначину потребно помножити са $(-2)^{k-1}$, па је сабирањем

$$x_{n+2} = (-2)^{n+1}x_1 + (x_1 - 2x_0)(1 - 2 + 4 + \ldots + (-2)^n) + \sum_{i=0}^{n} b_i - 2\sum_{i=0}^{n-1} b_i + \ldots + (-2)^n b_0.$$

Овим је задатак завршен (иако се израз са десне стране може средити, што се оставља читаоцу). □

Завршимо ово поглавље вероватно најпознтијим низом природних бројева, Фибоначијевим низом. Овај низ најчешће обележавамо са $\{f_n\}$ (или $\{F_n\}$) и за њега важи $f_0 = f_1 = 1$ и

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \qquad \text{за } n \geq 0.$$

Опште члан низа није тешко одредити (то се ради као у примеру 1) и он је једнак

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Низ Фибоначијевих бројева задовољава многе интересантне једнакости. Многи од њих користе се у задацима, па зато у следећој теореми дајемо најзначајније:

Теорема 3. Низ Фибоначијевих бројева $\{f_n\}$ задовољава следеће једнакости:

(а) $f_{2n} = f_n(f_{n-1} + f_{n+1})$ (б) $f_{n+m} = f_{n+1}f_m + f_{m+1}f_n$ (в) $f_{n-1}f_{n+1} = f_n^2 + (-1)^n$
(г) $f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$ (д) $f_{2n-1} = f_n^2 + f_{n-1}^2$ (ђ) $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$
(е) $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$ (ж) $f_0 + f_2 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1}$ (з) $(f_n, f_m) = f_{(n,m)}$.

§ Линеарне рекурентне једначине - примена

У претходном поглављу видели смо како се линеарне рекурентне једначине могу решавати. Међутим постоје многи проблеми везани за низове задате линеарним рекурентним једначинама (посебно они „такмичарски") за чије је решавање потребно више од одређивања низа. У овој глави ћемо управо изучити неке особине линеарних једначина који нам могу бити од помоћи у оваквим проблемима.

Започећемо следећом теоремом:

Теорема 4. Уколико низ $\{a_n\}$ задовољава рекуренту једначину $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$, онда је низ

(а) $\{a_{n+1}^2 + pa_{n+1}x_n + qa_n^2\}$ (б) $\{a_{n+1}^2 - a_{n+2}a_n\}$,

геометријска прогресија са количником q.

Доказ. (а) Довољно је доказати да за свако n важи $q(x_{n+2}^2 + px_{n+2}x_{n+1} + qx_{n+1}^2) = x_{n+3}^2 + px_{n+3}x_{n+2} + qx_{n+2}^2$, што следи из низа једнакости

$$x_{n+3}^2 + px_{n+3}x_{n+2} + qx_{n+2}^2 = (px_{n+2} + qx_{n+1})^2 - p(px_{n+2} + qx_{n+1})x_{n+2} + qx_{n+2}^2 = q(px_{n+2}x_{n+1} + x_{n+2}^2 + qx_{n+1}^2),$$

што завршава наш доказ.
Део под (б) доказује се на сличан начин и оставља се за вежбу. □

Следећи задатак показује велики значај претходне „наизглед бескорисне" теореме:

Пример 6. (Балканијада 2002) Низ (a_n) дефинисан је са

$$a_1 = 20,\ a_2 = 30,\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n,\ \text{за } n \geq 1.$$

Наћи све природне бројеве n за које је $1+5a_na_{n+1}$ потпун квадрат.

Решење. Према претходној теореми низ $\{a_{n+1}^2-3a_{n+1}a_n+a_n^2\}$ је константан, па за свако $n\in\mathbb{N}$ важи $a_{n+1}^2-3a_{n+1}a_n+a_n^2=a_2^2-3a_2a_1+a_1^2=-500$, тј. $(a_{n+1}+a_n)^2+501=5a_{n+1}a_n+1$. Значи уколико је $5a_{n+1}a_n+1$ квадрат он мора бити за 501 већи од неког другог квадрата. Низ a_n је растући, што закључујемо из $a_2>a_1$ и дате рекурентне једначине. Такође за $n=1,2$ број $5a_na_{n+1}+1$ није квадрат, а за $n=3$ важи $(a_2+a_3)^2+501=250^2+501=251^2$, па је $n=3$ решење задатка. Других решења нема, јер је из монотоности низа $(a_n+a_{n+1})^2+501<(a_n+a_{n+1}+1)^2$ за $n\geq 3$. $\square$

Вратимо се сада на низ $\{a_n\}$ задат у примеру 2. Приметимо да из рекурентне једначине и прва два члана низа можемо закључити да је сваки члан низа цео број. Међутим у општем решењу низа појављују се бројеви $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$ који нису цели. Ово може да зачуди, али уколико запишемо опште решење у развијеном облику (коришћењем биномног обрасца) добијамо

$$a_n=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^{n-i}(\sqrt{3})^i+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^{n-i}(-\sqrt{3})^i\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}2^{n-i}(\sqrt{3})^i(1+(-1)^i)=\sum_{i=0}^{[n/2]}\binom{n}{2i}2^{n-2i}\cdot 3^i, \tag{3}$$

што је свакако цео број. Ово нас наводи да посматрамо и обрнути проблем, тј. проналажење рекурентне једначине коју задовољавају низови задати сумама облика (3). У претходном разматрању смо управо и обрадили метод којим се дати задаци могу решавати (наравно све радимо обрнутим редоследом). Наиме уколико суму запишемо у облику $a_n=A\cdot\alpha^n+B\cdot\beta^n$, из Виетових формулама и по ономе реченом у првом поглављу низ мора задовољавати рекурентну једначину

$$a_{n+2}-(\alpha+\beta)\cdot a_{n+1}+\alpha\beta\cdot a_n=0,$$

при чему прва два члана непосредно одређујемо.
Претходно разматрање важи за суме облика (3), тј. на неки начин суме сваког другог члана неког бинормног развоја. Приметимо да кључну улогу има сума $1+(-1)^i$ која је једнака 0 или 2 у зависности од парности броја i, а 1 и -1 су други корени из јединице. Зато на сличан начин можемо поступати и са сумама сваког k-тог члана неког биномног развоја, нпр. сумама облика $a_n=\sum\limits_{i=0}^{[n/k]}\binom{n}{ki}a^{n-ki}b^i$, узимањем k-тих корена из јединице. Наиме, за $\omega=e^{2\pi/k}$ из основних формула за суме корена из јединице имамо

$$\sum_{i=0}^{[n/k]}\binom{n}{ki}a^{n-ki}b^i=\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k}\left(a+\omega^j\sqrt[k]{b}\right)^n, \tag{4}$$

што се за $n=2$ управо своди на формулу облика (3). Сада из (4) коришћењем Виетових формула одређујемо рекурентну једначину за низ a_n.
Следећи пример показује како се претходна прича спроводи у дело:

Пример 7. (Дунавски куп 2005) Доказати да је збир

$$S_n=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}\cdot 2005+\binom{n}{5}\cdot 2005^2+\ldots=\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n}{2k+1}\cdot 2005^k$$

дељив са 2^{n-1}, за сваки природан број n.

Решење. Поступамо као у претходном разматрању. Значи

$$S_n=\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n}{2k+1}\cdot 2005^k=\frac{(-1)^n}{2\sqrt{2005}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\sqrt{2005})^k\cdot(1^k-(-1)^k)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2005}}\left((1+\sqrt{2005})^n-(1-\sqrt{2005})^n\right),$$

тј. низ S_n задовољава рекурентну једначину

$$S_{n+2}-2\cdot S_{n+1}-2004\cdot S_n=0,$$

при чему је $S_0 = 0$ и $S_1 = 1$. Доказ даље изводимо индукцијом по n. За $n = 1$ тврђење је очигледно тачно. Претпоставимо зато да је тврђење тачно за све бројеве не веће од $n+1$ и докажимо да тада важи и за $n+2$. Како је $S_{n+2} = 2 \cdot S_{n+1} + 2004 \cdot S_n$, а бројеви $2 \cdot S_{n+1}$ и $2004 \cdot S_n$ по индукцијској претпоставци дељиви са 2^{n+1}, то је и S_{n+2} дељиво са 2^{n+1}, што је и требало доказати. $\square$

За вежбу можете урадити задатке 14 и 15 који комбинују претходну методу, али и оно што ће бити обрађено у наставку овог поглавља.
Напоменимо и да је у задацима у којима се појављују само изрази облика $(a+\sqrt{b})^n$ (или слични), честа идеја да посматрамо или овом изразу додамо (одузмемо) израз облика $(a-\sqrt{b})^n$, па затим евентуално направимо неки низ. Ово је посебно корисно уколико је $|a-\sqrt{b}| < 1$, јер је тада и $\left|(a-\sqrt{b})^n\right| < 1$. Наравно у оваквим задаци од велике користи може бити и минимално знање о прстенима $\mathbb{Z}[\sqrt{b}]$, односно пољима $\mathbb{Q}[\sqrt{b}]$.

Завршимо ово поглавље још једном, можда и најзначајнијом применом линеарних рекурентних једначина посебно у „такмичарским” задацима (о другим применама позабавићемо се у наредним поглављима).
Размотримо следећи проблем: претпоставимо да је низ $\{a_n\}$ задат не неки начин и да нпр. треба доказати да је сваки члан овог низа квадрат природног броја, тј. да је $a_n = x_n^2$, где је $\{x_n\}$ низ чији су чланови природни бројеви. Као што смо видели код низова задатих линеарним рекурентним једначинама, ово је најчешће тешко урадити директно, јер би у овом случају требало доказати да је корен из суме два ирационална броја, или евентуално (развојем) корен суме великог броја чланова, природан број (овде евентуално може помоћи коришћене особина $\mathbb{Z}[\sqrt{b}\,]$). Зато би било врло корисно уколико бисмо и на неки други начин могли да одредимо низ $\{x_n\}$, тј. уколико бисмо нашли неку рекурентну једначину коју овај низ задовољава. У општем случају ова рекурентна једначина не мора постојати, или имати једноставан облик, али у многим задацима оваква рекурентна једначина ће постојати, и чак више биће линеарна. Зато у сваком случају треба испробати да ли низ $\{x_n\}$ задовољава неку линеарну (не обавезно хомогену, али у најгорем случају са $b_n = c$) рекуренту једначину, и то тако што се испита да ли за првих неколико чланова (који се директно одређују) то испуњава. Наравно прво покушамо да видимо да ли дати низ задовољава једначину другог реда, затим трећег, итд... Не треба покушавати са једначинама реда већег од нпр. 5 (најчешће ће бити реда два или евентуално три и моћи ће да се одреде готово напамет).

Следећи пример ћемо урадити на два начина, тражењем рекурентне једначине за $\{x_n\}$ и коришћењем $\mathbb{Z}[\sqrt{b}]$:

Пример 8. (Румунија 2002) Низ $\{a_n\}$ дефинисан је са $a_0 = a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 14a_n - a_{n-1}$, за $n \geq 1$. Доказати да је за свако $n \geq 0$ број $2a_n - 1$ квадрат природног броја.

Прво решење. Као што је претходно речено узмимо да је $2a_n - 1 = x_n^2$ и одредимо рекурентну једначину за $\{x_n\}$. Из рекурентне једначине за $\{a_n\}$ директно одређујемо $a_2 = 13$, $a_3 = 181$, $a_4 = 2521$, $a_5 = 35113$, итд., односно $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$, $x_3 = 19$, $x_4 = 71$, $x_5 = 265$, итд. Одмах можемо приметити да за почетне чалнове важи $x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$, што даље покушавамо да докажемо индукцијом. Како је $x_{n+2}^2 = 2a_{n+2} - 1 = 28a_{n+1} - 2a_n - 1 = 14x_{n+1}^2 - x_n^2 + 12$, довољно је доказати да за чланове низа $\{x_n\}$ важи једнакост $x_{n+2}^2 = 14x_{n+1}^2 - x_n^2 + 12$. Ово доказујумо коришћењем Теореме 4 (како ?). $\square$

Друго решење. Урадимо овај задатак и коришћењем особина поља $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$. Као и у примеру 1 одређујемо решење дате рекурентне једначине и добијамо

$$a_n = \frac{2\sqrt{3}-3}{4\sqrt{3}}(7+4\sqrt{3})^n + \frac{2\sqrt{3}+3}{4\sqrt{3}}(7-4\sqrt{3})^n = \frac{2\sqrt{3}-3}{4\sqrt{3}}(2+\sqrt{3})^{2n} + \frac{2\sqrt{3}+3}{4\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})^{2n}.$$

Сада је

$$\begin{aligned} 2a_n - 1 &= \frac{(2\sqrt{3}-3)(2+\sqrt{3})^{2n} + (2\sqrt{3}+3)(2-\sqrt{3})^{2n} - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \\ &= \frac{(2\sqrt{3}-3)^2(2+\sqrt{3})^{2n} + 3\cdot(2-\sqrt{3})^{2n} - 2\sqrt{3}(2\sqrt{3}-3)}{2\sqrt{3}(2\sqrt{3}-3)}. \end{aligned}$$

Како је $2\sqrt{3}(2\sqrt{3}-3) = (\sqrt{3}(1-\sqrt{3}))^2$, то је

$$2a_n - 1 = \left(\frac{(2\sqrt{3}-3)(2+\sqrt{3})^n - \sqrt{3}\cdot(2-\sqrt{3})^n}{\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}\right)^2.$$

Значи $2a_n - 1$ је квадрат у $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$, па како је $2a_n - 1 \in \mathbb{Z}$, то је $2a_n - 1$ квадрат и у $\mathbb{Z}$, или 3 пута квадрат (ово није ништа страшно само претпоставите да је облика $(a+b\sqrt{3})^2$ и убрзо ћете добити да су a и b цели и да је један једнак 0). Како сви чланови низа дају остатак 1 по модулу 3 (доказ индукцијом), то $2a_n - 1$ није дељиво са 3. Овим је доказ у потпуности завршен. □

Једном од метода приказаних у овом решењу можете решити и задатке 10,11 и 13.

§ Нелинеарне рекурентне једначине

У претходним поглављима разматране су линеарне (и то са константим коефицијентима) рекурентне једначине, њихово решавање и неке од примена. Видели смо да се у неким случајевима чак ни ове најједноставније једначине не могу решити, па је некако јасно да за нелинеарне рекурентне једначине не постоји општи метод за решавање и да се оне не могу у општем случају решити. Самим тим методи за решавање варирају од задатка до задатка и кључну улогу у њиоховом решавању имају „идеје". „Идеје" се најчешће своде на увођење неких смена или посматрања неких израза у којима учествују чланови датог низа. Сврха овог поглавља је да покаже неке основне методе и идеје кроз задатке, као и да вас оспособи да и сами долазите до „идеја".

Најосновнији метод за решавање нелинеарних рекурентних једначина је метод повећавања степена једначине. Овај метод се своди на записивање дате једначине за степен више (тј. замењивањем у датој једначини сваког појављивања n са $n+1$) и затим комбиновањем (нпр. сабирањем или одузимањем) добијене две једначине. Наравно, може се узети и једначина за већи број степена виша, и може се комбиновати више таквих једначина.

Следећи пример илуструје овај метод:

Пример 9. Одредити низ $\{x_n\}$ задат са $x_0 = 1$ и рекурентном једначином $x_{n+1} = 2x_n + \sqrt{3x_n^2 + 1}$, за $n \geq 0$.

Решење. Из дате рекурентне једначине јасно је да су сви чланови низа позитивни и да је самим тим низ растући. Из дате једначине непосредно следи $x_{n+1} - 2x_n = \sqrt{3x_n^2 + 1}$, односно квадрирањем

$$x_{n+1}^2 + x_n^2 - 4x_{n+1}x_n = 1.$$

Ова једначина важи за све $n \geq 0$, па важи и за $n+1$, тј.

$$x_{n+2}^2 + x_{n+1}^2 - 4x_{n+2}x_{n+1} = 1.$$

Одузимањем две добијене једначине добијамо $x_{n+2}^2 - x_n^2 - 4x_{n+2}x_{n+1} + 4x_{n+1}x_n = (x_{n+2} - x_n)(x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n)$. Како је низ растући, то мора бити $x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n = 0$, за свако $n \geq 0$. Даље ову једначину решавамо као у примеру 1. □

Због важности ове методе и велике примене урадићемо још један задатак у коме се појављује и још једна мања идеја:

Пример 10. Низ бројева $\{a_n\}$ задат је са $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ и

$$a_{n+3} = \frac{1 + a_{n+2}a_n}{a_n}, \quad \text{за } n \geq 1.$$

Доказати да је сваки члан овог низа природан број.

Решење. Очигледно су сви чланови низа позитивни, па је доовљно доказати да су сви чланови низа цели. Доказ изводимо индукцијом. Из дате једначине одмах добијамо $a_{n+3}a_n = 1 + a_{n+2}a_n$. Записивањем датог израза за један степен више добијамо $a_{n+4}a_{n+1} = 1 + a_{n+3}a_{n+2}$, па је одузимањем претходне једнакости $a_{n+4}a_{n+1} - a_{n+3}a_{n+2} - a_{n+3}a_{n+1} + a_{n+2}a_n = 0$, односно

$$\frac{a_{n+4} + a_{n+2}}{a_{n+3}} = \frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}}. \tag{$*$}$$

Приметимо да је израз са леве стране у ствари једнак изразу са десне стране само два степена нижем. Ово нам је и био циљ код растављања, јер сада важи и (даљим смањивањем степена у $(*)$)

$$\frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_n + a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-2} + a_{n-4}}{a_{n-3}} = \cdots = \frac{a_{t+2} + a_t}{a_{t+1}},$$

где је у последњој једнакости $t = 1$ уколико је n непаран, односно $t = 2$ уколико је n паран. Како је $\dfrac{a_3 + a_1}{a_2} = 2$ и $\dfrac{a_4 + a_2}{a_3} = 3$, то је $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, за непарно n, односно $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$, за парно n. У оба случаја је a_{n+2} цео, чиме је доказ завршен. $\square$

Вратимо се још једном на једначину $(*)$ у претходном решењу. Као што је у решењу и истакнуто циљ од почетка, тј. од одузимања једначине за један степен више, нам је био да направимо неки израз овог облика (осим уколико се задатак не заврши сам по себи као у примеру 9), тј. израз у коме је са обе стране једнакости неки низ који се само разликује у степену. У претходном задатку једнакост $(*)$ је очигледно добијена, али то није увек случај. У наредном задатку ћемо покушати да наместимо израз облика $(*)$:

Пример 11. (Мала олимпијада 1980) Низ $\{x_n\}$ је решење рекурентне једначине

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1}^2 + c}{x_n}.$$

Ако су x_0, x_1 и $\dfrac{x_0^2 + x_1^2 + c}{x_0 x_1}$ природни бројеви, доказати да су сви чланови низа $\{x_n\}$ природни бројеви.

Решење. Посматрајмо једначину степена за један већег, тј. $x_{n+3}x_{n+1} = x_{n+2}^2 + c$. Уколико у њу заменимо x_{n+2} добијамо $x_{n+3}x_{n+1} = \left(\dfrac{x_{n+1}^2 + c}{x_n}\right)^2 + c$. Видимо да додавањем x_{n+1}^2 десна страна може да се растави, тј. важи

$$x_{n+3}x_{n+1} + x_{n+1}^2 = x_{n+2}^2 + c + x_{n+1}^2 = \frac{(x_{n+1}^2 + c)(x_{n+1}^2 + c + x_n^2)}{x_n^2} = \frac{x_{n+2}}{x_n}(x_{n+1}^2 + c + x_n^2).$$

Сада јасно важи и $\dfrac{x_{n+2}^2 + c + x_{n+1}^2}{x_{n+2}x_{n+1}} = \dfrac{x_{n+1}^2 + c + x_n^2}{x_{n+1}x_n}$, што је израз облика $(*)$. Задатак завршавамо на исти начин као и претходни. $\square$

Напоменимо да се претходна три задатка (наравно) могу решити и методом са краја претходног поглавља, тј. тражењем линеарне једначине коју задовољава дати низ (у другом задатку једначина није баш линеарна, али се лако може „набости”).

У наредних неколико задата показаћемо како можемо доћи до „идеја” (односно поступака) за решавање неких рекурентних једначина:

Пример 12. Одредити низ $\{x_n\}$ дефинисан са $x_0 = m \geq 1$ и

$$x_{n+1} = 2x_n^2 - 1, \qquad \text{за } n \geq 0.$$

Решење. Размотримо ову рекуренту једначину. Уколико би она гласила нпр. $x'_{n+1} = 2x_n'^2$, низ бисмо лако одредили смањивањем степена једначине ($x'_{n+1} = 2x_n'^2 = 2(2x_{n-1}'^2)^2 = \cdots$). Да изведемо нешто као код те једначине онемогућује нас -1 на десној страни. Зато би било идеално уколико бисмо могли неком сменом да са десне стране уклонимо константу и да при томе добијемо неку рекуренту једначину облика као за низ $\{x'_n\}$. Нека је зато $x_n = \dfrac{y_n + y_n^{-1}}{2}$ (y_n је низ реалних бројева, јер је сваки члан низа ≥ 1). Тада је

$$x_{n+1} = 2\left(\frac{y_n + y_n^{-1}}{2}\right) - 1 = \frac{y_n^2 + y_n^{-2}}{2} = \frac{y_{n+1} + y_{n+1}^{-1}}{2},$$

где је $y_{n+1} = y_n^2$. Враћањем уназад добијамо $y_n = y_0^{2^n}$, где је y_0 једно од решења квадратне једначине $y_0^2 - 2my_0 + 1 = 0$. Коначно

$$x_n = \frac{(m + \sqrt{m^2 - 1})^{2^n} + (m - \sqrt{m^2 - 1})^{-2^n}}{2}. \qquad \square$$

На сличан начин можемо решити задатке ???

Пример 13. Одредити низ $\{x_n\}$ дефинисан са $x_0 = m$ и

$$x_{n+1} = x_n \cdot (2 - cx_n), \qquad \text{за } n \in \mathbb{N}.$$

Решење. Претпоставимо за почетак да је $c = 1$. Тада је $x_{n+1} = x_n \cdot (2 - x_n) = 2x_n - x_n^2 = 1 - (1 - x_n)^2$, односно $1 - x_{n+1} = (1 - x_n)^2$, а ову једначину лако решавамо смањивањем степена уназад. Значи једино што нам преостаје је да уклонимо c. Помножимо зато обе стране са c и уведимо логичну смену $cx_n = y_n$

(све ово радимо уколико је $c \neq 0$, а тад имамо геометријски низ). За низ y_n важи претходна једначина, тј. $y_{n+1} = y_n \cdot (2 - y_n)$. Када испишемо све описане кораке добијамо

$$x_n = \frac{1}{c}\left(1 - (1 - cm)^{2^k}\right). \qquad \square$$

Следећи задатак је прави пример коришћења смена:

Пример 13. (Мала Олимпијада 2002) Низ $\{x_n\}$ одређен је условом $x_2 = 1, x_3 = 1$ и

$$(n+1)(n-2) \cdot x_{n+1} = n(n^2 - n - 1) \cdot x_n - (n-1)^3 \cdot x_{n-1} \quad \text{за} \quad n \geq 3.$$

Доказати да је x_n цео број ако и само ако је n прост број.

Решење. Рекурентна једначина коју низ $\{x_n\}$ задовољава је доста гломазна, тако да прво што желимо да урадимо је да је некако „смањимо”. Приметимо да се уз x_{n+1} налази $n+1$, уз x_n број n, а уз x_{n-1} број $n-1$, тако да сменом $y_n = n \cdot x_n$ те бројеве можемо скратити, односно

$$(n-2) \cdot y_{n+1} = (n^2 - n - 1) \cdot y_n - (n-1)^2 \cdot y_{n-1}.$$

Даље, можемо приметити да је збир коефицијената уз чланове низу у једначини једнак са леве и десне стране. Ово значи и да уколико низ $\{y_n\}$ задовољава дату једначину и да низ $\{y_n + c\}$, за свако c, задовољава дату једначину. То би такође значи и да уколико у изразу не би било y_{n-1} (тј. уколико би једначина гласила $(n-2) \cdot y'_{n+1} = (n^2 - n - 1) \cdot y'_n - (n-1)^2$) узимањем $c = 1$ могли бисмо да се ослободимо последњег члана, тј. добили бисмо израз облика $y'_{n+1} = f(n) \cdot y'_n$ који знамо да решимо (смањивањем степена једначине). Зато покушавамо да се ослободимо y_{n-1} (можда ово све неће испасти како смо желели, али то нам је идеја, односно мотивација да извршимо следеће кораке). Поделимо зато једначину са y'_{n-1}, чиме добијамо

$$(n-2) \cdot \frac{y'_{n+1}}{y'_{n-1}} = (n^2 - n - 1) \cdot \frac{y'_n}{y'_{n-1}} - (n-1)^2,$$

и уведимо смену $\dfrac{y'_n}{y'_{n-1}} = z_n$. Новодобијена једначина се своди на $(n-2) \cdot z_{n+1} \cdot z_n = (n^2 - n - 1) \cdot z_n - (n-1)^2$. Нисмо добили баш оно што смо желели, али ипак основни циљ се може остварити, тј. $(n-1)^2$ се може уклонити увођењем смене $t_n = z_n - 1$. Једначина сређивањем постаје

$$\frac{t_{n+1} \cdot (t_n + 1)}{t_n} = \frac{(n-1)^2}{n-2}.$$

На овом месту треба застати. Јасно је да ова једнакост не може да се сведе на једнакост облика $(*)$ (из примера 10). Међутим (на сву срећу) можемо приметити да је $t_n = n - 2$ једно решење ове једначине, а оно је јединствено одређено почетним члановима. Зато наместимо почетну константу c (за коју можемо транслирати низ y_n до низа y'_n у првој једначини) тако да је $t_2 = 0$ и $t_3 = 1$. Тада је $z_2 = 1$ и $z_3 = 2$, односно $y'_2/y'_1 = 1$ и $y'_3/y'_2 = 2$. Како је из почетних услова $y'_3 - y'_2 = 1$, то мора бити $y'_2 = 1$ и $y'_3 = 2$, односно $c = -1$. Коначно

$$x_n = \frac{y_n}{n} = \frac{y'_n - 1}{n} = \frac{(n-1)! - 1}{n},$$

јер је $y'_n = (n-1)!$, што се добија из $y'_n = z_n \cdot y'_{n-1}$ смањивањем степена ($z_n = t_n + 1 = n - 1$). Сада тврђење задатка следи на основу Вилсонове теореме. $\square$

Овај задатак се може „решавати” и на други мање математички начин. Наиме, израчуна се првих неколино чланова низа и затим се посматра да ли они одговарају неком познатом изразу (који зависи само од n) који је цео ако и само ако је n прост број. Најпознатији овакав израз је Вилсонова теорема, па се ње вероватно прво треба сетити (наравно ја је се нисам сетио!?). Решење се завршава тако што се индукцијом покаже да тај низ заиста задовољава дату једначину. Треба напоменути и да се ови задаци праве тако што се узме неки релативно познат израз за који се касније нађе одговарајућа рекурентна веза, те се „набадање” решења међу познати изразима не мора обавезно завршити безуспешно.
О свему из претходног пасусу наставићемо у следећој глави.

За вежбу пробајте задатак ???, који је додуше доста лакши (на оба начина, наравно прво „набадањем” решења).

Завршимо ову главу следећим изузетно интересантним задатком:

Пример 14. (ИМО 1994, предлог) Нека је $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$ за $x \neq 0$. Дефинишимо $f^{(0)}(x) = x$ и $f^{(n)}(x) = f(f^{(n-1)}(x))$ за све $n \in \mathbb{N}$ и $x \neq 0$. Доказати да за све $n \in \mathbb{N}_0$ и $x \neq -1, 0, 1$ важи

$$\frac{f^{(n)}(x)}{f^{(n+1)}(x)} = 1 + \frac{1}{f((\frac{x+1}{x-1})^{2^n})}.$$

Решење. Идеја задатка је на неки начин слична идеји из примера 3, тј. представићемо $f^{(n)} = \dfrac{p_n(x)}{q_n(x)}$, где су p_n и q_n неке функције. Тада мора важити

$$\frac{p_{n+1}(x)}{q_{n+1}(x)} = f^{(n+1)}(x) = f(f^{(n)}(x)) = \frac{\left(\dfrac{p_n(x)}{q_n(x)}\right)^2 + 1}{2\dfrac{p_n(x)}{q_n(x)}} = \frac{(p_n(x))^2 + (q_n(x))^2}{2p_n(x)q_n(x)},$$

па зато наместимо да је $p_{n+1}(x) = (p_n(x))^2 + (q_n(x))^2$ и $q_{n+1} = 2p_n(x)q_n(x)$. Сада је јасно $p_{n+1}(x) \pm q_{n+1}(x) = (p_n(x) \pm q_n(x))^2$, па је (смањивањем степена једначине) $p_{n+1}(x) \pm q_{n+1}(x) = (p_0(x) \pm q_0(x))^{2^{n+1}}$. Узимањем $p_0(x) = x$ и $q_0(x) = 1$ добијамо

$$p_n(x) \pm q_n(x) = (x \pm 1)^{2^n}.$$

Из дефиниције функције f и претходног добијамо

$$1 + \frac{1}{f((\frac{x+1}{x-1})^{2^n})} = \frac{((x+1)^{2^n} + (x-1)^{2^n})^2}{(x+1)^{2^{n+1}} + (x-1)^{2^{n+1}}} = \frac{(p_n(x)+q_n(x)+p_n(x)-q_n(x))^2}{p_{n+1}(x)+q_{n+1}(x)+p_{n+1}(x)-q_{n+1}(x)} = \frac{2p_n(x)^2}{p_{n+1}(x)} = \frac{p_n(x)q_{n+1}(x)}{p_{n+1}q_n(x)},$$

чиме је доказ завршен. $\square$

Иако се претходни задатак (наравно) може решити и индукцијом (што бисте требали и сами да пробате), претходно изложено решење је веома поучно. Наиме, честа идеја (и то не само код низова него и код нпр. функција) је да се низови запишу у облику $a_n = x_n/y_n$ (односно $a_n = x_n \cdot y_n$), па да се затим траже низови x_n и y_n, при чему се они намештају да задовољавају што погодније рекурентне једначине.

За вежбу пробајте задатак ???

Следећи задатак користи једну карактеристичну смену, која увек треба бити на уму када су у питању изрази са квадратима и квадратним коренима:

Пример 15. (ИМО 1989, предлог) Низови $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ задати су са

$$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - a_n^2}}, \qquad \text{за } n \in \mathbb{N},$$

$$b_0 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{\sqrt{1 + b_n^2} - 1}{b_n}, \qquad \text{за } n \in \mathbb{N}.$$

Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи неједнакост

$$2^{n+2}a_n < \pi < 2^{n+2}b_n.$$

Решење. И само π које се спомиње у задатку асоцира на неку тригонометрију. При томе рекурентна једначина за a_n се добро понаша са синусима (или косинусима), док се друга добро понаша са тангенсима. Значи нека је $a_n = \sin\alpha_n$ и $b_n = \operatorname{tg}\beta_n$. Из дефиниције $\{a_n\}$ имамо $\alpha_0 = \pi/4$ и

$$\sin\alpha_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - \sin{\alpha_n}^2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha_n}{2}} = \sin\frac{\alpha_n}{2},$$

тј. можемо узети да је $\alpha_{n+1} = \dfrac{\alpha_n}{2}$ и самим тим $\alpha_n = 2^{-n-2} \cdot \pi$. Слично из дефиниције $\{b_n\}$ имамо $\beta_0 = \pi/4$ и

$$\operatorname{tg}\beta_{n+1} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}\beta_n^2} - 1}{\operatorname{tg}\beta_n} = \frac{1 - \cos\beta_n}{\sin\beta_n} = \frac{2\sin^2\dfrac{\beta_n}{2}}{2\sin\dfrac{\beta_n}{2}\cos\dfrac{\beta_n}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\beta_n}{2},$$

тј. можемо узети да је $\beta_{n+1} = \dfrac{\beta_n}{2}$ и самим тим $\beta_n = 2^{-n-2}\pi = \alpha_n$.
Тражена неједнакост следи из познате неједнакости $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

На крају овог поглавља напоменимо и да је сваки низ уједно и једна функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, и да се самим тим рекурентне једначине могу записати као функционалне и обрнуто. Самим тим идеје које су обрађене у тексту о функционалним једначинама овде се не појављају (да не би дошло до непотребног понављања), те није лоше тај материјал још једном (или први пут) прелистати.

§ Примена рекурентних једначина у комбинаторним задацима

У другом поглављу видели смо како се линеарне рекурентне једначине могу примењивати приликом решавања неких других низова. За разлику од тога у овом поглављу ће бити показана примена пре свега линеарних рекурентних једначина у тотално различитој области математике, у комбинаторици. Наиме, показаћемо како се многа пребројавања могу вршити конструисањем рекурентних веза и како се могу доказати неки интересантни идентитети.

У основи свих ових задатака је идеја (односно циљ) да се направи веза између објеката које пребројавамо за неколико узастопних вредности n (укупнан број објеката). Често се ово неће моћи извести директно, па ће бити потребно пребројавати и неке помоћне објекте (тј. имаћемо још неколико помоћних низ), чиме добијамо систем рекурентних једначина.

Кренимо прво једним лакшим задатком:

Пример 16. (Савезно 2000, 2 раз) Колико има низова $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ цифре из скупа $\{0, 1, 2, 3\}$, таквих да за свако $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ важи

$$x_i x_{i+1} \notin \{12, 13, 32, 33\}\ ?$$

Решење. Нека је са a_k означен тражени број низова дужине k. Приметимо да се сваки низ дужине $k+1$ добија од неког низа дужине k додавањем 0,1,2 или 3 на крај, при чему се 2 и 3 може додати само уколико се низ завршава са 0 или 2. Значи уколико са $a_k^{(0)}$ означимо укупан број тражених низова који се завршавају са 0, а са $a_k^{(2)}$ укупан број тражених низова који се завршава са 2 добијамо да важи

$$a_{k+1} = 2a_k^{(0)} + a_k + 2a_k^{(2)} + a_k.$$

Међутим како се сваки низ дужине k који се завршава са 0 добија одузимањем 0 са краја неког низа дужине $k-1$, важи $a_k^{(0)} = a_{k-1}$. Низ дужине k који се завршава са 2 добија се од низа дужине $k-1$ који се завршава са 0 или 2, односно $a_k^{(2)} = a_{k-1}^{(0)} + a_{k-1}^{(2)}$. Сада смо добили систем једначина $a_{k+1} = 2a_{k-1} + 2a_k + 2a_k^{(2)}$ и $2a_k^{(2)} = a_{k-2} + a_{k-1}^{(2)}$. Из прве можемо изразити $a_k^{(2)}$ преко a_k, па заменом у другу добијамо $a_{k+1} = 3a_k$, односно $a_k = 3^{k-1}a_1 = 4 \cdot 3^{k-1}$ (јасно је $a_1 = 4$). □

Следећи пример је нешто компликованији, али користи исту технику:

Пример 17. (Савезно 2004, 4 раз) Нека је $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.Колико има подсупова B скупа A, таквих да за свако $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ важи: ако $n \in B$ и $n+2 \in B$, онда бар један од бројева $n+1$ и $n+3$ такође припада скупу B?

Решење. Ми ћемо урадити општији задатак (овим ћемо решење само олакшати), тј. одредићемо број оваквих низова дужине $k \geq 3$ (при чему описано својство важи за све $n \in \{1, 2, \ldots, k-3\}$). Означимо тај број са a_k. Број a_k је у ствари једнак броју низова нула и јединица дужине k који не садрже подниз облика 1010. Наиме сваки подскуп се може представити као низ нула и јединица дужине k где је на i-том месту 1 ако и само ако је i унутар подскупа. При томе је дати услов јасно еквивалентан са непојављивањем подниза 1010. Направимо везу између a_{k+1} и a_k. Јасно је да се од сваког низа дужине k додавањем 1 на крај добија низ дужине $k+1$, док је додавње 0 могуће једино уколико се низ дужине k не завршава са 101. Значи $a_{k+1} = 2a_k - a_k^{(101)}$, где је $a_k^{(101)}$ број низова дужине k који се завршавају са 101. Као и у претходном разматрању јасно је $a_k^{(101)} = a_{k-1}^{(10)}$ (на сваки члан низа се може додати 1 и добиће се „исправан” низ). Даље је $a_{k-1}^{(10)} = a_{k-2}^{(1)} - a_{k-2}^{(101)} = a_{k-3} - a_{k-2}^{(101)}$. Овим добијамо систем $a_{k+1} = 2a_k - a_k^{(101)}$ и $a_k^{(101)} = a_{k-3} - a_{k-2}^{(101)}$, чијим решавањем добијамо рекурентну једначину за a_k, тј. важи

$$a_{k+1} = 2a_k - a_{k-1} + 2a_{k-2} - a_{k-3}.$$

Да бисмо низ у потпуности одредили довољно је пронаћи a_1, a_2, a_3 и a_4. За њих важи $a_1 = 2$, $a_2 = 2^2$, $a_3 = 2^3$ и $a_4 = 2^4 - 1$. Број a_{11} се сада може и директно одредити и једнак је $a_{11} = 1256$. □

У одељку са задаци дати су многи примери који се могу рашити као што је овде приказано. То су пре свега задаци ???.

У неким случајевима није потребно одредити тачан број објеката са датом особине, него је довољно доказати да их је нпр. барем 1. У овим случајевима конскуишемо рекурентне неједначине, као што ће бити приказано у следећем примеру:

Пример 18. (БМО 1996, 4 зад) Доказати да постоји подскуп A скупа $\{1, 2, 3, \ldots, 2^{1996} - 1\}$ са следећим својствима:

(а) $1 \in A$ и $2^{1996} - 1 \in A$;
(б) сваки елемент из $A \setminus \{1\}$ је збир два (не обавезно различита) елемента из A;
(в) A нема више од 2012 елемената.

Решење. Нека је $f(n)$ најмањи број елемената који може садржати подскуп скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ који задовољава услове (а) и (б) (други услов у (б) је да садржи $n - 1$).
Потребно је доказати да је $f(2^{1996} - 1) \leq 2012$. Направимо зато везе између елемената облика $f(2^k - 1)$. Приметимо прво да се подскуп скупа $\{1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ са $f(2^n - 1)$ елемената додавањем $2^{n+1} - 2$ и $2^{n+1} - 1$ може продужити до подскупа скупа $\{1, 2, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$ који при томе задовољава услове (а) и (б) (јер је $2^{n+1} - 1 = 2^{n+1} - 2 + 1$ и $2^{n+1} - 2 = 2^n - 1 + 2^n - 1$). Овим смо уједно доказали и да је $f(2^{n+1} - 1) \leq f(2^n - 1) + 2$. Ова неједнакост ипак није довољно добра да бисмо завршили задатак (овим можемо добити само да је $f(2^{1996} - 1) \leq 3991$). Значи требамо направити још неку везу између $f(2^k - 1)$. Како претходну оцену треба доста поправити требамо направити неку веза између чланова низа који нису толико „близу" један другом, тј. треба нам веза између удаљенијих чланова низа како бисмо добили бољу оцену. Направимо зато везу између $f(2^n - 1)$ и $f(2^{2n} - 1)$. Јасно је да се подскуп од $\{1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ са $f(2^n - 1)$ елемеанта може допунити са $\{2(2^n - 1), 2^2(2^n - 1), \ldots, 2^n(2^n - 1), 2^{2n} - 1\}$ до подскупа од $\{1, 2, \ldots, 2^{2n} - 1\}$ који испуњава услове (а) и (б). Овим је доказано да је $f(2^{2n} - 1) \leq f(2^n - 1) + n + 1$. Сада тврђење задатка следи из низа неједнакости

$$f(2^{1996} - 1) \leq f(2^{998} - 1) + 999 \leq f(2^{499} - 1) + 500 + 999 \leq f(2^{498} - 1) + 2 + 1499 \leq f(2^{249} - 1) + 250 + 1501 \leq$$
$$\leq f(2^{248} - 1) + 2 + 1751 \leq f(2^{124} - 1) + 125 + 1753 \leq f(2^{62} - 1) + 63 + 1878 \leq f(2^{31} - 1) + 32 + 1941 \leq$$
$$\leq f(2^{30} - 1) + 2 + 1973 \leq f(2^{15} - 1) + 16 + 1975 \leq f(2^{14} - 1) + 2 + 1991 \leq f(2^7 - 1) + 8 + 1993 \leq$$
$$\leq f(2^6 - 1) + 2 + 2001 \leq f(2^3 - 1) + 4 + 2004 \leq f(2^2 - 1) + 2 + 2008 \leq f(1) + 1 + 2010 = 2012.$$ □

На слича начин се може урадити задатак ???

На крају овог поглавља покажимо и како се низови могу користити приликом доказивања идентитета и то оних код којих је са једне стране једнакости сума неких израза везаних за биномне коефицијентне, а са друге израз који је решење неке линеарне рекурентне једначине. Овде поступамо на начин супротан од оног у претходном делу поглавља. Наиме, прво одређујемо рекурентну једначину коју задовољава низ са једне стране једнакости, а затим и комбинаторне објекате који задовољава ту рекурентну једнчина. На крају чисто комбинаторним методама доказујемо да је број тих објеката управо једнак датој суми израза са биномним коефицијентима. За комбинаторне објекте најчешће узимамо низове неколико знакова са неким својсвима, нпр. да не садрже дати подниз (слично као у примерима 14 и 15)

Урадимо следећи карактеристичан пример:

Пример 19. Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи идентитет

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k+1}{k} = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n-k}{k} 3^{n-2k} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

Решење. Јасно је да је рекурентна једначина коју задовољава низ

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

једначина $a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$, са почетним условима $a_0 = 1$ и $a_1 = 3$. Одредимо сада и комбинаторне објекате чији је број дат овом рекурентном једнахцином. Из дате једначине је $a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$, па је логично да узмемо да је a_n број низова дужине n чији су сви чланови из скупа $\{0,1,2\}$ (узимамо трочлани скуп, јер имао везу са $3a_{n+1}$), при чему ће неки подниз бити забрањем. Забрањени подниз ће бити такав да уколико од сваког дозовљеног низа дужине $n+1$ направимо све могуће низове дужине $n+2$ (тј. тачно њих $3a_{n+1}$), тачно њих a_n биће забрањено. Ово ће нпр. бити тачно уколико је забрањен подниз облика 12, јер се тада сваки недозвољени описани низ дужине $n+2$ добија управо додавањем 12 на произвољни дозвољени низ дужине n. Коначно a_n описујемо као број низова дужине n који не садрже подниз 12. Пређимо сада на доказ датих једнакости. Докажимо прво да је

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k+1}{k}.$$

Покушајмо зато да интерпретирамо објекте који одговарају a_n тако да њиховов број задовољава горњу суму. Прво a_n је број низова дужине n, а у датој суми се појављују биномни коефицијенти са $2n$ (и још нечин). Зато је логично да сваки претходно описани низ дужине n заменимо низом дужине $2n$ на што погоднији начин. То можемо учинити уколико сваку цифру првог низа заменимо са две цифре у другом, а ово најлакше постижемо уколико их заменимо њиховим бинарним записом. Одредимо сада какве смо низове добили. Како се у првобитним низовима не појављује 3, то у новодобијеним немамо подниз 11, где је прва цифра на парном месту, а како немамо ни подниз 12, то у новодобијеном немамо ни 0110. Сада није тешо закључити да се новодобијени низови могу интерпретирати као сви низови дужине $2n$ састављени од цифара из скупа $\{0,1\}$ који не садрже подниз 11. Како нам је задата сума биномних коефицијената, то је логично да сада број новодобијених низова бројимо по нечему, а најлогичније (чак и једино логично) је да их бројимо по броју јединица који се у њима појављује. Нека је зато a_k^n број тражених низова дужине $2n$ у којима има тачно k јединица. Уколико бисмо доказали да је $a_k^n = \binom{2n-k+1}{k}$ овај део задатка би био завршен. Последње заиста важи (то је један школски задатак с којим не би требали да имате проблема), па зато можемо да пређемо на доказ друге једнакости, тј.

$$a_n = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n-k}{k} 3^{n-2k}.$$

На први поглед ова сума изгледа далеко компликованије него прва (имамо „ружније” границе, чланове са знаком $-$, итд.), међутим овај део задатка је (ваљда) једноставнији за доказ. Наиме, границе се јасно могу продужити до n, а имамо и чланове 3^{n-2k} који нам говоре да можемо радити са првобирним низовима (јер су њихови чланови из трочланог скупа $\{0,1,2\}$). Израз $2k$ у експоненту сугерише поновно прављење неких парова, биномни коефицијент показује неку сличност са претходним делом. Овде ћемо се послужити стандардним комбинаторним „триком”. Бројаћемо објекте који не задовољавју наше својство, тј. у нашем случају број низова дужине n састављених од $\{0,1,2\}$ који садрже подниз 12. Јасно је да и у овом случају због суме биномних овај број треба пребројавати по нечему. Логично пребројаваћемо по броју појављивања подниза 12, чиме из формуле укључења и искључења добијамо

$$b_n = \sum_{k=1}^{[n/2]} (-1)^{k+1} \binom{n-k}{k} 3^{n-2k}$$

(Овде смо користили да је број низова који садрже барем k подниза 12 једнак $\binom{n-k}{k} 3^{n-2k}$). Како је $a_n + b_n = 3^n$, и овај део задатка је завршен. $\square$

Многе овакве и компликованије задатке (а и праве грозоте) можете наћи у књизи *Комбинаторика на речима* аутора Радета Дорословачког и Оливере Марковић.

§ „Чудно” задати низови

У досадашњем делу текста низове смо углавном задавали алгебарски или комбинаторно, и рекурентне везе које су ти низови задовољавали повезивали су неколико узастопних чланова. У овом поглављу обрадићемо неколико задатака код којих ово није случај.
Општи метод наравно опет немамо, те ћемо се задржати на неким сугестијама. Као прво (и најважније), што је низ „чуднији” то је већа потреба (и корист) да се испише његових првих неколико чланова (па можда и не само неколико). Наиме, можда се тако може закључити да међу члановима низа важи неко интересантно

својсто, а можда се чак може и набости формула. Код набадања формуле поступајте логично. Уколико имамо везе између чланови са индексима $2n$ и n можда решење има везе са бинарном репрезентацијом, уколико се чланови стално множе са индексом можда решење има везе са факторијелима (или двоструким факторијелима) и слично.

Следећи пример у својој поставци осликава прави (поступан) начин кајим се нестандардне рекурентне једначине требају решавати:

Пример 20. (Квант М730) Низ је задат са $a_1 = 0$ и $a_{2n+1} = a_{2n} = n - a_n$.

(а) Наћи првих 20 чланова и a_{1982}.
(б) Доказати да се сваки број налази у низу 2 или 4 пута. Колико се пута у низу појављује 2^k?
(в) Доказати да је $a_n - a_{n-1} = \begin{cases} 1, & \text{ако } 2^{2k+1} \parallel n \\ 0, & \text{ако } 2^{2k} \parallel n \end{cases}$.
(г) Доказати да за бесконачно много n важи $a_n = \dfrac{n}{3}$.
(д) Да ли постоји n такав да је $|a_n - n| > 1982$.
(ђ) Доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = \dfrac{1}{3}$.

Решење. Осим самог решења делова задатка показећемо и зашто је задатак логично решавати баш овако. Првих 20 чланова низа приказани су у следећој табели

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_n	0	1	1	1	1	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6

Уколико имате низ који споро расте (као нпр. овај) слободно можете написати и првој педесетак чланова. Уколико то урадимо у овом случају одмах примећујемо да се узастопни чланови низа разликују за 0 или 1 и да у низу имамо по две или четири узастопне једнаке вредности. Наравно првих 50 чланова не даје доказ, па је следећи корак да то што смо приметили и докажемо. Доказе (као и код већине оваквих претпоставки) изводимо индукцијом. Претпоставимо да тврђење важи за све $k \le 2n+1$ (ово можемо јер чланови иду у паровима). Оно што ми требамо доказати је да $a_{2n+2} - a_{2n+1} \le 1$ и да уколико је $a_{2n+1} = a_{2n} = a_{2n-1} = a_{2n-2}$, да је $a_{2n+2} - a_{2n+1} = 1$. Уколико прво тврђење не би важило имали бисмо $n + 2 - a_n = a_{2n+1} + 2 \le a_{2n+2} = n + 1 - a_{n+1} \le n + 1 - a_n$, што је контрадикција. Уколико друго тврђење не би важило имали бисмо $n + 1 - a_{n+1} = a_{2n+2} = a_{2n} = n - a_n = a_{2n-2} = n - 1 - a_{n-1}$, тј. $a_{n-1} < a_n < a_{n+1}$, што је немогуће.
Сада је логично да поставимо питање када је разлика 0, а када 1 између узастопних чланова низа (пре свега парних). Одредимо зато разлику између a_n и a_{n+2} (где је n паран). Нека је $n = 2^k l - 2$, где је l непаран. Тада је

$$a_{2^k l} - a_{2^k l-2} = 2^{k-1} l - a_{2^{k-1} l} - 2^{k-1} l + 1 + a_{2^{k-1} l-1}.$$

Уколико је $k = 1$, важи $a_{n+2} - a_n = 1$ и при томе $2 \parallel n+2$, што је у складу са тврђењем задатка. У супротном, тј. уколико је $k \ge 2$ наставимо са дељењем индекса са два. Приметимо да $a_{2^{k-1}l} - a_{2^{k-1}l-1} = a_{2^{k-1}l} - a_{2^{k-1}l-2} = a_{2^{k'}l} - a_{2^{k'}l-2}$ узима вредност из скупа $\{0, 1\}$ коју не узима $a_{n+2} - a_n$, па се самим сваким дељењем са 2 и одговарајућа разлика мења. При томе дељања вршимо све док је $k' \ge 2$ (тј. новодобијено k'), што значи да је за k парно потребно извршити непарно дељења, а за k парно дељења. Коначно, последње значи и да је за k парно тражена разлика 1, а за k непарно тражена ралика 0.
Поставља се питање како бисмо се сами сетили да вршимо дељења индекса са 2, да нам то скоро директно није тражено у задатку. Одговор се крије у датој рекурентној једначини, јер она (а и њој сличне) „зове” на неке степене двојке. и у оваквим ситуацијама је то прва идеја коју требате имати на уму.
Сада већ полако можемо да кренемо са одређивањем експлицитне формуле за a_n. Овде ћемо се користити једном врло интересантном идејом. Наиме, вредност низа a_n је ништа друго него број оних $m \le n$ таквих да је $a_m - a_{m-1} = 1$, па је за вредност a_n довољно одредити на колико места до n-тог индекса овај низ расте. Како смо ми већ одредили на којим местима низ расте, довољно је пребројати их, тј. одредити колико има бројева $m \le n$ такви да $2^{2k+1} \parallel m$ (тј. колико има бројева m таквих да је највећи степен двојке који их дели непаран). Овде ћемо једноставно искористити формулу укључивања и искључивања, тј.

$$a_n = \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{8}\right] - \dots,$$

јер је $\left[\dfrac{n}{2^k}\right]$ број бројева $\le n$ који су дељиви са 2^k.
Преостали део задатка (тј. делове (г) и (д)) решава погодним одабиром броја n. Јасно је да ћемо n међу оним бројавима за које лако можемо срачунати a_n. За део под (г) треба узети $n = 3 \cdot 2^k$, за део под (д) $n = \dfrac{4^k - 1}{3}$, за довољно велико k (наравно могу се пронаћи и многи други). За део под (ђ) довољно је

послужити се са (врло) мало анализе. □

За следећи задатак се вероватно може рећи да је још „чуднији” од претходног:

Пример 21. Низ $\{a_n\}$ је дефинисан са $a_1 = 1$ и

$a_n =$ *најмањи природан број који се није појавио у низу тако да* n *дели суму првих* n *чланова низа.*

Доказати да је $a_{a_n} = n$.

Решење. Скица решења.
Приметимо да се a_n између осталог задаје и тако да $n \mid a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Уведимо зато низ $\{b_n\}$ такав да је $a_1+a_2+\ldots+a_n = nb_n$, за свако n. У следећој таблици приказано је првих неколико чланова низова $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
a_n	1	3	2	6	8	4	11	5	14	16	7	19	21	9	24	10	27		12
b_n	1	2	2	3	4	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	10	11		

Из ове таблице можемо приметити многе интересантне ствари за низови a_n и b_n. Најзначајније је индукцијом доказати:
(1) за све $i = 1, 2, \ldots, n-1$ је или $a_i \geqslant n$ или $a_{a_i} = i$.
за све $1, 2, \ldots, n-1$ је или $a_i = b_{i-1}$ или $a_i = i + b_{i-1}$.
Даље приметимо да се b_{n-1} не појављу пре него што је $a_n = b_{n-1}$. Значи b_n се појављују међу $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Даље, не могу оба a_n и a_{n+1} да задовољавају прву (од две) једнакост у (2), па барем један задовољава другу.
Сада користимо индукцију и доказујемо да уколико $a_i = n$ за неко $i < n$, да је $a_n = i$. Разматрамо два случаја:
(а) a_{i-1} задовољава другу једнакост у (2).
(б) a_{i-1} задовољава прву једнакост у (1).
Из оба лако добијамо жељено.
Сада је још потребно доказати да уколико се n не појављује раније, да је $a_n = n + b_{n-1}$. Уколико је $a_{b_{n-1}} < n$ доказ је завршен. Претпоставимо супротно. Размотримо два случаја:
(а) $a_{b_{n-1}-1}$ задовољава другу једначину у (2).
(б) $a_{b_{n-1}-1}$ задовољава прву једначину у (2).
У оба случаја добијамо контрадикцију. □

За крај ево и једног задатка који се на неки начин доста разликује од претходна два. Наиме, то је један од карактеристичних задатака у којима се поставља питање да ли низ који задовољава дату једначину постоји (или у коме треба доказати да низ не постоји). Решићемо га коришћењем разних оцена, што је и најчешћа идеја код оваквих задатака.

Пример 22. Доказати да не постоји низ природних бројева $\{a_n\}$ који задовљава рекурентну једначину

$$a_{a_n} = a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2, \quad \text{за } n \in \mathbb{N}.$$

Решење. Како је сваки члан низа природан то мора бити $a_{n+1}a_{n-1} > a_n^2$, за све $n \in \mathbb{N}$. Самим тим је

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{a_n}{a_{n-1}}. \tag{8}$$

Приметимо да из претходног уколико је $a_{n_0} > a_{n_0-1}$ за неко n_0, тада је и $a_{n+1} > a_n$ за све $n \geq n_0$. Како низ природних бројева не може бити строго опадајући, а из једначине не можемо имати три узастопна члана низа који су једнаки, то мора постојати n_0 такво да је $a_{n_0} > a_{n_0-1}$. Значи низ је за $n \geq n_0$ строго растући. Оценимо сада a_n. Према $(*)$ имамо и

$$a_{n+1} = a_m \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_{m+1}}{a_m} > a_m \cdot \left(\frac{a_{m+1}}{a_m}\right)^{n-m+1},$$

за све $n \geq m$. Значи овај низ експоннецијално расте. Са друге стране $a_{n+1}a_n > a_{a_n}$, па уколико у претходну неједнакост уместо n ставимо a_n, а уместо m ставимо $n+1$ добијамо

$$a_n a_{n+1} > a_{a_n} \geq a_{n+1} \left(\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right)^{a_n - n}.$$

Уколико је још и $n \geq n_0$ добијамо да за свако $n \geq n_0$ мора важити

$$a_n > q^{a_n - n},$$

где је $\dfrac{a_{n_0}}{a_{n_0-1}} = q > 1$. Међутим последња једнакост је очигледно немогућа из експоненцијалног раста низа a_n (овде вам је потребно мало основних баратања са лимесима). □

§ Бројевни троуглови

Бројевни троуглови су ништа друго до дводимензиони низови, тј. низови који имају две „координате”. Осим задатака везаних искључиво за решавање ових низова, у овом поглављу биће показана и њихова примена у решавању неких типова задатака везаних за „обичне” низове.
Код задатака везаних за бројевне троуглове треба имати на уму све оне идеје које смо користили и код обичних. У овом поглављу ми ћемо се пре свега задржати на идеји конструкције линеарне рекурентне једначине (дефинисане слично као за једнодимензионе низове).

Кренимо једном познатом особином Фибоначијевих бројева:

Пример 23. Доказати да је производ сваких k узастопних чланова Фибоначијевог низа дељив производом првих k чланова Фибоначијевог низа.

Решење. Наш задатак је да докажемо да је $\dfrac{f_n \cdot f_{n+1} \cdots f_{n+k-1}}{f_1 \cdot f_2 \cdots f_k}$ цео број за све n и k. Зато уведимо (дводимензиони) низ F_k^n са

$$F_k^n = \frac{f_n \cdot f_{n-1} \cdots f_{n-k+1}}{f_1 \cdot f_2 \cdots f_k},$$

и докажимо да је $F_k^n \in \mathbb{N}$, за све $k, n \in \mathbb{N}$. Као и код једнодимензионих низова, можемо пробати да направимо линеарну везу између чалнова овог низа. Пробајмо зато да направимо везу облика

$$F_k^n = A \cdot F_k^{n-1} + B \cdot F_{k-1}^{n-1},$$

где су A и B неке (целобројне) константе или евентуално неки низови (везу не морамо тражити баш у овом облику, тј. можда требамо узети неке друге индексе или увести везу вишег реда). Када заменимо вредности за F_k^n, добијамо да је тражена веза еквивалентна са

$$f_n = A \cdot f_{n-k} + B \cdot f_k.$$

Уколико погледамо теорему 3 видимо да је довољно узети $A_n = f_{k+1}$ и $B_n = f_{n-k+1}$, тј. важи

$$F_k^n = f_{k+1} \cdot F_k^{n-1} + f_{n-k+1} \cdot F_{k-1}^{n-1}.$$

Сада је из индукцијом сваки члан низа цео. □
Следећи задатак је мало тежи, али се ради сличном техником:

Пример 24. Бројевни троугао дат је са $V_0^0 = V_n^n = 1$ и

$$V_n^k = (2+\sqrt{3})^{n-k} \cdot V_{n-1}^{k-1} + (2-\sqrt{3})^k \cdot V_{n-1}^k, \qquad \text{за све } n, k \in \mathbb{N}.$$

Решење. За разлику од претходног задатка овде имамо дводимензиони низ. Поступајмо зато овде на супротан начин у односу на претходан задатак. Одредимо зато низ $\{v_n\}$ такав да је за све $n, k \in \mathbb{N}$ испуњено

$$V_n^k = \frac{v_n \cdot v_{n-1} \cdots v_{n-k+1}}{v_k \cdot v_{k-1} \cdots v_1}.$$

Из једначине дате у задатку за дати низ мора важити

$$v_n = (2-\sqrt{3})^k \cdot v_{n-k} + (2+\sqrt{3})^{n-k} \cdot v_k, \tag{$*$}$$

за све $n, k \in \mathbb{N}$. Овде се решење може лако набости, тј. $v_n = c \cdot ((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n)$ (наравно низ се може и решити стављањем $k = 1$ и затим смањивањем степена једначине). Из $(*)$ видимо да c можемо узети произвољно, па ставимо зато $c = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$, како би сваки члан низа био цео (ову константу стављамо поучени искуствима из другог поглавља). Сада овај задатак почиње неодољиво да подсећа на претходни, тј. треба доказати да је производ сваких k узастопних чланова низа (чији општи члан је сличног облика као у претходном задатку) дељив са производом првих k. Поступајмо зато као у претходном задатку и пробајмо да направимо линеарну везу између чланова низа V_n^k. Као и у претходном задатку то се своди на тражење везе облика

$$v_n = A \cdot v_{n-k} + B \cdot v_k,$$

где су A и B целобројне константе. Сада се поставља логично питање како одредити (тј. набости) ову везу, јер је тешко очекиватии да за низ $\{v_n\}$ знамо идентитете као и за низ $\{f_n\}$. Међутим како ови низови имају сличан облик (тј. општи члан), не би зачудило да важи нека слична веза. Пробањам за првих неколико чланова видимо да за сваки члан низа важи $v_n = v_{k+1} \cdot v_{n-k} - v_k \cdot v_{n-k+1}$, што лако доказујемо заменом општег члана низа. Овим је доказ завршен. □

§ Рачунање сума и функције генератрисе

У овом поглављу ћемо показати како низови могу бити од велике користи код доказивања идентитета. Наиме, показаћемо како се чисто алгебарским методама (за разлику од примера 17) прављењем рекурентних једначина идентитети могу веома лако решавати. За разлику од примера 17, најчешће тражимо једначину коју задовољава „компликованија” страна идентитета.

Пример 25. (Савезно 2000, 3-4 раз) Доказати да за сваки природан број n важи једнакост

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{2n-i}{i} 2^{2n-2i} = 2n+1.$$

Решење. Као што је и решено у уводу уведимо низ који једнак левој страни једнакости, тј.

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{2n-i}{i} 2^{2n-2i}.$$

Направимо сада везу између чланова низа $\{a_n\}$. Коришћењем $\binom{2n+2-i}{k} = \binom{2n+1-i}{i} + \binom{2n+1-i}{i-1}$ добијамо

$$a_{n+1} = 4\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{2n+2-i}{i} 2^{2n-2i} + (-1)^{n+1} = 4\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{2n+1-i}{i} 2^{2n-2i} + 4\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{2n+1-i}{i-1} 2^{2n-2i} +$$

$$+(-1)^{n+1} = 4\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{2n+1-i}{i} 2^{2n-2i} - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{2n-j}{j} 2^{2n-2j} + (-1)^{n+1},$$

при чему у последњој једнакости другу суму добијамо стављањем $j = i-1$. Сада је логично да уведемо и други низ $b_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{2n+1-i}{i} 2^{2n-2i}$, чиме се последња једнакост своди на $a_{n+1} = 4b_n - \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{2n-j}{j} 2^{2n-2j} + (-1)^{n+1} = 4b_n - (a_n - (-1)^n) + (-1)^{n+1} = 4b_n - a_n$. Поступајући слично као при прављењу везе између a_{n+1} и a_n, добијамо и везу између b_{n+1} и b_n, тј.

$$b_{n+1} = 4\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{2n+3-i}{i} 2^{2n-2i} + (-1)^{n+1}(n+2) = 4\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{2n+2-i}{i} 2^{2n-2i} + 4\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{2n+2-i}{i-1} 2^{2n-2i} +$$

$$+(-1)^{n+1}(n+2) = a_{n+1} - (-1)^{n+1} - (b_n - (-1)^n(n+1)) + (-1)^{n+1}(n+2) = a_{n+1} - b_n.$$

Сада још преостаје да решимо систем једначина за a_n и b_n, чиме добијамо $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$. Како је $a_0 = 1$ и $a_1 = 3$, као у примеру 1 добијамо да је $a_n = 2n+1$, за $n \in \mathbb{N}$, што завршава наш доказ. □

У наставку овог поглавља рецимо и по коју реч о функцијама генератрисама. Наиме, сваком низу $\{a_n\}$ можемо доделити његову функцију генератрису дефинисану са

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Функције генератрисе имају многоструке примене. Њиховим коришћењем можемо решавати многе рекурентне једначине, рачунати свакаквих суме, решавати неке комбинаторне задатке... Код коришћења функција генератриса кључно је њихово одређивање, тј. одређивање функције која одговара датом степеном реду. Најзначајни је сигурно развој $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$, где је $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k\,!}$, за $\alpha \in \mathbb{R}$ (приметимо да се ова дефиниција слаже са дефиницојм за природне бројеве). Из овог развоја добијамо и $\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{2n}{n}x^n$ (рачунањем $\binom{1/2}{n}$), што може бити од велике користи код идентитета са изразима облика $\binom{2n}{n}$.

У следећем задатку показаћемо технику којом се решавају задаци коришћењем функција генератриса, а уједно и сву моћ овог апарата:

Пример 26. Доказати идентитет

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = 4^n.$$

Решење. Нека је $a_n = 4^n$. Тада је функција генератриса овог низа

$$f(x) = 1 + 4x + 4^2x^2 + \ldots = \frac{1}{1-4x}$$

(овде користимо чињеницу да је $\binom{-1}{n} = (-1)^n$). Треба доказати да и низу $\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}$ одговара функција генератрисе f. Зато приметимо да уколико је $b_n = \binom{2n}{n}$ имамо

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(b_0b_n + b_1b_{n-1} + \ldots + b_nb_0)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}\right)x^n,$$

јер ове функције множимо као полиноме. Међутим из уводног дела имамо да је $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ функција генератриса за низ b_n, што заједно са претходним завршава наш задатак. $\square$

У следећем задатку показујемо како се функције генератрисе користе при решавању рекурентних једначина:

Пример 27. Одредити општи члан низа $\{a_n\}$ задатог са $a_0 = a_1 = 1$ и

$$a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_0, \qquad \text{за } n \geq 2.$$

Решење. Поступајмо као у претходном задатку. нека је f функција генератриса низа $\{a_n\}$. Из

$$f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_0a_n + a_1a_{n-1} + \ldots + a_na_0)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^n = \frac{f(x)-a_0}{x}$$

имамо да је $x \cdot f(x)^2 - f(x) + 1 = 0$, односно решавањем

$$f(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{n-1}\binom{2n-2}{n-2}x^n}{2x},$$

(знак одређујемо из прва два члана низа). Сада је $a_n = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. $\square$

Функције генератрисе се могу интегралити и могу се узимати њихови изводи (и то члан по члан), тј.

$$\int f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}\cdot x^{n+1}\qquad f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_n\cdot x^{n-1}.$$

Ово ћемо применити у следећем задатку:

Пример 28. Низ $\{a_n\}_{n\geq 1}$ дефинисан је са $a_0=a_1=1$ и $(n+3)a_{n+1}=(2n+3)a_n+3na_{n-1}$. Доказати да је сваки члан овог низа природан број.

Решење. Нека је $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n\cdot x^n$ фунцкија генератриса низа a_n. Поставља се питање како ћемо наћи функције генератрисе за сабирке који учсествују у датој рекурентној једначини, тј. на пример функцију генератрисе за низ $(n+3)a_{n+1}$. Овде ћемо искористити напомену дату непосредно пре задатка, о изводу функције генратрисе. Наиме јасно је

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+3)a_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+2\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+1}x^n=f'(x)+2\cdot\frac{f(x)-a_0}{x},$$

а затим слично $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n+3)a_n\cdot x^n=2x\cdot f'(x)+3f(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}3na_{n-1}\cdot x^n=3x^2\cdot f'(x)+3x\cdot f(x)$. Коначно добијамо диференцијалну једначину

$$(x-2x^2-3x^3)f'(x)+(2-3x-3x^2)f(x)-2=0,$$

са условом да је $f(0)=a_0=1$. И сада је још „само” треба решити. Овај задатак баш и није репрезентативан, јер је ову диференцијалну једначину доста тешко решити уколико сте средњошколац (многи од вас верујем ни не знају шта је то диференцијална једначина). Међутим поступак до добијене диференцијалне једначине свакако треба прихватити и примењивати у нади да ћете ипак добити неку једноставну једначину коју ћете знати да решите (ово је често случај). Наравно ни ова једначина није нерешива. Приметите (тј. они читаоци који су до сада имали искустава са диференцијалним једнчинама) да би се ова диференцијална једначина без двојке на крају могла једноставно решити (то би била једначина која раздваја променљиве). Зато пробајмо да елеминишемо број 2 одузимањем од f неког погодног израза. Јасно је да 2 нестаје уколико узмемо $g(x)=f(x)-\dfrac{1-x}{2x^2}$, а једначина се своди на

$$(x-2x^2-3x^3)g'(x)=(2-3x-3x^2)g(x),$$

чије је решење $g(x)=-\dfrac{\sqrt{1-2x-2x^2}}{2x^2}$. Коначно

$$f(x)=\frac{1-x-\sqrt{1-2x-2x^2}}{2x^2},$$

па развојем у ред добијамо

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\binom{2k}{k}}{k+1}.$$

□

Приметимо да се слично могу решавати и рекурентне једначине облика као у примеру 13, мада ће се тамо добити једначина вишег реда (у еднахцини ће се појавити и други извод).

Овде су показана само нека својства и примене функција генератриса. Уколико желите да сазнате више (а требали бисте) можете погледати нпр. матурски рад Милана Новаковића (можете га пронаћи на *www.matf.bg.ac.yu/∼matic/competitions*).

У овом одељку није обраћано превише пажње на неке школске ствари, као што су развијање функција у ред или решавање неких основних диференцијалних једначина (иако већина читала са тим још није упозната). О свему томе можете наћи више у уџбенику *Анализа са алгебром 4*, за четврти разред Математичке гимназије.

§ Рекурентне једначине и теорија бројева

Задаци са низовима су често везани за неку другу област математике, нпр. теорију бројева, неједнакости или полиноме, те при решавању тежи део може бити онај који нема никакве везе са низовима. У овом поглављу позабавићемо се задацима са низовима код којих је неопходно познавање теорије бројева.

Следећи користи један користан апарат теорије бројева:

Пример 29. (Путнам 1999) Низ $\{a_n\}_{n\geq 1}$ дефинисан је са $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 24$ и

$$a_n = \frac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}}, \quad \text{за свако } n \geq 4.$$

Доказати да је сваки члан низа цео број дељив са $n!$.

Решење. Решимо прво дату рекурентну једначину. Приметимо да важи $a_n = 6 \cdot \dfrac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}} - 8 \cdot \dfrac{a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n-3}}$, па дељењем са a_{n-1} добијамо

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 6 \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} - 8 \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}.$$

Сада је очигледно да треба увести смену $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ за коју важи рекурентна једначина $b_n = 6b_{n-1} - 8b_{n-2}$. Како је $b_1 = 2$ и $b_2 = 12$ добијамо (као у примеру 1) да је општи члан овог низа $b_n = 4^n - 2^n$. Како је $a_n = b_{n-1} \cdot b_{n-2} \cdots b_1$ имамо да је

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1} (4^k - 2^k),$$

па је потребно доказати да $n! \mid \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} (4^k - 2^k)$, за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$, што је задатак из чисте теорије бројева. Као и код већине задатака у којима треба доказати да $n!$ дели неки број, посматраћемо потенције простих бројева које деле $n!$. Наиме, према добро познатој теореми уколико је $p^\alpha \parallel n!$, то је

$$\alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right],$$

па уколико $p^\beta \parallel \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} (4^k - 2^k)$, довољно је доказати да је $\beta \geq \alpha$. Јасно ј да требамо размотрити два случаја:

(1) $p = 2$. У овом случају је јасно $\beta = 1 + 2 + \ldots + (n-1) \geq n \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n}{p^k} \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right] = \alpha$, чиме је доказ завршен.

(2) $p > 2$. Како је α одређено потребно је још одредити β. По Ојлеровој теореми $p^k \mid 2^{\varphi(p^k)} - 1$, па је сваки $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$-ти члан производа $\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1} (4^i - 2^i)$ дељив са p^k. Самим тим

$$\beta \geq \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^{i-1}(p-1)}\right],$$

јер се сваки број који је тачно дељив са p^k рачуна по једном у сваком од првих k чланова суме. Сада $\alpha \leq \beta$ тривијално следи из очигледне неједнакости $\left[\dfrac{n}{p^k}\right] \leq \left[\dfrac{n}{p^{k-1}(p-1)}\right]$. □

Следећи пример комбинује методе решавања рекурентних једначина из другог одељка, са идејама теорије бројева.

Пример 30. Низ $\{a_n\}_{n\geq 1}$ дефинисан је са $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$ и

$$a_{n+5}a_n = a_{n+4}a_{n+1} + a_{n+3}a_{n+2}.$$

Доказати да је сваки члан овог низа природан број.

Решење. Задат је логично решевати индукцијом. Претпостаимо зато да су сви a_i, за $i \leq n+4$, цели и докажимо да је и a_{n+5} цео. За ово је довољно доказати да $a_n \mid a_{n+4}a_{n+1} + a_{n+3}a_{n+2}$. Јасно је да ово не можемо никако урадити директно, тј. или ћемо морати решити низ или ћемо морати наћи још неку једначину коју испуњава дати низ из које ће се жељено лакше видети... Приметимо да је дати низ задат једном нелинеарном рекурентном једначину, те га не можемо решити директно. Кренимо зато са решавањем овог низа (као у трећем поглављу), јер и ако га можда нећемо решити, постоји шанса да ћемо успут доћи до неке друге корисне карактеристике низа. Дата једначина је хомогена, што нам се до сада није свиђало (нпр. у примеру 13). Поделимо зато ову једначину са $a_{n+3}a_{n+2}$ чиме добијамо

$$\frac{a_{n+5}}{a_{n+3}} \cdot \frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{a_{n+4}}{a_{n+2}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_{n+3}} + 1.$$

Из овако записане једначине јасно је да треба увести смену $b_n = \dfrac{a_{n+2}}{a_n}$, чиме једначина постаје $\dfrac{b_{n+3}}{b_{n+1}} = \dfrac{b_{n+2}}{b_{n+1}} + 1$. Последња једначина нам поново наговештава логичну смену $c_n = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, којом једначина постаје $c_{n+2}c_{n+1}c_n = c_{n+1} + 1$. Узмимо сада и једначину реда за један већег (овако нисмо кренули на почетку, јер тиме не бисмо добили ништа), тј. $c_{n+1}c_{n+2}c_{n+3} = c_{n+2} + 1$. Видимо да се највише тога скрати уколико ове две једначине поделимо, чиме добијамо $\dfrac{c_{n+3}}{c_n} = \dfrac{c_{n+2}+1}{c_{n+1}+1}$, односно $c_{n+3}c_{n+1} + c_{n+3} = c_{n+2}c_n + c_n$. Иако на изглед ништа нисмо добили (јер изрази са разних страна једнакости нису чланови истог низа), додавањем $c_{n+2} + c_{n+1}$ обема странама ипак добијамо

$$c_{n+3}c_{n+1} + c_{n+3} + c_{n+2} + c_{n+1} = c_{n+2}c_n + c_{n+2} + c_{n+1} + c_n,$$

што смо и желели. Смањивањем степена коначно добијамо $c_{n+2}c_{n+1}c_n + c_{n+2} + c_{n+1} + c_n = c_2c_0 + c_2 + c_1 + c_0 = 3$, односно уколико заменимо вредност c_n

$$6a_{n+3}a_{n+2}a_{n+1}a_n = a_{n+4}a_{n+2}a_{n+1}a_{n-1} + a_{n+4}a_{n+1}^2a_n + a_{n+3}^2a_n^2 + a_{n+3}a_{n+2}^2a_{n-1}.$$

Последња једначина је далеко компликованија од полазне и самим тим, иако је то нова рекурентна једначина за a_n, може се десити да из ње поново не добијамо ништа што нам је од неке велике помоћи. Међутим многи низови задовољавају мноштво оваквих веза, те не треба одмах одустајати од овог приступа и треба пробати наћи ону погодну једначину. У нашем случају последња веза ће нам ипак доста помоћи. Приметимо да из ње $a_n \mid a_{n+2}a_{n-1}(a_{n+4}a_{n+1} + a_{n+3}a_{n+2})$, па је довољно доказати да је $(a_n, a_{n+2}a_{n-1}) = 1$. Ово ћемо показати тако што ћемо доказати да је a_n узајамно просто са a_{n+2} и a_n узајамно просто са a_{n-1}, за свако n. Докажимо прво друго тврђење индукцијом. Претпоставимо да је за све $i < n$ заиста $(a_{i-1}, a_i) = 1$ и докажимо да је (a_{n-1}, a_n). У супротном уколико је НЗД једнак d из $a_{n-5}a_n = a_{n-4}a_{n-1} + a_{n-3}a_{n-2}$ имамо да d дели и $a_{n-3}a_{n-2}$, па како не дели a_{n-2} (из индукцијске хипотезе), то $d \mid a_{n-3}$. Смањимо сада степен претходне једначине и посматрајмо опет дељивост са d. Јасно је $a_{n-5}a_{n-2}$ дељиво са d, тј. $d \mid a_{n-5}$. Настављајући овај поступак закључујемо да су и $a_{n-7}, a_{n-9}, \ldots$ дељиви са d, а самим тим и један од бројева a_1 или a_0. Како су оба једнака 1 и $d = 1$. Овим је друго тврђење доказано. Како се прво тврђење слично доказује, то га остављамо за вежбу. □

Позабавимо се на крају и једним врло интересантним типом задатака. Као што је у другом поглављу показано решења многих линеарних рекурентних једначина своде се на суме неких ирационалних (често и комплексних) бројева, па се поставља питање како доказати да су она дељива неким бројем (посебно уколико тај број не зависи лепо од тог члана низа). У већини ових задатака поступамо тако што трансформишемо дате суме до сума неких лакших израза (нпр. сума неких других чланова низа), а од користи је и познавање особина неких скупова који не садрже само целе бројеве, али се са њима могу лако повезати. Следећа два примера на прави начин осликавају ова два метода.

Пример 31. Лукасов низ $\{L_n\}$ дефинисан је са $L_0 = 2, L_1 = 1$ и $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$, за $n \geq 1$. Доказати да L_p дели $L_{(p+1)/2}^p - 1$, за све просте бројеве $p > 3$.

Решење. Јасно је да се Лукасов низ разликује пд Фибоначијевог само по почетним члановима. Као у првом примеру налазимо да је општи члан овог низа $L_n = \alpha^n + \beta^n$, где је $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Нека је $\dfrac{p+1}{2} = k$. Искористимо чињеницу да је $\alpha\beta = 1$, тј.

$$L_k^p = (\alpha^k + \beta^k)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \alpha^{(p-i)k}\beta^i k = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{ik} \binom{p}{i} \alpha^{(p-2i)k} + \sum_{i=k}^{p} (-1)^{(p-i)k} \binom{p}{i} \beta^{(2i-p)k},$$

па како је $\sum_{i=k}^{p}\binom{p}{i}\beta^{(2i-p)k}=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{p}{i}(-1)^{ik}\beta^{(p-2i)k}$, заједно са претходном једнакости добијамо

$$L_k^p=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{p}{i}L_{(p-2i)k}.$$

Следећа идеја је да израз са десне стране некако средимо. Зато би нам било идеално да чланове суме са десне стране (или целу суму) заменимо неким једностанијим изразима по модулу L_p. Наравно како овај низ неодољиво подсећа на Фибоначијев низ, то су и идентитети који важе између чланова низа слични. Такође приметимо да индекси чланови последње суме некако подсећају на потпун систем остатака (једино што их нема довољно), па је логично да пробамо да за њих одредимо неки број из скупа $\{L_0,L_1,\ldots,L_{p-1}\}$ који је са њим конгруентан (по модулу L_p). Зато тражимо идентитет у облику оног под (???) у теореми 3, а затим лако (из општег члана) доказујемо да важи

$$L_nL_m=L_{n+m}+(-1)^mL_{n-m},$$

односно за $n=s+p$ и $m=p$, $L_{s+2p}\equiv(-1)^{s+1}L_s \pmod{L_p}$. Сада нас занима ког је облика $(p-2i)k$, да бисмо претходно применили. Како је $(p-2i)k=(p-2i)\cdot\dfrac{p+1}{2}=p\cdot\dfrac{p+1-2i}{2}-i$, то је за i исте парности као и k, $(-1)^{ik}L_{(p-2i)k}\equiv(-1)^kL_{-i}=L_i \pmod{L_p}$, а за i и k различите парности $(-1)^{ik}L_{(p-2i)k}\equiv L_{p-i} \pmod{L_p}$. Значи дата сума може да се замени сумом оних L_i (уз одговарајући биномни коефицијент) за које је i исте парност као и k, при чему је $0\le i\le p-1$. Значи према претходном

$$L_k^p=\sum\binom{p}{i}(\alpha^i+\beta^i),$$

где се сумирање врши по претходно описаним i. Ово је сума сваког другог члана биномног развоја, па се рачуна као у другом поглављу и важи

$$2L_k^p=((\alpha+1)^p+(-1)^k(\alpha-1)^p)+((\beta+1)^p+(-1)^k(\beta-1)^p),$$

па како је $\alpha+1=\alpha^2$, $\beta+1=\beta^2$, $\alpha-1=-\beta$ и $\beta-1=-\alpha$, из претходне једнакости коначно добијамо

$$2L_k^p=L_{2p}+(-1)^{k+p}L_p\equiv L_{2p}\equiv L_0 \pmod{L_p}.$$

Како L_p није паран (зашто?) наш доказ је завршен. □

Следеће решење је доста поучно и треба га добро простудирати:

Пример 32. (Румунија 2004) Нека су $a,b,c\in\mathbb{Z}$, при чему је b непаран, а $\{x_n\}$ низ дефинисан са $x_0=4, x_1=x_2=2c, x_3=3b$ и

$$x_n=ax_{n-4}+bx_{n-3}+cx_{n-2},\quad \text{за } n\ge 4.$$

Доказати да је за сваки прост број p и природан број m број x_{p^m} дељив са p.

Решење. У овом решењу паралелно ћемо дати доказ који користи теорију и чист елементарни доказ. За почетак решимо дати низ. Према примеру 4 закључујемо да је општи члан низа задат са

$$x_n=A\alpha_1^n+B\alpha_2^n+C\alpha_3^n+D\alpha_4^n,$$

при чему су $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ нуле полинома x^4-cx^2-bx-a. Из почетних чланова низа и Виетових формула налазимо да је $A=B=C=D=1$ (ово је мало напорнији, али школски посао, па се оставља читаоцу). Значи преостаје да докажемо да је

$$x_{p^m}=\alpha_1^{p^m}+\alpha_2^{p^m}+\alpha_3^{p^m}+\alpha_4^{p^m}, \tag{$*$}$$

дељиво са p за сваки природан број m, при чему су $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ повезани одговарајућим Виетовим формулама. И веровали или не задат се одавде може завршити у једном реду, наравно уз познавање теорије. Замислимо за почетак да су бројеви α_i цели (наравно за опште a,b,c они су комлексни). Тада је јасно да ћемо у $(*)$ само применити Фермаову теорему и добити $x_{p^m}\equiv\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0 \pmod{p}$, што завршава наш доказ. Међутим α_i нису увек цели. На нашу велику срећу постоји теорија (врло једноставна) која ће отклонити овај проблем. Наиме конгруенције се могу увести и у скуп *алгебарских целих бројева*, тј. скуп свих комлексних бројева који су нуле целобројних моничних полинома (што $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ јесу). Наиме кажемо да је $\omega_1\equiv\omega_2 \pmod{\gamma}$ (ω_1,ω_2,γ су алгебарски цели) уколико постоји алгебарски цео број δ такав да је $\omega_1 - \omega_2 = \gamma \cdot \delta$ (исто као код целих бројева). Наравно корисна је чињеница да је збир и производ два алгебарска броја алгебарски, па самим тим важе сва основна својства конгруенција (правила за збир, производ, степен...). Специјално (и много важно) важи и $(\omega_1 + \omega_2)^p \equiv \omega_1^p + \omega_2^p \pmod p$, за сваки прост број p (ово се доказује исто као и за целе бројеве). Сада индукцијом (по m и n) добијамо и

$$(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n)^{p^m} \equiv \omega_1^{p^m} + \omega_2^{p^m} + \ldots + \omega_n^{p^m} \pmod p,$$

за сваки прост број p и природне бројеве n и m. Последње можете (и требате) запамтити као теорему и тако користити. Јасно је да је применом ове теореме у $(*)$ задатак завршен. Добро није баш скроз, јер смо ми добили да је $x_{p^m} = p\gamma$, где је γ алгебарски цео број, али самим тим је γ рационалан, а самим тим и цео (алгебарски цео број који је рационалан је и цео из дефиниције).

Наравно задатак се може решити и елементарно (тј. на исти овај начин, али применом „штапа и канапа"). Доказаћемо исто што и у претходном случају, тј. да је $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)^{p^m} \equiv \alpha_1^{p^m} + \alpha_2^{p^m} + \alpha_3^{p^m} + \alpha_4^{p^m} \pmod p$, али без коришћења конгруенција у скупу алгебарских целих бројева. Према полиномној формули имамо

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)^p = \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4=p} \frac{p\,!}{k_1\,! \cdot k_2\,! \cdot k_3\,! \cdot k_4\,!} \cdot \alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\alpha_3^{k_3}\alpha_4^{k_4}.$$

Приметимо да у овом развоју сви чланови сем α_i^p учествују са коефицијентом дељивим са p, па је

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)^p - \alpha_1^p - \alpha_2^p - \alpha_3^p - \alpha_4^p = p \cdot A.$$

Остаје још да докажемо да је A цео број. Приметимо да је A симетричан израз у односу на $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ са целим коефицијентима (тачније целобројни симетрични полином). Самим тим (по познатој теореми) A се може приказати и као целобројни полином основних симетричних сума за $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ (теорема каже да се сваки целобројни симетрични полином може приказати као целобројни полином одговарајућих основних симетричних сума). Како су све ове суме из Виетових формула цели бројеви, доказ је завршен у случају $m = 1$. Даље из $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)^{p^{m+1}} \equiv_p (\alpha_1^p + \alpha_2^p + \alpha_3^p + \alpha_4^p)^{p^m}$ доказ завршавамо индукцијом. $\Box$

§ Задаци за вежбу

1. (ИМЦ 2005, предлог) Нека су $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$ ненула полиноми и a, b, c раличити ненула комплексни бројеви. Доказати да уколико је скуп $Z = \{z_n = P(n)a^n + Q(n)b^n + R(n)c^n : \ n \in \mathbb{N}\}$ коначан, постоји $p \in \mathbb{N}$ такав да је $z_{n+p} = z_n$, за све $n \in \mathbb{N}$.

2. (Ирска 1998) Дефинишимо низ $\{x_n\}$ са $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ и

$$x_{n+2} = \frac{1 + x_{n+1}}{x_n}$$

за $n \geqslant 1$. Одредити x_{1998}.

3. (Аустро-Пољска 1996) Низ полиноми $P_n(x)$ дефинисан је са $P_0(x) = 0, P_1(x) = x$ и

$$P_n(x) = xP_{n-1}(x) + (1-x)P_{n-2}(x)$$

за $n \geq 2$. Наћи све корене полинома P_n.

4. (Балканијада 2002) Наћи све функције $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, такве да је за свако $n \in \mathbf{N}$

$$2n + 2001 \leq f(f(n)) + f(n) \leq 2n + 2002.$$

5. (Савезно 2003, 3 раз) Доказати да је за сваки природан број n број $[(5 + \sqrt{35})^{2n-1}]$ дељив са 10^n.

6. Низ x_n је решење рекурентне једначине

$$x_{n+3} - 2x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0, \ x_1 = 1, \ x_2 = 12, \ x_3 = 20.$$

Доказати да је $1 + 4x_n x_{n+1}$ потпун квадрат за свако n.

7. (Мала олимпијада 2005) Дат је низ $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ и $x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$ за $n \geq 1$. Наћи све природне бројеве m, такве да је број $3x_n^2 + m$ потпун квадрат за све природне бројеве n.

8. (Вијетнам 1988) Нека су a, b цели бројеви. Нека је низ (a_n) дефинисан са $a_0 = a$, $a_1 = b$, $a_2 = 2b - a + 2$, $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$. Наћи општи члан низа и наћи a, b такве да је број a_n потпун квадрата за $n \geq 1988$.

9. Низ природних бројева (a_n) дефинисан је са $a_1 = 2$, $a_2 = 7$ и

$$-\frac{1}{2} < a_{n+1} - \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \leq \frac{1}{2}.$$

Доказати да је a_n непаран.

10. Низ $\{x_n\}_{n \geq 1}$ задат је са $x_1 = x_2 = 1$, $x_{n+2} = 14x_{n+1} - x_n - 1$. Доказати да је сваки члан овог низа потпун квадрат.

11. (Велика Британија 1998) Доказати да постоји јединствен низ $\{a_n\}$ природних бројева, такав да је $a_1 = 1, a_2 = 2, a_4 = 12$ и $a_{n+1}a_n = a_n^2 \pm 1$ за $n \geq 2$.

12. Низ $\{a_n\}$ дефинисан је са $a_0 = a_1 = 5$ и

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{98}.$$

Доказати да је $\dfrac{a_n + 1}{6}$потпун квадрат за све $n \geqslant 6$.

13. (Румунија 1999) Доказати да је за сваки природан број n број

$$S_n = \binom{2n+1}{0} 2^{2n} + \binom{2n+1}{2} 2^{2n-2} \cdot 3 + \ldots + \binom{2n+1}{2n} 3^n$$

једнак збиру два узастопна квадрата.

14. (Румунија 2004) Нека су m и n природни бројеви и нека је m непаран. Доказати да је број

$$a_m = \frac{1}{3^m n} \sum_{k=0}^{m} \binom{3m}{3k} (3n-1)^k,$$

цео за сваки природан број m.

15. (Русија 1995) Низ a_n задовољава једначину

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n}), \qquad \text{за } m \geqslant n \geqslant 0.$$

Уколико је $a_1 = 1$ одредити a_{1995}.

16. Решити рекурентну једначину

$$x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1}, \quad x_0 = 0.$$

17. (ИМО 1995, 4 зад) Позитивни реални бројеви $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$ задовољава $x_0 = x_{1995}$ и за све $i = 0, 1, \ldots, n-2$

$$x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}.$$

И нешто се тражи...

18. (Мала олимпијада 1990) Низ (a_n) дат је релацијом $a_{n+2}a_n = a_{n+1}^2 + 8$, $n \in \mathbf{N}$, уз почетне услове $a_1 = 4$, $a_2 = 6$. Доказати да је број $9a_n^2 - 128$ квадрат рационалног броја за свако $n \in \mathbf{N}$.

19. (ИМО 1996, предлог) Нека је $a > 2$ реалан број, и дефинишимо низ

$$a_0 = 1,\ a_1 = a,\ a_{n+1} = \left(\frac{a_n^2}{a_{n-1}^2} - 2\right).$$

Доказати да је за сваки природан број k важи

$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_k} < \frac{1}{2}(2 + a - \sqrt{a^2 - 4}).$$

20. (АПМО 1995) Одредити све низове $a_1, a_2, \ldots, a_{1995}$ реалних бројева који задовољавају

$$2\sqrt{a_n - (n-1)} \geqslant a_{n+1} - (n-1), \qquad \text{за } n = 1, 2, \ldots, 1994,$$

$$2\sqrt{a_{1995} - 1994} \geqslant a_1 + 1.$$

21. (ИМО 1983, предлог) Нека је a природан број и (a_n) низ дефинисан са:

$$a_0 = 0,\ a_{n+1} = a(a_n + 1) + (a+1)a_n + 2\sqrt{a(a+1)a_n(a_n+1)}.$$

Доказати да је за све природне бројеве n, и a_n природан.

22. (ИМО 1989, предлог) За низ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ реалних бројева важи $a_0 = a_n = 0$ и за свако $1 \leqslant k \leqslant n-1$ имамо

$$a_k = c + \sum_{i=k}^{n-1} a_{i-k}(a_i + a_{i+1}).$$

Доказати да је $c \leqslant \dfrac{1}{4n}$.

23. (Бугарска 1996) Доказати да за сваки природна број $n \geq 3$ постоје непарни природни бројеви x_n, y_n такви да је $7x_n^2 + y_n^2 = 2^n$.
(*Додатак:* наћи број решења ове једначине)

24. (Савезно 2004, 4 раз) Низ (a_n) одређен је са $a_1 = 0$ и

$$(n+1)^3 a_{n+1} = 2n^2(2n+1)a_n + 2(3n+1) \text{ за } n \geq 1.$$

Доказати да бесконачно много чланова низа припада скупу природних бројева.

25. (Кина 2000) Низ $\{a_n\}$ дефинисан је са $a_1 = 0, a_2 = 1$ и

$$a_n = \frac{1}{2}na_{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)a_{n-2} + (-1)^n\left(1 - \frac{n}{2}\right)$$

за све $n \geqslant 3$. Одредити експлицитну формулу за

$$f_n = a_n + 2\binom{n}{1}a_{n-1} + 3\binom{n}{3}a_{n-3} + \ldots + n\binom{n}{n-1}a_1.$$

26. (Чешка - Словачка 1995) Низ $\{a_n\}$ дефинисан је са $a_1 = 2, a_2 = 5$ и

$$a_{n+2} = (2-n^2)a_{n+1} + (2+n^2)a_n$$

за $n \geqslant 1$. Да ли постоје бројеви p, q, r такви да је $a_p a_q = a_r$?

27. (ИМО 1984, предлог) Нека су (a_n) и (b_n) два низа природних бројева таквих да је $a_{n+1} = na_n + 1$, и $b_{n+1} = nb_n - 1$ за свако $n \geq 1$. Доказати да ова два низа могу имати највише коначно много једнаких елемената.

28. (Тајван 1997) Нека је $n \geq 3$ природан број и нека низ бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$ задовољава $a_{i-1} + a_{i+1} = k_i a_i$ за неки цео број k_i. Доказати да је $2n \leq \sum k_i \leq 3n$.

29. (Кина 1995) Претпоставимо да $2n$ реалних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ $(n \geqslant 3)$ задовољава услове:
(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} b_i$.
(2) $0 < a_1 \leqslant a_2$ и $a_i + a_{i+1} = a_{i+2}$ за $i = 1, 2, \ldots, n-2$.
(3) $0 < b_1 \leqslant b_2$ и $b_i + b_{i+1} = b_{i+2}$ за $i = 1, 2, \ldots, n-2$.
Доказати да је $a_{n-1} + a_n \leqslant b_{n-1} + b_n$.

30. (Белорусија 1999) Низови $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ дефинисани су са $x_1 = y_1 = \sqrt{3}$ и

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^2}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}}.$$

Доказати да за $n \geqslant 2$ важи $2 < x_n y_n < 3$.

31. (Кореја 2001) Доказати да Фибоначијев низ $\{F_n\}$ задовољава једнакост

$$F_{2n} = \frac{F_{2n+2}^3 + F_{2n-2}^3}{9} - 2F_{2n}^3, \qquad \text{за } n \geqslant 2.$$

32. Низ $\{a_n\}$ дефинисан је са $a_1 = 1$ и за $n \geqslant 1$

$$a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 3}.$$

Доказати да је $a_{3n+1} = a_{n+1}(a_{n+1}^2 + 1)$, за $n \geqslant 0$.

33. (Мала олимпијада 2005) Колико има 100-цифрених природних бројева у чијем се декадном запису појављује само непарне цифре, при чему је разлика сваке две суседне цифре једнака 2.

34. Наћи број бинарних низова дужине n који не садрже подниз 010.

35. (ИМЦ 2006) Посматрајмо скуп $S_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \forall i = 1, 2, \ldots, n,\ x_i \in \{0, 1, 2\}\}$ и скупове

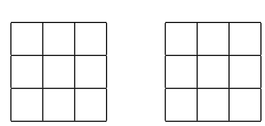
$$A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_n : \forall i = 1, 2, \ldots, n-2,\ |\{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}| \neq 1\},$$

$$B_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_n : (x_i = x_{i+1} \Rightarrow x_i \neq 0)\}.$$

Доказати да је $|A_{n+1}| = 3 \cdot |B_n|$.

36. (Савезно 2001, 3-4 раз) Нека је k природан број и N_k број низова дужине 2001 чији су сви чланови елементи скупа $\{0, 1, 2, \ldots, 2k+1\}$, а непаран број чланова сваког ниаз једнак је 0. Одредити највећи степен двојке који дели N_k.

37. (ИМО 1998, предлог) (а) Уколико се правоугаоник димензија $5 \times n$ може поплочати фигурама као на слици, доказати да је n паран.



(б) Доказати да постоји више од $2\cdot 3^{k-1}$ начина да се поплоча дати $5\times 2k$ правоугаоник ($k \geqslant 3$) са $2k$ фигура. (Симетрична поплочавања су различита.)

38. (ИМО 1999, предлог) Биологичар посматра камелеона. Камелеон хвата муве и одмара се после сваке ухваћене. Биологичар је приметио да:

(1) прва мува је ухваћена после одмарања које је трајало 1 минут;

(2) време одмора пред $2m$-то хватања је исто као време одмора пред m-то хватање и за један минут краће од одмарања пред $2m+1$-во хватање;

(3) када камелеон престане да се одмара, он муве хвата тренутно.

(а) Колико мува је камелеон ухватио, пре његовог првог одмарања од 9 минута?
(б) После колико минута је ухватио 1998. муву?
(ц) Колико је мува ухваћено после укупно 1999 минута?

39. (БМО 2003, предлог) Нека је $\mathcal{C} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_{2003}) : a_i \in \{0,1\}$ за $1 \leq i \leq 2003\}$. За свако $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{2003})$ из $\mathcal{C}$ дефинишемо низ $A = (A_1, A_2, \ldots, A_{2003})$ са $A_1 = a_1$ и

$$A_i = \begin{cases} A_{i-1} & \text{за } a_i = 0 \text{ или } A_{i-1} \geq i/2 \\ i - A_{i-1} & \text{за } a_i = 1 \text{ и } A_{i-1} < i/2, \end{cases}$$

за $i > 1$. Одредити број низова a из $\mathcal{C}$ таквих да је $A_{2003} = 20$.

40. (ИМО 1998, предлог) Карте нумерисане бројевима од 1 до 9 поређане су у неком поредку у низ. У једном кораку може се узети било који блок узастопних карата, чији су бројеви у растућем или опадајућем поредку, и окрену ти га. На пример низ 916542748 може се заменити низом 914562748. Доказати да се у највише 12 корака карте могу уредити тако да су у растућем или опадајућем поредку.

41. Доказати да за сваки природан број n важи идентитет

$$\sum_{i=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \binom{n-i+1}{i} 2^i = \frac{(-1)^{n+1} + 2^{n+2}}{3}.$$

42. (Квант М463) Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ природни бројеви такви да је $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y_1 + y_2 + \ldots + y_m < mn$. Доказати да се у последњој једнакости могу прецртати неки сабирци тако да једнакост остане на снази.

43. (ИМО 1984, предлог) Наћи све низове $a_1, a_2, \ldots$ такве да је $a_1 = 1$ и

$$|a_m - a_n| \leq \frac{2mn}{m^2 + n^2},$$

за свака два природна броја m и n.

44. Нека је n природан број. Низ $\{a_n\}$ дефинисан је са $a_0 = \dfrac{1}{2}$ и

$$a_k = a_{k-1} + \frac{a_{k-1}^2}{n},$$

за $k = 1, 2, \ldots$ Доказати да је

$$1 - \frac{1}{n} < a_n < 1.$$

45. (АПМО 1999) Низ $\{a_n\}$ задовољава нејенакост $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} \leqslant a_n.$$

46. (Кина 1997) Нека су $a_1, a_2, \ldots$ ненегативни цели бројеви за које је $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ за све природне бројеве n, m. Доказати да је

$$a_n \leq m a_1 + \Big(\frac{n}{m} - 1\Big) a_m.$$

47. (Кина 1998) Нека је n природна број. Одредити да ли постоје природни бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ такви да је $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n} b_n$ и

$$n - 1 > \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} > n - 1 - \frac{1}{1998}.$$

48. Дат је низ природних бројева $\{a_n\}$, тако да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$0 < a_{n+1} - a_n < 2007.$$

Доказати да постоје индекси $i < j$, тако да $a_i \mid a_j$.

49. (Бугарска 1996) Низ (a_n) је дефинисан са $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{n}{a_n} \quad \text{за } n \geq 1.$$

Доказати да је за сваки природан број $n \geq 4$, $[a_n^2] = n$.

50. (ИМО 1994, предлог) Нека је $a_0 = 1994$ и

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n + 1}$$

за све ненегативне целе n. Доказати да је $1994 - n$ цео део броја a_n за $0 \leq n \leq 998$.

51. (ИМО 1998, предлог) Низ $a_1, a_2, \ldots$ дефинисан је на следећи начин: $a_1 = 1$ и за свако $n \geqslant 1$, a_{n+1} је најмањи број већи од a_n такав да је $a_i + a_j \neq 3a_k$ за свака три $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$, не обавезно различита. Одредити a_{1998}.

52. Низ је дефинисан са $a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1$ и $a_{n+3} = a_{n+1} + 1998a_n$ за $n \geq 0$. Доказати да је за сваки природан број n

$$a_{2n-1} = 2a_n a_{n+1} + 1998a_{n-1}^2.$$

53. Бесконачни низ двојки и тројки

$$2, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 2, \ldots$$

има својство да уколико формирамо низ који репрезентује број тројки између узастопних појављивања броја 2, добијамо низ идентичан полазном. Доказати да постоји реалан број r такав да за свако n, n-ти члан низа је 2 ако и само ако је $n = 1 + [rm]$ за неки ненегативан цео број m.

54. Нека је k дати природан број. Низ $\{x_n\}$ дефинисан је са $x_1 = 1$ и x_{n+1} је најмањи природан број који не припада скупу $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1 + k, x_2 + 2k, \ldots, x_n + nk\}$. Доказати да постоји реалан број a такав да је $x_n = [an]$ за све природне бројеве n.

55. Нека су a и b природни бројеви различити од 1. Низ $\{x_n\}$ дефинисан је са $x_0 = 0, x_1 = 1$ и за $n \geqslant 2$

$$x_n = \begin{cases} ax_{n-1} - x_{n-2} & \text{уколико је } n \text{ непаран} \\ bx_{n-1} - x_{n-2} & \text{уколико је } n \text{ паран.} \end{cases}$$

Доказати да је производ сваких k узастопних чланова низа дељив са производом првих k.
(**Идеја:** посматрати и низ $\{y_n\}$ за који важи иста веза као и за $\{x_n\}$ само са промењеним местима за a и b)

56. Нека су a и b природни бројеви. Низ $\{x_n\}$ дефинисан је са $x_0 = 0, x_1 = 1$ и за $n \geqslant 2$

$$x_n = \begin{cases} ax_{n-1} + x_{n-2} & \text{уколико је } n \text{ непаран} \\ bx_{n-1} + x_{n-2} & \text{уколико је } n \text{ паран.} \end{cases}$$

Доказати да је производ сваких k узастопних чланова низа дељив са производом првих k.

57. Доказати да за Фибоначијев низ $\{F_n\}$ важи идентитет

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}.$$

58. Доказати да за низ Каталанових бројева $\{C_n\}$ важи идентитет

$$\binom{2n}{n} = 3\binom{2(n-1)}{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} C_k \binom{2(n-k-1)}{n-k-1}.$$

59. (ИМО 1998, предлог) Нека је $a_0, a_1, \dots$ растући низ ненегативних целих бројева такав да се сваки ненегативан цео број може на јединствен начин представити у облику $a_i + 2a_j + 4a_k$, где бројеви i, j, k не морају бити различити. Одредити a_{1998}.

60. Доказати да је за сваки природан број n број разлагања броја n на различите сабирке једнак броју разлагања броја n на непарне сабирке.

61. Низ $\{a_n\}$ дефинисан је са $a_0 = 1, a_1 = 1$ и $a_n = a_{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-2}$, за $n \geqslant 2$. Доказати да је за сваки непаран прост број p број $a_p - 1$ дељив са p.

62. (Путнам 1983) Низ $\{a_n\}$ природних бројева дефинисан је са

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \left[\frac{3}{2} a_n\right].$$

Доказати да постоји бесконачно много чланова овог низа који су непарни.

63. (Вијетнам 1996) Нека су a и b природни бројеви, при чему је a непаран. Низ $\{u_n\}$ дефинисан је са $u_0 = b$ и за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$ уколико је u_n паран и $u_{n+1} = u_n + a$ иначе.

(а) Доказати да је $u_n \leqslant a$ за неко $n \in \mathbb{N}$.
(б) Доказати да је u_n периодичан од неког места па надаље.

64. (Русија 2000) Нека је $\{a_n\}$ низ дефинисан са $a_1 = 1$ и

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 2 & \text{ако је } a_n - 2 \notin \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ и } a_n - 2 > 0 \\ a_n + 3 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказати да за сваки природан број $k > 1$ постоји n такво да је $a_n = k^2 = a_{n-1} + 3$.

65. (Русија 2000) За сваки непаран број $a_0 > 5$ низ $\{a_n\}$ дефинисан је са

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n^2 - 5 & \text{ако је } a_n \text{ непаран} \\ \dfrac{a_n}{2} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказати да низ није ограничен.

66. (БМО 2006, 4 зад) Нека је m природан број. Одредити све природне бројеве a такве да је низ $\{a_n\}$ дефинисан са $a_0 = a$ и

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & \text{ако је } a_n \text{ паран} \\ a_n + m & \text{иначе} \end{cases}$$

за $n \geqslant 0$, периодичан.

67. (Пољска 1997) Доказати да низ бројева $a_1 = 1$ и

$$a_n = a_{n-1} + a_{[\frac{n}{2}]}$$

садржи бесконачно много чланова дељивих са 7.

68. (ИМО 1988, предлог) Нека је $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ и $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ за $n \geq 3$. Доказати да $2^k \mid a_n$ ако и само ако $2^k \mid n$.

69. (Бугарска 2000) Нека је низ $\{a_n\}$ дефинисан $a_1 = 43, a_2 = 142$ и $a_{n+1} = 3a_n + a_{n-1}$ за све $n \geqslant 2$. Доказати да је

(а) $(a_n, a_{n+1}) = 1$ за све $n \geqslant 1$.
(б) за све природне бројеве m постоји бесконачно много природних бројева n таквих да су $a_n - 1$ и $a_{n+1} - 1$ оба дељива са m.

70. (ИМО ???, предлог) Низ природних бројева дат је формулом $a_n = \left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$. Одредити све бројеве који припадају овом низу.

71. (Бугарска 2003) Низ $\{y_n\}$ дефинисан је са $y_1 = y_2 = 1$ и

$$y_{n+2} = (4k-5)y_{n+1} - y_n + 4 - 2k,$$

за $n \geqslant 1$. Одредити све природне бројеве k за које је сваки члан низа природан број.

72. (Канада 1995) Нека је m природан број. Дефинишимо низ $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ са $a_0 = 0$, $a_1 = m$ и $a_{n+1} = m^2 a_n - a_{n-1}$ за $n \geqslant 1$. Доказати да је пар (a, b) ненегативних целих бројева, где је $a \leqslant b$, решење једначине

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = m^2$$

ако и само ако је пар (a, b) једнак пару (a_n, a_{n+1}) за неко $n \geqslant 0$.

73. Низ $\{a_n\}_{n\geq 1}$ дефинисан је са $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$, и

$$a_{n+4}a_n = a_{n+3}a_{n+1} + a_{n+2}^2.$$

Доказати да је сваки члан овог низа природан број.

radmarko@yahoo.com
фебруар 2007.