Хомотетија

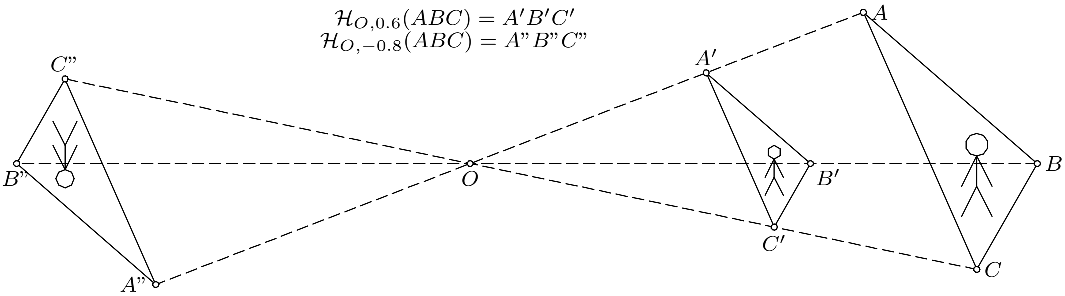
верзија 2.0: 16.10.2016.

Душан Ђукић

Дефиниција. *Хомотетија* $\mathcal{H}_{O,k}$ са центром O и коефицијентом k је пресликавање равни које слика сваку тачку X у тачку X' такву да је $\overrightarrow{OX'} = k \cdot \overrightarrow{OX}$.

Хомотетију зовемо *позитивном* ако је $k > 0$, и *негативном* ако је $k < 0$.

Хомотетија је трансформација сличности, тј. слика неке фигуре је њој слична фигура. Као таква, хомотетија слика праве у праве и кругове у кругове, што значи да чува колинеарност и концикличност, као и паралелност и конкурентност правих. Она такође чува углове и односе између дужина. Укратко, хомотетија чува све осим величине.



Ако хомотетија са центром O слика тачку A у A', онда се центар O налази на правој AA'. Ово једноставно својство ћемо често користити.

Т.1. Ако су троуглови ABC и $A'B'C'$ такви да је $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ и $CA \parallel C'A'$, онда су они хомотетични или подударни. Праве AA', BB' и CC' конкурентне у центру хомотетије или паралелне.

Доказ. Ако се никоје две од правих AA', BB', CC' не секу, тврђење је тривијално. Претпоставимо без смањења општости да се AA' и BB' секу у тачки O. Хомотетија са центром O која слика тачке A, B у A', B' редом слика C у тачку C_1 такву да је $B'C_1 \parallel BC$ и $A'C_1 \parallel AC$, па је $C_1 \equiv C'$, што доказује тврђење. □

Пример. У троуглу ABC, ортоцентар H, тежиште T и центар описаног круга O леже на једној правој *(Ојлерова права).*

Доказ. Нека су A_1, B_1, C_1 редом средишта страница BC, CA, AB. Тачка O је ортоцентар троугла $A_1B_1C_1$. Хомотетија са центром T и коефицијентом $-\frac{1}{2}$ слика троугао ABC у $\triangle A_1B_1C_1$, па зато слика ортоцентар H троугла ABC у ортоцентар O троугла $A_1B_1C_1$, дакле H, T, O су на правој и $\overrightarrow{HT} = 2\overrightarrow{TO}$. △

Композиција две хомотетије такође је хомотетија. Следеће тврђење даје везу између центара две хомотетије и њихове композиције.

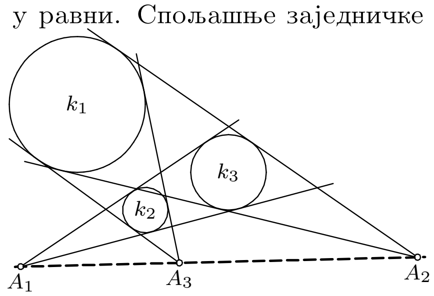
Т.2. Нека су $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ хомотетије са центрима O_1 и O_2 редом. Ако је O центар хомотетије $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$, онда су тачке O_1, O_2 и O колинеарне.

Доказ. Означимо са λ_1 и λ_2 редом коефицијенте хомотетија $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Нека је A произвољна тачка у равни, $B = \mathcal{H}_1(A)$ и $C = \mathcal{H}_2(B) = \mathcal{H}(A)$. Тачке O_1, O_2 и O редом леже на страницама AB, BC и AC троугла ABC. При том је $\frac{\overrightarrow{AO_1}}{\overrightarrow{O_1B}} = -\lambda_1$, $\frac{\overrightarrow{BO_2}}{\overrightarrow{O_2C}} = -\lambda_2$ и $\frac{\overrightarrow{CO}}{\overrightarrow{OA}} = -\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}$, дакле $\frac{\overrightarrow{AO_1}}{\overrightarrow{O_1B}} \cdot \frac{\overrightarrow{BO_2}}{\overrightarrow{O_2C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CO}}{\overrightarrow{OA}} = -1$, и по Менелајевој теореми O_1, O_2 и O су на правој. □

Следеће тврђење је директна последица претходног.

Т.3 (Монжова теорема). Дати су кругови k_1, k_2 и k_3 у равни. Спољашње заједничке тангенте k_2 и k_3 секу се у A_1; аналогно се дефинишу A_2 и A_3. Тада су тачке A_1, A_2 и A_3 колинеарне.

Тврђење важи и ако се две од три тачке A_1, A_2, A_3 дефинишу као пресеци *унутрашњих* заједничких тангенти.



Доказ. Нека су $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ хомотетије са центрима A_1 и A_2 које сликају k_2 у k_3 и k_3 у k_1, редом. Хомотетија $\mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1$ која слика k_2 у k_1 има центар у A_3. Из претходне теореме следи тврђење. $\square$

Последица. Нека кругови γ_1 и γ_2 изнутра додирују круг γ у тачкама A и B. Тада се спољашње тангенте кругова γ_1 и γ_2 секу на правој AB. $\square$

Задаци

1. Кругови k_1 и k_2 се додирују споља у тачки P, а њихове спољашње заједничке тангенте секу се у тачки Q. Права кроз тачку Q сече круг k_1 у тачкама A и B, а круг k_2 у тачкама C и D, уз распоред тачака $Q - A - B - C - D$. Доказати да је $\sphericalangle APC = 90°$.

2. Дати су кругови k_1 и k_2 полупречника r_1 и r_2 који се додирују у тачки P. Одредити највећу могућу површину троугла PQR коме је теме Q на кругу k_1, а теме R на k_2.

3. Круг γ_1 изнутра додирује круг γ у тачки A. Тетива BC круга γ додирује γ_1 у тачки D. Доказати да је $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC$.

4. Подударни кругови ω_1 и ω_2 изнутра додирују круг ω редом у тачкама A и B. Одабрана је тачка C на ω. Праве AC и BC поново секу ω_1 и ω_2 у A' и B' редом. Доказати да је $A'B' \parallel AB$.

5. Дат је паралелограм $ABCD$. Круг k_a додирује странице AB и AD, а круг k_c додирује странице CB, CD и круг k_a споља у тачки M. Доказати да је M на дијагонали AC.

6. (а) У троуглу ABC, уписани круг ω додирује BC у D, а приписани круг ω_a преко пута A додирује BC у E. Доказати да тачка F дијаметрално супротна тачки D у ω лежи на правој AE.

   (б) Ако је M средиште BC и I центар ω, доказати да права MI полови AD.

7. У троуглу ABC уписани круг и приписани круг наспрам A имају центре I и I_a, а додирују страницу BC у тачкама D и D_a, редом. Доказати да се праве ID_a и I_aD секу на висини троугла ABC из темена A.

8. Квадрат $PQRS$ је уписан у круг. Тангенте из тачке A ван круга секу PR у тачкама K и L, а праве AQ и AS редом секу PR у M и N. Доказати да је $KM = LN$.

9. Троугао ABC у коме је $AB = AC$ уписан је у круг k. Круг ω изнутра додирује круг k и додирује странице AB и AC редом у P и Q. Доказати да је центар уписаног круга троугла ABC средиште дужи PQ.

10. Троугао ABC је такав да је $AB + AC = 2BC$. Доказати да тачка A, средишта M и N страница AB и AC и центри уписаног и описаног круга I и O, редом, леже на једном кругу k. Такође доказати да је IT тангента на k, где је T тежиште троугла.

11. Кругови ω_1 и ω_2 са центрима O_1 и O_2 редом секу се у тачкама K и K'. Једна заједничка тангента додирује ω_1 и ω_2 у P_1 и P_2, а друга у Q_1 и Q_2, редом. Нека су M_1 и M_2 редом средишта P_1Q_1 и P_2Q_2. Доказати да је $\sphericalangle O_1KO_2 = \sphericalangle M_1KM_2$.

12. Дат је трапез $ABCD$ са паралелним страницама $AB > CD$. Тачке K и L редом на страницама AB и CD су такве да је $\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}$. Тачке P и Q на дужи KL су такве да је $\sphericalangle APB = \sphericalangle BCD$ и $\sphericalangle DQC = \sphericalangle CBA$. Доказати да су тачке B, C, P, Q концикличне.

13. Три круга једнаких полупречника пролазе кроз тачку O и леже унутар троугла ABC. Сваки од тих кругова додирује по две странице троугла. Доказати да тачка O и центри описаног и уписаног круга троугла ABC леже на једној правој.

14. Дата су четири круга $\gamma, \gamma_a, \gamma_b, \gamma_c$ једнаких полупречника ρ унутар троугла ABC. Круг γ_a додирује AB и AC, γ_b додирује AB, BC, а γ_c додирује AC, BC, и сваки од тих кругова додирује γ. Ако су r и R полупречници уписаног и описаног круга $\triangle ABC$, одредити ρ.

15. У неједнакокраком троуглу $A_1A_2A_3$, a_i означава страницу насупрот темену A_i. За $i = 1, 2, 3$, M_i је средиште странице a_i, T_i тачка додира уписаног круга са a_i, а S_i тачка симетрична тачки T_i у односу на симетралу угла у темену A_i. Доказати да се праве M_1S_1, M_2S_2 и M_3S_3 секу у једној тачки.

16. Дат је круг γ у унутрашњости троугла ABC. Круг γ_a додирује странице AB и AC и споља додирује γ у тачки A_1 тако да је A ближе кругу γ_a него кругу γ; аналогно се дефинишу кругови γ_b, γ_c и тачке B_1, C_1. Доказати да праве AA_1, BB_1 и CC_1 имају заједничку тачку.

17. У неједнакостраничном троуглу ABC уписани круг додирује странице BC, CA, AB редом у тачкама D, E, F. Тачке P, Q, R редом су подножја висина из D, E, F у троуглу DEF. Доказати да се праве AP, BQ и CR секу у тачки на Ојлеровој правој троугла DEF.

18. Уписани круг троугла ABC додирује странице BC, CA, AB редом у тачкама D, E, F. Доказати да центри описаног и уписаног круга $\triangle ABC$ и ортоцентар $\triangle DEF$ леже на истој правој.

19. *(Паскалова теорема)* Нека су A, B, C, D, E, F тачке на кругу. Праве AB и DE секу се у L, праве BC и EF у M, а CD и FA у N. Доказати да су тачке L, M, N колинеарне.

20. Троугао ABC је уписан у круг Ω. Нека круг ω_a додирује странице AB и AC и изнутра додирује Ω у тачки T_a; аналогно дефинишемо кругове ω_b, ω_c и тачке T_b, T_c. Доказати да се праве AT_a, BT_b, CT_c секу у једној тачки, и то на правој FH, где је H ортоцентар и F Фојербахова тачка троугла ABC.

21. Дата је тачка P на страници AB конвексног четвороугла $ABCD$. Нека је ω уписани круг троугла CPD и I његов центар. Претпоставимо да ω додирује уписане кругове троуглова APD и BPC у тачкама K и L редом. Нека се дијагонале AC и BD секу у E, а праве AK и BL у F. Доказати да су тачке E, I и F колинеарне.

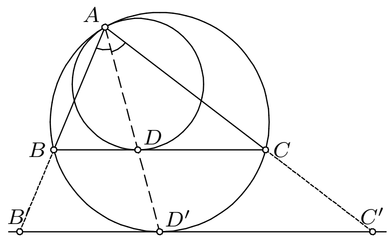
22. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао код кога је $|BA| \neq |BC|$. Нека су ω_1 и ω_2 уписани кругови троуглова ABC и ADC, редом. Претпоставимо да постоји круг ω који додирује полуправу BA иза тачке A и полуправу BC иза тачке C, а који истовремено додирује и праве AD и CD. Доказати да се спољашње заједничке тангенте кругова ω_1 и ω_2 секу на ω.

Решења

1. Нека је $\mathcal{H}$ хомотетија са центром у Q која слика круг k_1 у круг k_2. Та хомотетија слика тачке A и B редом у C и D. Такође, слика тачке P је тачка P' на кругу k_2 дијаметрално супротна тачки P. Према томе, $AP \parallel CP'$ и $\sphericalangle APC = \sphericalangle PCP' = 90°$.

2. Хомотетија са центром P која слика k_1 у k_2 сликаће тачку $Q \in k_1$ у тачку $Q' \in k_2$ такву да је $PQ' = \frac{r_2}{r_1}PQ$. Зато је $P_{PQR} = \frac{r_1}{r_2}P_{PQ'R}$, где је троугао $PQ'R$ уписан у круг k_2. Знамо да је површина троугла $PQ'R$ максимална када је он једнакостраничан, и тада је једнака $\frac{r_2^2\sqrt{3}}{4}$. Следи да је максимална површина $\triangle PQR$ једнака $\frac{r_1 r_2\sqrt{3}}{4}$.

3. Посматрајмо хомотетију $\mathcal{H}$ са центром у A која слика ω_1 у ω. Слика праве BC при хомотетији $\mathcal{H}$ је права $B'C'$ паралелна њој која додирује ω у тачки $D' = \mathcal{H}(D)$. Следи да је D' средиште лука BC круга ω који не садржи тачку A, дакле AD је симетрала угла BAC.



4. Нека је r полупречник ω, а r' полупречник ω_1 и ω_2. Хомотетија са центром A и коефицијентом k која слика ω_1 у ω слика A' у A, па је $AC/AA' = k$. Аналогно је $BC/BB' = k$, па је по Талесовој теореми $A'B' \parallel AB$.

5. Нека је $\mathcal{H}$ хомотетија са центром M која слика k_a у k_c. Слика праве AB при $\mathcal{H}$ је тангента на k_c паралелна правој AB, одакле следи да је то права CD. Аналогно, $\mathcal{H}$ слика праву AD у праву CB, дакле слика тачке A је C, и M је на AC.

6. Хомотетија са центром A која слика ω_a у ω такође слика E у тачку на ω у којој је тангента паралелна са BC, а то је тачка F; дакле, A, E, F су колинеарне.

   Као средња линија троугла DEF, права MI је паралелна правој EFA и зато садржи средњу линију троугла ADE, одакле следи тврђење.

7. По претходном задатку, тачка F на уписаном кругу дијаметрално супротна тачки D лежи на правој AD_a. Следи да права D_aI пролази кроз средиште висине из темена A. Аналогно, права DI_a пролази кроз средиште те висине.

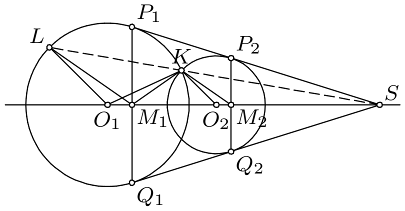
8. Посматрајмо хомотетију $\mathcal{H}$ са центром A која слика PR у тангенту на круг у тачки S; она слика N у S. Нека $\mathcal{H}$ слика K, L, M у K', L', M' редом. Дати круг је уписан у $\triangle AK'L'$ и додирује $K'L'$ у S, па је по претходном задатку $K'M' = L'S$, одакле је и $KM = LN$ по Талесовој теореми.

9. Нека је O центар круга ω и нека ω додирује k у тачки D. Средиште I дужи PQ лежи на правој са тачкама A, O и D. Посматрајмо хомотетију са центром A која слика средиште M странице BC у тачку D; она слика $\triangle ABC$ у неки троугао $AB'C'$, при чему је $k = \frac{AB'}{AB}$ коефицијент хомотетије. Како су троуглови AIP, ADB', ABD и APO слични, имамо $\frac{AI}{AO} = \frac{AI}{AP} \cdot \frac{AP}{AO} = \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AD}{AB'} = \frac{AB}{AB'}$, па хомотетија слика I у O, тј. у центар уписаног круга $\triangle AB'C'$; дакле, I је центар уписаног круга $\triangle ABC$.

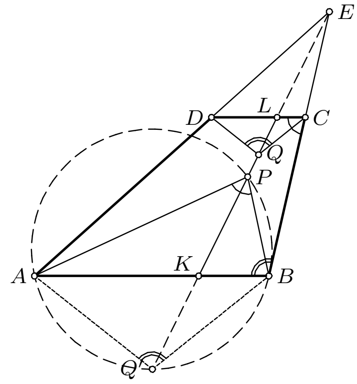
10. Нека је D средиште лука BC описаног круга $\triangle ABC$ који не садржи A. Центар I је на правој AD и важи $DB = DC = DI$. На основу Птоломејеве теореме у четвороуглу $ABDC$ имамо $DA \cdot BC = DB(AB + AC) = 2DB \cdot BC$, одакле је $DA = 2DB = 2DI$, тј. I је средиште тетиве AD, одакле следи $\sphericalangle AOI = 90°$. Према томе, тачке M, N и I леже на кругу k над пречником AO.

    Круг k је хомотетичан кругу ABC са центром хомотетије A и коефицијентом $\frac{1}{2}$, а I је средиште лука MN, па је тангента у I на k паралелна правој BC. Како је $ah_a = 2[ABC] = (a + b + c)r = 3ar$, растојање од T до праве BC је једнако $\frac{1}{3}h_a = r$, дакле IT је паралелно са BC и додирује k.

11. Приметимо да је $\sphericalangle O_1KO_2 = \sphericalangle M_1KM_2$ еквивалентно са $\sphericalangle O_1KM_1 = \sphericalangle O_2KM_2$. Нека је S тачка пресека заједничких тангенти. Хомотетија са центром у S која слика ω_1 у ω_2 слика K у L. Из $\triangle SO_1P_1 \sim \triangle SP_1M_1$ имамо $SK\cdot SL = SP_1^2 = SO_1\cdot SM_1$, што значи да су O_1, L, K, M_1 концикличне. Зато је $\sphericalangle O_1KM_1 = \sphericalangle O_1LM_1 = \sphericalangle O_2KM_2$.



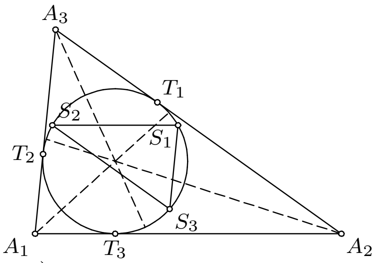
12. Нека је E тачка пресека правих AD и BC. Хомотетија $\mathcal{H}$ са центром E, која слика тачке C и D редом у B и A, слика тачку L и K, што значи да су тачке E, L, K колинеарне. Нека се при тој хомотетији тачка Q слика у Q'. Како је $\sphericalangle AQ'B = \sphericalangle DQC = 180^\circ - \sphericalangle BPA$, четвороугао $APBQ'$ је тетиван. Следи да је (у оријентисаним угловима) $180^\circ - \sphericalangle CQP = \sphericalangle EQC = \sphericalangle EQ'B = \sphericalangle PAB = 180^\circ - \sphericalangle ABP - \sphericalangle BPA = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABP = \sphericalangle PBC$.



13. Нека су O_a, O_b, O_c центри ових кругова који одговарају теменима A, B, C, редом. Праве AO_a, BO_b и CO_c су симетрале углова троугла ABC и секу се у центру уписаног круга I. Странице троугла $O_aO_bO_c$ су паралелне страницама троугла ABC, дакле $\triangle O_aO_bO_c$ је слика $\triangle ABC$ при хомотетији $\mathcal{H}$ са центром I. Како $\mathcal{H}$ слика центар O описаног круга $\triangle O_aO_bO_c$ у центар S описаног круга ABC, тачке I, O, S су колинеарне.

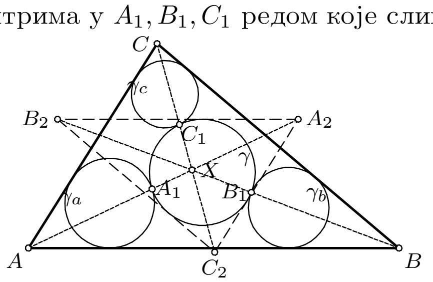
14. Нека су S_a, S_b, S_c, S, I, O редом центри $\gamma_a, \gamma_b, \gamma_c, \gamma$ и уписаног и описаног круга ω, Ω троугла ABC, редом. Троугао $S_aS_bS_c$ је хомотетичан троуглу ABC са коефицијентом сличности $\frac{r-\rho}{r}$. Центар ове хомотетије је пресек правих AS_a, BS_b, CS_c, а то је I. Иста хомотетија слика Ω (полупречника R) у описани круг $\triangle S_aS_bS_c$ (полупречника 2ρ јер је $SS_a = SS_b = SS_c = 2\rho$), па је $\frac{r-\rho}{r} = \frac{R}{2\rho}$. Одавде добијамо $\rho = \frac{Rr}{R+2r}$.

15. Тачке S_1, S_2, S_3 су на уписаном кругу. Означимо са $\widehat{XY}$ оријентисани лук XY. Лукови $\widehat{T_2S_1}$ и $\widehat{T_1T_3}$ су једнаки јер су симетрични у односу на симетралу $\sphericalangle A_1$. Аналогно је и $\widehat{T_3T_2} = \widehat{S_2T_1}$. Одавде је $\widehat{T_3S_1} = \widehat{T_3T_2} + \widehat{T_2S_1} = \widehat{S_2T_1} + \widehat{T_1T_3} = \widehat{S_2T_3}$. Следи да је S_1S_2 паралелно A_1A_2, па је паралелно и правој M_1M_2. Слично је $S_1S_3 \parallel M_1M_3$ и $S_2S_3 \parallel M_2M_3$.



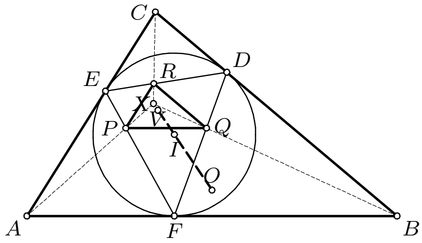
Пошто $\triangle M_1M_2M_3$ и $\triangle S_1S_2S_3$ нису подударни (немају исте полупречнике описаних кругова), они су хомотетични, и праве M_iS_i пролазе кроз центар хомотетије.

16. Посматрајмо три хомотетије $\mathcal{H}_a$, $\mathcal{H}_b$ и $\mathcal{H}_c$ са центрима у A_1, B_1, C_1 редом које сликају γ_a, γ_b и γ_c у γ. Означимо $A_2 = \mathcal{H}_a(A)$, $B_2 = \mathcal{H}_b(B)$ и $C_2 = \mathcal{H}_c(C)$; при том $A_2 \in AA_1$, $B_2 \in BB_1$ и $C_2 \in CC_1$. Обе хомотетије $\mathcal{H}_a$ и $\mathcal{H}_b$ сликају праву BC у тангенту круга γ паралелну правој BC, па је $B_2C_2 \parallel BC$; аналогно, $C_2A_2 \parallel CA$ и $A_2B_2 \parallel AB$. То значи да су троуглови ABC и $A_2B_2C_2$ хомотетични, са центром X у пресеку правих AA_2, BB_2 и CC_2. Следи да праве AA_1, BB_1, CC_1 пролазе кроз X.



17. Праве PQ, QR, RP су паралелне страницама AB, BC, CA редом, па су троуглови ABC и PQR хомотетични, са центром хомотетије у некој тачки X. Та хомотетија слика и уписане кругове ових троуглова један у други, а њихови центри су центар I уписаног круга $\triangle ABC$ (уједно и центар описаног круга $\triangle DEF$) и ортоцентар $\triangle DEF$.

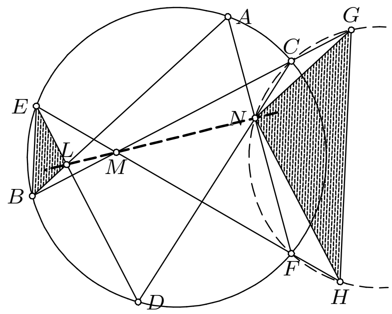
18. Означимо са O и I редом центре описаног и уписаног круга $\triangle ABC$, и са V ортоцентар $\triangle DEF$. Нека су P, Q, R редом подножја висина из D, E, F у троуглу DEF. Као у претходном задатку, троуглови PQR и ABC су хомотетични; нека је X центар хомотетије $\mathcal{H}$ која слика $\triangle ABC$ у $\triangle PQR$. Центар уписаног круга $\triangle PQR$ је V. Хомотетија $\mathcal{H}$ слика I у V, па су тачке X, V, I колинеарне, тј. X је на Ојлеровој правој ℓ троугла DEF. Такође, $\mathcal{H}$ слика O у центар описаног круга $\triangle PQR$, што је Ојлеров центар троугла DEF, одакле следи да и O лежи на ℓ, чиме је тврђење доказано.



19. Нека праве BC и EF поново секу круг CFN у тачкама G и H редом.

Лема. Дати су кругови ω_1 и ω_2 који се секу у A и B, и тачке C и D на ω_1. Ако праве AC и BD редом секу ω_2 у E и F, тада је $EF \parallel CD$.

Доказ. Радимо са оријентисаним угловима: $\sphericalangle AEF = \sphericalangle ABF = \sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$, и отуда $EF \parallel CD$. $\square$



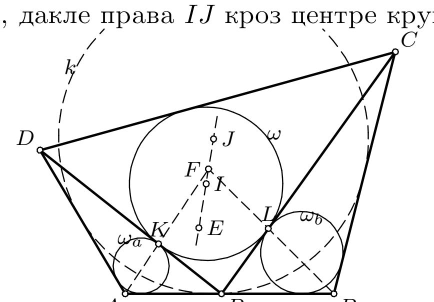
На основу леме је $BE \parallel GH$, $ED \parallel HN$ и $AB \parallel NG$. Троуглови NGH и LBE имају паралелне странице, што значи да су хомотетични, па су BG, EH и LN конкурентне, и то управо у тачки $BG \cap EH = M$.

20. Означимо са ω и ϕ редом уписани и Ојлеров круг $\triangle ABC$. Нека је M центар позитивне хомотетије која слика ω у Ω. На основу теореме 3 за кругове ω, Ω и ω_a, тачке A, T_a и M су колинеарне, дакле праве AT_a, BT_b, CT_c се секу у M.

Центри хомотетија за парове кругова (ϕ, Ω), (ϕ, ω) и (Ω, ω) су редом H, F, M, одакле по Т.3 следи $M \in FH$.

21. Означимо са J центар круга k који додирује праве DA, AB, BC у полуравни одређеној правом AB у којој је четвороугао, и са ω_a и ω_b кругове уписане у $\triangle ADP$ и $\triangle BCP$.

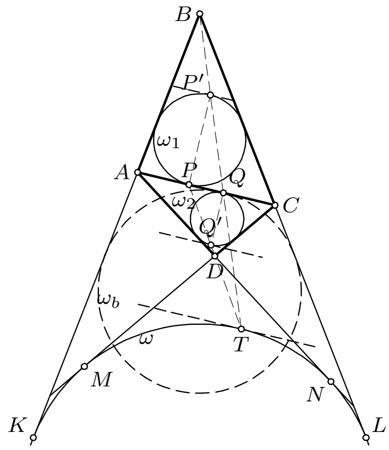
Нека је F' центар негативне хомотетије која слика ω у k. Центри негативне и позитивне хомотетије који сликају ω_a у ω и k редом су K и A, одакле по Т.3 следи $F' \in AK$; аналогно $F' \in BL$. Следи да је $F' \equiv F$, дакле права IJ кроз центре кругова ω и k садржи F.



Из услова да су тангентне дужи из P на ω и ω_a једнаке добијамо да је $AP - AD = CP - CD$, дакле четвороугао $APCD$ има уписан четвороугао ω_d. Нека је X центар позитивне хомотетије која слика ω_a у ω. На основу теореме 3 за кругове ω_a, ω_d и ω, тачка X лежи на правој AC. С друге стране, Т.3 за кругове ω_a, ω и k нам даје колинеарност тачака X, A, E', где је E' центар позитивне хомотетије која слика ω у k. Одатле $E' \in AC$; аналогно $E' \in BD$, па следи $E' \equiv E$. Дакле, права IJ садржи и тачку E, што је крај доказа.

22. Нека ω додирује праве AB, BC, CD, DA редом у тачкама K, L, M, N. Тада је $BA + AD = BA + AN - DN = BK - DN = BL - DM = BC + CM - DM = BC + CD$. То значи да,

ако са P и Q означимо додирне тачке ω_1 и ω_2 редом са AC, важи $AP = \frac{AC+AB-BC}{2} = \frac{AC+CD-AD}{2} = CQ$. Другим речима, приписани круг ω_b наспрам B у $\triangle ABC$ додирује AC управо у Q.



Посматрајмо хомотетију $\mathcal{H}_B$ са центром B која слика ω_b у ω и означимо $T = \mathcal{H}_B(Q)$. На основу "великог задатка", тачка P' дијаметрално супротна тачки P на ω_1 лежи на правој BQ, а тачка Q' дијаметрално супротна тачки Q на ω_2 лежи на DP. Тангенте у P', Q' и T на ω_1, ω_2 и ω редом паралелне су правој AC. Следи да хомотетија са центром D која слика ω_2 у ω слика тачку Q' у T, па су тачке T, D, Q', P колинеарне. Значи, праве $P'Q$ и PQ' се секу у тачки T, па како је $PP' \parallel QQ'$, тачка T је центар хомотетије која слика ω_1 у ω_2, одакле следи тврђење.

Београд, 2014-2016