Теория графов.

§0. Введение.

1. *Графом* G называется совокупность из некоторого (обычно конечного) множества V, элементы которого называются *вершинами*, и некоторого выделенного подмножества E множества V^2 пар элементов множества V (называемых *ребрами*). Обычно подразумевается, что пары неупорядочены (граф *неориентированный*) и элементы в каждой паре различны (нет *петель*). Если рассматриваются упорядоченные пары, граф называется *ориентированным* (или *орграфом*).

Говорят, что (вообще говоря, ориентированное) ребро $e = (v_1, v_2)$ *соединяет* вершины v_1 и v_2, *выходит* из вершины v_1 и *входит* в вершину v_2. Будем также говорить, что ребро e *инцедентно* вершинам v_1 и v_2.

Определим операцию *стягивания* некоторого множества $V_1 \subset V$ вершин графа G следующим образом: вершины множества V_1 заменяются одной вершиной, которая соединена в новом графе со всеми вершинами, соединенными в G хотя бы с одной вершиной множества V_1. Остальные вершины и ребра между ними остаются.

Степенью вершины v называется количество инцедентных ей ребер. В ориентированном случае определяются *входящая* и *исходящая* степени вершины, соответственно как количество входящих в вершину ребер и количество исходщих из нее ребер.

Теорема. Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству ребер. В ориентированном графе сумма входящих степеней равна сумме исходящих степеней.

Доказательство. Каждое ребро инцедентно двум вершинам, поэтому его удаление уменьшает сумму степеней всех вершин на 2. Удаляя по очереди все ребра (пусть их k), придем к графу, в котором сумма степеней очевидна равна 0. Значит, вначале она была равна $2k$. В ориентированном случае при удалении ребра уменьшается на 1 как сумма входящих, так и сумма исходящих степеней, откуда аналогично следует второе утверждение теоремы.

Следствие. В графе четное количество вершин нечетной степени.

Предположим, что вершины v_1, v_2, $\ldots$, v_n таковы, что $(v_i, v_{i+1}) \in E$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$. В этом случае говрят о *пути* $v_1 v_2 \ldots v_n$ из v_1 в v_n, *соединяющем* вершины v_1 и v_n. Если все вершины пути различны, путь называется *простым*; если различны все ребра — *реберно-простым*. Если $v_1 = v_n$, путь называется циклом. Цикл назвается простым (соответственно реберно-простым), если различны вершины $v_1, v_2, \ldots, v_{n_1}$ (соответственно, различны все ребра). Заметим, что любой цикл содержит простой подцикл.

Если две вершины неориентированного графа совпадают или соединены некоторым путем, они называются *связанными*. В ориентированном случае связанными называются такие вершины a и b, что существуют пути как из a в b, так и из b в a (либо $a = b$).

Как в ориентированном, так и в неориентированном случае связанность — отношение эквивалентности на множестве вершин. Классы эквивалентности называются *компонентами связности* (в ориентированном случае иногда говорят *компоненты сильной связности*).

Граф называется *связным*, если в нем ровно одна компонента связности (иными словами, любые две вершины связаны). Орграф, в котором одна компонента связности, называют *сильно связным*.

Каждая компонента связности является связным графом. Каждая компонента связности орграфа является сильно связным орграфом.

В неориентированном случае между вершинами из разных компонент связности ребер нет. В ориентированном случае все ребра между вершинами двух компонент A и B направлены в одну сторону (то есть либо все — из A в B, либо все — из B в A).

Путь (соответственно, цикл) называется *эйлеровым*, если он по разу содержит все ребра графа, и *гамильтоновым*, если по разу содержит все вершины графа.

Следующая теорема составляет простой критерий наличия в графе эйлерова пути или цикла.

Теорема. В связном (неориентированном) графе существует Эйлеров цикл (соответственно, эйлеров путь, не являющийся циклом) если и только если в нем 0 (соответственно 2) вершины нечетной степени.

Доказательство. Только-если-часть очевидна: эйлеров путь, проходя каждую промежуточную вершину, использует два инцедентных ей ребра, стало быть степени всех вершин, кроме начала и конца, четны. Аналогично для цикла. Доказательство если-части проводится индукцией по количеству ребер. Предположим для определенности, что речь о пути. Рассмотрим в нашем графе путь между двумя вершинами нечетной степени. Удалим его. Граф, возможно, распадется на компоненты связности, в каждой из которых степени всех вершин будут четными, а стало быть в них по индукционному предположению будут существовать эйлеровы циклы. Будем двигаться в исходном графе по удаленном пути. Каждый раз, встречая вершину из очередной не обойденной компоненты, будем обходить ее по эйлерову циклу этой компоненты и продолжать движение по пути.

К сожалению, наличие в графе гамильтонова пути или цикла проверить куда сложнее. Достаточное условие дается следующей теоремой.

Теорема. Если в (неориентированном) графе с n вершинами сумма степеней любых двух вершин не меньше $n-1$ (соответственно, не меньше n), в нем существует гамильтонов путь (соответственно, цикл).

Доказательство. Сначала докажем про путь. Предположим противное и рассмотрим самый длиный (в смысле количества вершин) простой путь $p = A_1A_2\dots A_k$ в нашем графе ($k < n$). Вершины A_1 и A_k не могут быть соединены с вершинами, не вошедшими в путь p (иначе его можно увеличить). Пусть вершина A_1 соединена с l вершинами пути p. Рассмотрим l *зеленых* вершин, предшествующих (в смысле порядка от A_1 до A_k) этим вершинам в пути p. Предположим, что вершина A_k не соединена с зелеными вершинами. Тогда степень вершины A_k не больше $k-1-l$, то есть сумма степеней вершин A_1 и A_k не больше $k-1$ — противорчеие. Значит, вершина A_k соединена с какой-то зеленой вершиной A_i. В этом случае в графе существует цикл $A_1A_2\dots A_iA_kA_{k-1}\dots A_{i+1}A_1$, состоящий из k вершин. Если из него ведет хотя бы одно ребро в другие $n-k$ вершин, в графе существует простой путь длины $k+1$ — противоречие. Если ребер из цикла не выходит, то степени всех вершин цикла не превосходят $k-1$, а степени не входящих в цикл вершин не превосходят $n-k-1$ — опять противоречие.

Тетерь докажем про цикл. Рассмотрим гамильтонов путь (по доказанному он существует). Рассуждение, вполне аналогичное предыдущему с зелеными вершинами, позволяет превратить его в цикл.

Граф без циклов называется *лесом*, если в нем нет циклов. Связный лес называется *деревом*.

Теорема. Связный граф является деревом если и только если количество ребер на 1 меньше количества вершин.

Теорема. В связном графе можно удалить несколько ребер так, чтобы осталось дерево (оно называется *остовным деревом*).

Следствие. В связном графе можно удалить вершину без потери связности. Таких вершин хотя бы 2, если в исходном графе хотя бы две вершины.

Следствие. В связном графе с n вершинами хотя бы $n-1$ ребро.

Доказательство этих утверждений несложно и опускается.

§1. Раскраски графов.

Раскраской вершин графа называется разбиение множества его вершин на несколько непересекающихся подмножеств (называемых цветами). Разбиение множества ребер называется *реберной раскраской*.

Раскраска называется *правильной*, если вершины, окрашенные в один цвет (то есть принадлежащие одному подмножеству разбиения), не соединены ребрами. Аналогично, реберная раскраска называется *правильной*, если ребра одного цвета не имеют общих вершин.

Наименьшее количество цветов, в которые можно правильно покрасить вершины (соответственно, ребра) графа G, называется *хроматическим числом* (соответственно, *хроматическим индексом*) графа G и обозначается $\chi(G)$ (соответственно, $\chi'(G)$).

Граф G называется *двудольным*, если $\chi(G) \leq 2$ (то есть его вершины можно правильно покрасить в два цвета).

Следующая теорема дает простой критерий двудольности графа.

Теорема. Граф двудолен если и только если он не содержит нечетных циклов.

Доказательство. Ясно, что в двудольном графе нет нечетных циклов (в каждом цикле цвета вершин чередуются). Докажем, что если нечетных циклов нет, то вершины можно покрасить в два цвета. С этой целью покрасим произвольную вершину A_0 в цвет 1. Присвоим вершине A_0 ранг 0. Вершины, соединенные с A_0, назовем вершинами ранга 1 и покрасим в цвет 2. Вершины, соединенные с вершинами ранга 1, покрасим в цвет 1 и присвоим им ранг 2. Продолжим в том же духе. Заметим, что вершины одного ранга не соединены (иначе найдется нечетный цикл, образованный соединенными вершинами одного ранга и путями от этих вершин до вершины A_1). Отсюда следует, что построенная раскраска вершин (вершины четного ранга красятся в один цвет, нечетного — в другой) будет правильной.

Обозначим через $p(G, k)$ количество правильных раскрасок графа G в k цветов.

Теорема. Пусть вершины A и B не соединены в графе G. Пусть G_1 и G_2 — графы, полученные из G соответственно добавлением ребра AB и стягиванием вершин A и B. Тогда $p(G, k) = p(G_1, k) + p(G_2, k)$.

Доказательство. Раскраски графа G, в которых A и B имеют разный цвет, находятся в очевидном взаимно-однозначном соответствии с раскрасками G_1; а те раскраски графа G, в которых A и B имеют одинаковый цвет — во взаимно- однозначном соответствии с раскрасками G_2.

Теорема. Если G — граф с n вершинами, то $p(G, k)$ — унитарный многочлен от k степени n с целыми коэффициентами.

Доказательство. Индукция по количеству ребер в дополнительном графе (то есть "непроведенных" ребер). База: если граф G — *полный* (то есть любые две вершины соединены ребром), то $p(G, k) = k(k-1)\dots(k-n+1)$ (первая вершина может быть покрашена в k цветов, вторая — в $k-1$ и так далее). Индукционный переход: рассмотрим неполный граф. Выберем в нем две несоединенные вершины A и B и воспользуемся предыдущей теоремой. Для графов G_1 и G_2 утверждение выполняется, причем в G_2 меньше вершин, чем в G_1.

Следующая теорема дает удивительно точные оценки на хроматический индекс графа.

Теорема. Пусть d — макимальная степень вершин графа G. Тогда $d \le \chi'(G) \le d+1$.

Доказательство. Оценка $d \le \chi'(G)$ очевидна (ребра, выходящие из одной вершины, должны иметь разный цвет). Докажем, что граф можно покрасить в $d+1$ цвет. Индукция по количеству ребер. База (1 ребро) очевидна. Индукционный переход. Рассмотрим граф с наименьшим количеством ребер, для которого утверждение не верно. Удалим в нем произвольно одно ребро. Покрасим оставшийся граф в $d+1$ цвет $1, 2, \dots, d+1$. Будем говорить, что цвет i отсутствует в вершине v, если ни одно из ребер, выходящих из v, не покрашено в цвет i. Ясно, что в каждой вершине отсутствует хотя бы один цвет (степень любой вершины меньше числа цветов).

Пусть $e_1 = xy_1$ — удаленное ребро. Пусть также в вершине x отсутствует цвет s, а в вершине y — цвет t_1. Из вершины x выходит хотя бы одно ребро цвета t_1, иначе можно покрасить e_1 в цвет t_1 (и получить правильную раскраску ребер графа G). Пусть это ребро xy_2, и в вершине y_2 отсутствует цвет t_2. Предположим, что уже построены (различные) ребра $e_i = xy_i$ для $i = 2,\ 3, \dots, l$ такие, что ребро $e_i = xy_i$ покрашено в цвет t_{i-1}, отсутствующий в вершине y_{i-1}.

Если можно продолжить эту последовательность (то есть найдется вершина y_{l+1}, отличная от $y_1,\ y_2, \dots, y_l$, для которой ребро xy_{l+1} окрашено в цвет t_l), продолжим ее. Когда-то этот процесс остановится. Рассмотрим этот момент.

Из вершины x не выходит ребер цвета t_l в вершины, отличные от $y_2, y_3, \dots, y_{l-1}$. Если из вершины x вообще не выходит ребер цвета t_l, перекрасим каждое ребро xy_i в цвет t_i ($i = 1, 2, \dots, l$). Получим правильную покраску ребер графа G.

Значит, из вершины x выходит ребро цвета t_l в какую-то вершину y_j. Снова перекрасим ребра $e_i = xy_i$ в цвета t_i, на этот раз для $i = 1,\ 2, \dots, j-1$. Ребро $e_j = xy_j$ пока оставим непокрашенным.

Посмотрим на ребра цветов s и t_l. Граф, образуемый этими ребрами, назовем G_1. Ясно, что в графе G_1 степени вершин не больше 2, причем каждая компонента связности — либо цикл, либо путь. Заметим, что вершины x, y_l и y_j имеют в G_1 степени не больше 1 (так как в вершине x отсутствует цвет s, а в вершинах y_l и y_j — цвет t_l).

Значит, вершины x, y_j, y_l не могут лежать в одной компоненте графа G_1. Рассмотрим два случая.

1. Вершины x и y_j находятся в разных компонентах. В этом случае в компоненте, содержащей вершину y_j, *переставим* цвета s и t_k. Тогда можно покрасить ребро xy_j в цвет s.

2. Вершины x и y_l находятся в разных компонентах. Перекрасим ребра e_i ($i = j,\ j+1, \dots, l-1$) в соответствующие цвета t_i, а ребро $e_l = xt_l$ оставим непокрашенным. После этого переставим цвета s и t_l в компоненте, содержащей вершину y_l. Наконец, покрасим ребро xy_l в цвет s.

Для двудольного графа оценку можно еще улучшить, явно вычислив хроматический индекс.

Теорема. В двудольном графе хроматический индекс равен максимальной степени.

Доказательство. Действуем по индукции. Покрасим весь граф, кроме ребра xy в цвета $1, 2, \dots, d$. Обозначим цвета, отсутствующие в вершинах x и y, через s и t. Если $s = t$, покрасим xy в цвет s. Если $x \neq y$, рассмотрим граф, образованный ребрам цветов s и t. Ясно, что x и y лежат в разных компонентах (иначе в графе нашелся бы нечетный цикл). Переставим цвета s и t в компоненте, содержащей вершину y, и покрасим ребро xy в цвет s.

§2. Связность графов. Блочная структура.

Пусть A, B — две связанные вершины графа G. Множество $V_1 \subset V(G)$, не содержащее вершин A, B, (соответственно $E_1 \subset E(G)$) вершин (соответственно, ребер) называется *A, B-разрезом* (соответственно *реберным разрезом*), если при удалении V_1 (соответственно E_1) вершины A и B становятся несвязанными. Ясно, что вершинные разрезы существуют только для несоединенных вершин, ребереные — между любыми парами вершин.

Аналогично определяются разрез и реберный разрез графа:

множество $V_1 \subset V(G)$, (соответственно $E_1 \subset E(G)$) вершин (соответственно, ребер) называется *разрезом* (соответственно *реберным разрезом*) графа G, если при удалении V_1 (соответственно E_1) количество компонент связности графа увеличивается. Вершина, являющаяся разрезом, называется точкой сочленения; ребро, являющееся разрезом, называется мостом.

Связный граф G называется *k-связным* (соответственно, *реберно-k-связным*), если любой разрез (соответственно, реберный разрез) содержит не менее k вершин (соответственно, ребер).

Для исследования двусвязных графов нам понадобятся следующие определения.

Назовем две вершины графа *похожими*, если они совпадают или же входят в общий реберно-простой цикл. Два ребра будем называть похожими, если они совпадают или входят в общий простой цикл.

Ключевой момент состоит в том, что введенные нами отношения есть отношения эквивалентности. Это несложно проверить, рассмотрев три цикла и разобрав несколько случаев.

Заметим, что вершина v не является точкой сочленения если и только если любые два ребра, выходящих из нее, похожи.

Отсюда вытекает следующая

Теорема. Следующие утверждения для связного графа G равносильны:

1) граф двусвязен

2) любые две вершины входят в общий простой цикл

3)любая вершина и любое ребро входят в общий простой цикл

4) любые два ребра входят в простой цикл

Доказательство. Ясно, что $(4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$. Осталось доказать $(1) \Rightarrow (4)$. Из предшествующего теореме наблюдения следует, что любые два соседних ребра двусвязного графа похожи. Так как похожесть есть отношение эквивалентности, а граф связен, это означает, что любые два ребра похожи, что и требовалось.

Реберный аналог теоремы:

Теорема. Следующие утверждения равносильны:

1) граф реберно-двусвязен (в нем нет мостов)

2) любые две вершины входят в общий реберно-простой цикл

3) на ребрах графа можно поставить стрелки так, чтобы он стал связным

Доказательство. Ясно, что $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$. Докажем, что $(1) \Rightarrow (3)$. Разрешим кратные ребра. Рассмотрим минимальный цикл (ясно, что он есть) и стянем в точку, сохранив кратность ребер (то есть вершина, соответствующая стянутому циклу, будет связана с вершиной X столько раз, сколько ребер выходило из X в вершины цикла). Несложно видеть, что в новом графе нет мостов. Ориентируем его по индукционному предположению (индукция — по количеству вершин, база оевидна), а затем в исходном графе ориентируем стянутый цикл естественным образом (по циклу). Заметим, что импликация $(1) \Rightarrow (2)$ может быть получена и независимо от (3) аналогично предыдущей теореме.

Максимальный по включению двусвязный подграф связного графа G (то есть двусвязный подграф, не содержащийся ни в каком большем двусвязном подграфе) называется *блоком*.

Любые два блока пересекаются не более чем по одной вершине. Вершина, принадлежащая хотя бы двум блокам, является точкой сочленения (и наоборот, любая точка сочленения принадлежит хотя бы двум блокам). Ребра каждого блока образуют класс попарно похожих (определение см. выше) ребер.

Эти утверждения легко проверить, используя характеристику двусвязных графов.

Построим по графу G новый граф, содержащий информацию о его блочной структуре. Именно, вершинами нового графа $bc(G)$ будут блоки и точки сочленения графа G. Будем соединять в графе $bc(G)$ блок B и точку сочленения v, если $v \in B$.

Несложно видеть, что граф $bc(G)$ является деревом (если бы в нем был цикл, ребра разных блоков были бы похожими). Висячие вершины этого дерева соответствуют блокам, которые называются *крайними* блоками графа G.

Следующая фундаментальная теорема связывает минимальный (a, b)-разрез с количеством непересекающихся путей, соединяющих вершины a и b.

Теорема (К. Менгер, 1927). Пусть вершины a и b связного графа G не соединены. Тогда наименьшее количество вершин (a, b)-разреза равна наибольшему количеству непересекающихся по вершинам путей, соединяющих a и b.

Ясно, что если k вершин разделяют a и b, то существует не более k непересекающихся путей из a в b (каждый путь должен пересекаться с разрезом). Докажем, что если при удалении любых $k-1$ вершины a и b остаются связанными, то между a и b существует не менее k непересекающихся путей. Индукция по k. База $k = 1$ очевидна. Предположим, что оно верно для $k \geq 1$. Рассмотрим граф G, в котором любой (a, b)-разрез состоит не менее чем из $k+1$ вершины. По предположению индукции в G существует k непересекающихся (a, b)-путей $P_1, P_2, \ldots, P_k$. Рассмотрим множество вторых (после a) вершин этих путей. В этом множестве всего k вершин, поэтому оно не разделяет a и b. Значит, существует (a, b)-путь P, первое ребро которого отлично от первых ребер цепей P_i, $(i = 1..k)$. Пусть v — первая, считая от a, вершина P, принадлежащая одному из путей P_i $(i = 1..k)$. Обозначим через P_{k+1} часть пути P от a до v. Цепи P_1, $P_2, \ldots, P_k$, P_{k+1} могут быть выбраны, вообще говоря, различными способами. Выберем их так, чтобы в графе $G - a$ (полученном из G удалением вершины a) расстояние от v до b было минимальным. Если $k = b$, то пути P_i $(i = 1..k+1)$ образуют требуемый набор из k непересекающихся цепей. Предположим, что $v \neq b$. Тогда в графе $G - v$ любой (a, b)-разрез состоит не менее, чем из k вершин (иначе, добавляя к этому разрезу вершину v, получим (a, b)-разрез из не более чем k вершин в графе G). Применяя к этому графу индукционное предположение, находим в нем k непересекающихся (a, b)-путей Q_1, $Q_2, \ldots, Q_k$. Эти цепи могут быть выбраны, вообще говоря, разными способами. Выберем их так, чтобы количество ребер, входящих в эти пути, но не входящих в пути $P_i (i = 1..k+1)$, было минимальным. Иными словами, пути Q_i должны состоять "в основном" из ребер путей P_i. Рассмотрим граф H, состоящей из вершин и ребер путей Q_1, $Q_2, \ldots, Q_k$ и вершины v (вершина v будет в графе H изолированной). Пусть P_r — один из путей P_i $(i = 1..k+1)$, у которой первое (содержащее a) ребро отлично от ребер путей Q_i (ясно, что такой путь найдется, так как путей P_i $(i = 1..k+1)$ больше, чем путей Q_i $(i = 1..k)$). Пусть, далее, x — первая, считая от a, вершина графа H, входящая в путь P_r. Если $x = b$, то, добавляя к путям Q_i $(i = 1..k)$ путь P_r получим $k+1$ требуемых непересекающихся (a, b)-путей.

Если вершина x принадлежит однму из путей Q_i $(i = 1..k)$, скажем, $x \in Q_1$, заменим в пути Q_1 часть от a до x на часть пути P_r от a до x. Заметим, что при этом количество ребер путей Q_i, не входящих в пути P_i, уменьшится (иначе бы часть пути Q_1 от a до x целиком принадлежала бы путям P_i, что невозможно). Это противоречит выбору путей Q_i.

Осталось рассмотреть последний случай: $x = v$. Рассмотрим самый короткий путь от x до b в графе $G - a$. Рассмотрим первую (считая от x) вершину y этого пути, принадлежащую одному из путей Q_i. Обозначим упомянутый путь от x до y через Q_{k+1}. Пути Q_1, $Q_2, \ldots, Q_k$, Q_{k+1} обладают тем свойством, что расстояние от y до b в графе $G - a$ меньше, чем от x до b, а это противоречит выбору цепей P_1, $P_2, \ldots, P_k$, P_{k+1}.

Та же теорема верна и для ориентированных графов:

Теорема. Пусть вершины a и b орграфа G таковы, что не существует ребра из a в b. Тогда наименьшее количество вершин (a, b)-разреза равно наибольшему количеству непересекающихся по вершинам путей, идущих из a в b.

Доказательство полностью аналогично.

Существует и реберная версия теоремы Менгера:

Теорема. В графе (или орграфе) выбраны различные вершины a и b. Тогда наименьшее количество ребер реберного (a, b)-разреза равна наибольшему количеству реберно-непересекающихся путей, идущих из a в b.

С помощью несложной остроумной конструкции реберная версия сводится к вершинной.

Очевидно, что минимальный разрез не меньше максимального количества непересекающихся по ребрам путей.

Для **доказательства** обратного неравенства построим новый граф. Именно, на каждом ребре поставим две точки вблизи концов. Точки вблизи каждой из старых вершин соединим попарно, а также будем интерпретировать каждое старое ребро как ребро между новыми вершинами, отмеченными на нем (с учетом, если нужно, ориентации).

Предположим, что в исходном графе любой реберный (a, b)-разрез состоял не менее, чем из k ребер. Тогда любой вершинный разрез между какими-то двумя вершинами a' и b', нарисованными в окрестности a и b соответственно (для применения вершинной версии теоремы Менгера эти новые вершины нужно выбрать несоединенными. Если так сделать не получается, то степени вершин a и b в старом графе были равны 1, и доказывать нечего), состоит не менее чем из k вершин (вершинному разрезу в новом графе естественным образом соответствует реберный разрез в старом). Применяя вершинную теорему, находим в новом графе k вершинно-непересекающихся путей между новыми вершинами a' и b', которым соответствуют k реберно-непересекающихся путей в старом графе.

Из теоремы Менгера непосредственно вытекает следующий критерий k-связности:

Теорема. Граф k-связен (соответственно, реберно-k-связен) если и только если любые две вершны соединены хотя бы k вершинно-непересекающимися (соответственно, реберно-непересекающимися) путями.

§3. Связность ориентированных графов по Д. В. Карпову.

Рассмотрим ориентированный граф G. Граф может иметь противоположно направленные ребра, петли и кратные ребра также допустимы, поскольку в рассматриваемых задачах о связности их наличие не влияет на структуру графа. Множество вершин этого графа будем обозначать через $V(G)$.

Построим для нашего ориентированного графа G *граф компонент сильной связности* $C(G)$, вершины которого соответствуют компонентам сильной связности ориентированного графа G. Проведем в графе $C(G)$ ребро $V_i \to V_j$ тогда и только тогда, когда в графе G есть ребро, направленное от V_i к V_j.

Несложно проверить следующие утверждения.

1) В графе $C(G)$ нет циклов.

2) Для любой компоненты сильной связности V_i граф $G(V_i)$ на вершинах множества V_i с ребрами графа G между этими вершинами сильно связен.

Доказательство. 1) Предположим противное, пусть в $C(G)$ есть цикл $V_1 \to V_2 \to \ldots \to V_k \to V_1$. Тогда в графе G все вершины из $\bigcup_{i=1}^{k} V_i$ попарно связаны и, следовательно, входят в одну компоненту сильной связности. Противоречие.

2) Предположим противное, пусть граф $G(V_i)$ не является сильно связным. Рассмотрим в нем две несвязанные вершины w_1 и w_2, пусть в графе $G(V_i)$ не существует пути из w_1 в w_2. Так как эти вершины связаны в графе G, то в нем существует путь S из w_1 в w_2. Из построения графа $G(V_i)$ следует, что не все вершины пути S лежат в V_i. Рассмотрим вершину $u \notin V_i$ пути S. Понятно, что вершина u связана в графе G со всеми вершинами из V_i, противоречие.

Пусть V_i — компонента сильной связности ориентированного графа G. Назовем эту компоненту *промежуточной*, если в графе $C(G)$ существует ребро, входящее в V_i, и существует ребро, выходящее из V_i. В противном случае назовем компоненту V_i *крайней.*

Так как в $C(G)$ нет циклов, то любой путь в этом графе начинается в вершине, из которой все ребра выходят, и заканчивается в вершине, в которую все ребра входят. Такие вершины сооответствуют крайним компонентам сильной связности. Таким образом, любая промежуточная компонента сильной связности ориентированного графа G лежит в $C(G)$ на пути между какими-то двумя крайними компонентами.

Итак, мы описали структуру компонент сильной связности ориентированного графа. Само по себе это описание вряд ли является интересным и содержательным, однако знание структуры компонент сильной связности облегчает работу с ориентированными графами.

Полные ориетированные графы.

Разберем случай полного ориентированного графа (т. е. графа, в котором любые две вершины соединены ровно одним ориентированным ребром). Такие графы также называют турнирными, так как с их помощью удобно изображать однокруговые турниры без ничьих.

Теорема. В полном сильно связном ориентированном графе существует *гамильтонов путь* (то есть путь, проходящий по каждой вершине ровно один раз).

В полном сильно связном ориентированном графе существует *гамильтонов цикл* (т. е. цикл, проходящий по каждой вершине ровно один раз).

Доказательство. 1) Рассмотрим самый длинный путь. Если в него не вошла хотя бы одна вершина, посмотрим, в какую сторону направлены ребра от этой вершины до вершин пути и убедимся, что во всех случаях путь можно удлинить.

2) Рассмотрим в нашем сильно связном ориентированном графе максимальный несамопересекающийся ориентированный цикл $a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_k \to a_1$. Предположим, что в него вошли не все вершины графа, пусть вершина b не вошла в этот цикл. Пусть не все ребра от b к нашему циклу ориентированы одинаково, тогда существуют последовательные вершины цикла a_i и a_{i+1} такие, что ребра ориентированы следующим образом: $a_i \to b$ и $b \to a_{i+1}$. Тогда несложно удлинить наш максимальный цикл, противоречие.

Пусть из всех вершин цикла входят ребра в b. По сильной связности графа существует путь S от b до цикла, пусть этот путь впервые пересекает наш цикл в вершине a_i. Тогда, опять же, несложно удлинить наш максимальный цикл, заменив ребро $a_{i-1} \to a_i$ на ребро $a_i \to b$ и путь S. Противоречие. Случай, когда из b выходят ребра ко всем вершинам цикла, аналогичен.

Структура компонент сильной связности полного ориентированного графа

Теорема. Структура компонент сильной связности полного ориентированного графа представляет собой цепь $V_1V_2\ldots V_m$, в которой для любых двух различных компонент V_i и V_j, где $i < j$, все ребра графа ориентированы от V_i к V_j.

Доказательство. Граф компонет сильной связности полного ориентированного графа есть полный граф без циклов. Все такие графы имеют следующие структуру: вершины можно пронумеровать числами от 1 до n (n — количество вершин) так, что ребра направлены от меньшего номера к большему. Для доказательства рассмотрим в графе гамильтонов путь (по доказанному он существует) и заметим, что отсутствие циклов однозначно задает направления всех не вошедших в путь ребер.

§4. Планарные графы.

Граф называется *плоским*, если он изображен на плоскости так, что вершинам соответствуют различные точки плоскости, а ребрам — непересекающиеся ломаные между этими вершинами. Граф, изоморфный плоскому (то есть тот, который можно так изобразить), называется *планарным*.

Для плоского графа можно определить *грань* как одну из областей, на которые ребра графа делят плоскость (в том числе, "внешнюю" область).

Теорема (формула Эйлера). Пусть В — число вершин, Р — ребер, Г — граней связного плоского графа. тогда В-Р+Г=2.

Доказательство. Индукция по количеству ребер. Если граф является деревом, то Г=1, Р=В-1 и утверждение выполнено. при стирании ребра какого-то цикла величины Р и Г уменьшаются на 1, поэтому выражение В-Р+Г не меняется. Так как из любого связного графа можно стиранием ребер получить дерево, утверждение врно для любого связного плоского графа.

Теорема. В любом плоском (а стало быть, и планарном) графе найдется вершина степени не больше, чем 5.

Доказательство. Заметим, что в каждой грани не менее 3 ребер, при этом каждое ребро входит в три грани. Значит, $P \geq 3\Gamma/2$. Отсюда $\Gamma \leq 2P/3$. Подставляя это неравенство в формулу $2 = B - P + \Gamma$ получаем, что $2 \leq B - P + 2P/3 = B - P/3$, откуда $3B > P$, $6B > 2P$. Но $2P$ — это сумма степеней всех вершин, поэтому степень одной из вершин меньше 6.

Теорема. Графы K_5 (полный граф с 5 вершинами) и $K_{3,3}$ (полный двудольный граф с долями по три вершины) непланарны.

Доказательство. Как отмечалось в доказательстве предыдущей теоремы, в планарном графе $2 \leq B - P/3$. Для K_5 это неравенство неверно, что заканчивает доказательство. В графе $K_{3,3}$ нет треугольников, поэтому если бы он был плоским, в любой грани было бы не менее 4 ребер. Значит, выполнялось бы неравенство $P \geq 4\Gamma/2$, то есть $\Gamma \leq P/2$. Подставляя эту оценку в формулу $2 = B - P + \Gamma$ видим, что $2 = B - P + \Gamma \leq B - P + P/2 = B - P/2$, что неверно для $K_{3,3}$.

Если G — плоский граф, можно определить *двойственный граф* G', вершины которого соответствуют граням графа G. Именно, поместим в каждую грань графа G по точке и соединим ребром точки, находящиеся в соседних (по ребру) гранях. Если в графе G не было вершин степени

1 и 2, то в G' количество вершин равно количеству граней G; количество граней — количеству вершин G; количества ребер графов G и G' совпадают.

§5. Паросочетания. Двудольные графы.

Паросочетанием в графе G называется набор ребер, не имеющих общих вершин. Паросочетнаие называется *совершенным*, если оно покрывает все вершины графа.

Здесь мы изучаем паросочетания в двудольных графов. Следуя традиции, будем вершины одной из долей называть мальчиками, другой доли — девочками, а ребра — знакомствами. Обозначим количество мальчиков в исследуемом графе через m, а количество девочек — через d.

Базовый результат, из которого вытекает все дальнейшее — известная

Теорема Холла (лемма о девушках). Если для любого $k = 1, 2, \ldots, m$ любые k мальчиков знакомы в совокупности хотя бы с k девочками, то можно одновременно поженить каждого мальчика на знакомой девочке. (иными словами, существует паросочетание, покрывающее всех мальчиков).

Доказательство. Индукция по m. База $m = 1$ очевидна. Предположим, что утверждение верно, если количество мальчиков равно $1, 2, \ldots, m-1$ и докажем его для m мальчиков. Возможны два случая.

1. Любые k мальчиков ($k = 1, 2, \ldots, m-1$) знают знают строго больше, чем k девочек. В этом случае поженим произвольно одного мальчика на знакомой девочке. Заметим, что для оставшихся $m-1$ мальчика и $d-1$ девочки выполняется условие леммы. Значит, оставшихся мальчиков можно поженить на оставшихся девочках по индукционному предположению.

2. Найдется k мальчиков, которые знают ровно k девочек ($1 \leq k \leq m-1$). Пользуясь индукционным предположением, поженим этих мальчиков на знакомых девочках. Заметим, что для оставшихся мальчиков и оставшихся девочек выполняется условие леммы (в самом деле, если какие-то l оставшихся мальчиков знают меньше, чем l оставшихся девочек, то с самого начала $l+k$ мальчиков знали меньше, чем $l+k$ девочек). Значит, можно завершить этот матриномиальный процесс.

Из леммы Холла легко вытекает ее полезное обобщение:

Теорема (обобщенная лемма Холла). Пусть $0 \leq s \leq m$ — целое неотрицательное число. Если любые k ($k = s, s+1, \ldots, m$) мальчиков знают не меньше, чем $k-s$ девочек, то можно одновременно поженить хотя бы $m-s$ мальчиков.

Доказательство. Позовем s *специальных* девочек, познакомим их со всеми мальчиками. Тогда для нового графа будет выполняться условие обычной леммы Холла. Поженим мальчиков, пользуясь этой леммой. Хотя бы $m-s$ мальчиков будут женаты не на специальных девочках, что и требовалось.

Другой формой обобщенной леммы Холла является следующая

Теорема Кенига. Наибольшее количество ребер в паросочетании двудольного графа G равно наименьшему количеству вершин в вершинном покрытии графа G (напомним, что вершинное покрытие — это такое множество вершин, что каждое ребро содержит хотя бы одну из них).

Доказательство. Обозначим наибольшее количество ербер в паросочетании через A, а наименьшее количество вершин в вершинном покрытии — через B. Ясно, что $A \leq B$ (каждое ребро паросочетания должно содержать одну из вершин вершинного покрытия). Докажем, что $A \geq B$, то есть в графе существует паросочетание из B ребер. Для этого достаточно показать, что выполняется условие обобщенной леммы Холла с $s = m - B$. Предположим противное: некоторые k мальчиков (назовем их блондинами, а остальных мальчиков — брюнетами) знают не больше, чем $k - s - 1 = k - m + B - 1$ девочек (назовем их шатенками, а остальных девочек — рыжими). Посмотрим на брюнетов и шатенок. Это всего $(m-k) + (k - m + B - 1) = B - 1$ человек. Так как блондины не знают рыжих девочек, эти $B-1$ человек образуют вершинное покрытие графа G — противоречие с минимальностью B.

Иногда теорему Кенига формулируют в следующей форме:

Теорема. В некоторых ячейках прямоугольной таблицы расставлены звездочки. Тогда наибольшее количество звездочек, не стоящих попарно в одной строке или одном столбце, равно наименьшему количеству линий (линии — это строки или столбцы), содеражщих все звездочки.

Для доказательства достаточно применить теорему Кенига к графу строк и столбцов, в котором строка и столбец соединены ребром, когда на их пересечении поставлена звездочка.

Сейчас мы покажем, как с помощью теоремы Кенига доказывается важная теорема Дилуорса.

Введем некоторые определения.

Пусть M — некоторое множество, на котором введено отношение $\leq$ (то есть для некоторых пар элементов $a, b \in M$ говорят, что $a \leq b$). Предположим, что это отношение удовлетворяет двум следующим трем свойствам:

1°. (рефлексивность) $a \leq a$

2°. (транзитивность) если $a \leq b$ и $b \leq c$, то $a \leq c$.

3°. (антисимметричность) если $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$.

Такое отношение называется *частичным порядком*, а множество M, на котором оно задано — *частично упорядоченным*.

Примеры. 1. $M = \mathbb{R}$, порядок обычный.

2. M — множество фигур плоскости с таким порядком: $F_1 \leq F_2$, если фигура F_1 лежит в F_2.

3. M — множество вершин некоторого ориентированного графа без циклов. $v_1 \leq v_2$, если существует путь из вершины v_2 в вершину v_1.

Если $a \leq b$ или $b \leq a$, элементы a и b называются *сравнимыми*, в противном случае a и b называются *несравнимыми*.

Подмножество $M_1 \subset M$ множества M называется *цепью*, если любые два его элемента сравнимы. Заметим, что элементы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ конечной цепи можно пронумеровать так, что $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k$. Это вытекает из уже обсуждавшейся структуры полных ориентированных графов без циклов.

Если множество M само является цепью, оно называется *линейно упорядоченным*.

Подмножество $M_1 \subset M$ называется *антицепью*, если никакие два его различных элемента не сравнимы. Например, множество фигур площади 1 образует антицепь в примере 2.

Одним из основных фактов теории частично-упорядоченных множеств является следующая

Теорема (Дилуорса). Пусть M — конечное частично упорядоченное множество. Тогда минимальное количество цепей, покрывающих все элементы M (минимальное цепное покрытие) равно максимальному количеству элементов в антицепи.

Доказательство. Обозначим через A минимальное количество цепей, покрывающих M, а через B — максимально количество элементов антицепи. Ясно, что $A \geq B$ (любая антицепь содержит не более одного элемента из кажлой цепи, входящей в цепное покрытие). Надо доказать, что $A \leq B$. Построим следующий двудольный граф. Вершинам одной доли будут соответствовать элементы множества M, а другой — назовем ее M' — их копии (копию элемента a будем обозначать a'). Условимся о естественных обозначениях: будем говорить, что $a < b$, если $a \leq b$ и $a \neq b$. Будем соединять элементы $a \in M$ и $b' \in M'$ ребром, если $a < b$. Рассмотрим в полученном двудольном графе максимально паросочетание. Пусть оно состоит из k ребер; количество элементов множества M обозначим через n. Этим k ребрам соответствует k неравенств вида $a_i < b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ в множестве M. При этом все a_i различны, и все b_i различны, однако может оказаться, что $a_i = b_j$. Рассмотрим цепное покрытие множества M, в котором все цепи состоят из одного элемента (и того, их n штук). Будем уменьшать это покрытие, объединяя цепи, следующим образом: на i-ом шаге, пользуясь неравенством $a_i < b_i$, объединяем цепи, содержащие a_i и b_i. Так как все a_i различны и все b_i различны, это возможно (до i-го шага элемент a_i был самым большим в своей цепи, а b_i — самым маленьким). Таким образом, после k шагов получится $n - k$ цепей. Если $n - k \leq B$, то все доказано. Предположим противное: $n - k \geq B + 1$. Вспомним, что k — это размер наибольшего паросочетания в нашем графе. Согласно теореме Кенига, в этом графе найдется вершинное покрытие из k вершин. Некоторые вершины этого покрытия, скажем, $a_1, a_2, \ldots, a_j$, будут лежать в доле M, а остальные, скажем, $b'_1, b'_2, \ldots, b'_{k-j}$ — в доле M'. Выкинем из множества M все элементы $a_1, a_2, \ldots, a_j$, а также $b_1, b_2, \ldots, b_{k-j}$. Останется хотя бы $n-k$ элементов (некоторые из k выкинутых элементов могут совпадать), назовем их интересными. Заметим, что если для интересных элементов a, b выполнено неравенство $a > b$, то в графе G есть ребро (a, b'), не пересекающееся с нашим вершинным покрытием — противоречие. Значит, выкинутые элементы образуют антицепь, в которой хотя бы $n - k \geq B + 1$ элемент — противоречие с выбором B.

§6. Паросочетания. Общий случай.

Множество $A \subset V(G)$, состоящее из s вершин графа G $(s = 0, 1, 2, \ldots)$ называется *запрещающим*, если в графе $G - A$ найдется хотя бы $s + 1$ нечтеная компонента связности (то есть компонента связности с нечетным числом вершин).

Теорема (Татта). В графе G существует совершенное паросочетание если и только если в нем отсутствуют запрещающие множества.

Доказательство. Предположим, что в графе есть запрщающее множество A из s вершин. Обозначим $C_1, C_2, \ldots, C_{s+1}$ нечтеные компоненты графа $G - A$ (возможно, есть и еще нечетные компоненты). Ясно, что в любом паросочетании F графа G вершины компоненты C_i не разбиваются на пары, поэтому либо одна из них не покрыта паросочетанием F, либо одно из ребер F ведет из C_i в A. Поскольку в A всего s вершин, паросочетание F содержит не более s ребер, ведущих в A, стало быть для некоторого $i = 1, 2, \ldots, s+1$ имеет место первый случай: одна из вершин компоненты C_i не покрыта ребрами F. Значит, паросочетание F не является совершенным. Таким образом, в графе с совершенным паросочетанием не может быть запрещающего множества.

Докажем обратное утверждение: в графе без запрещающих множеств есть совершенное паросочетание.

Предположим противное. Рассмотрим граф G_0 без наибольшего паросочетания и без запрещенных множеств. Ясно, что количество вершин графа G_0 четно (иначе запрещенным является множество из 0 вершин).

Предположим, что к графу G_0 можно добавить ребро e (соединив две еще не соединенные вершины) так, чтобы в графе G_0+e по-прежнему не было совершенных паросочетаний. Докажем, что и запрещенных множеств в графе G_0+e также нет. Предположим противное: в графе G_0+e есть запрещенное множество A из s вершин и $C_1, C_2, \ldots, C_{s+1}$ — нечетные компоненты графа $G_0 + e - A$. Граф $G_0 - A$ либо совпадает с графом $G_0 + e - A$ (если хотя бы один из концов ребра e лежит в A), либо получается из $G_0 + e - A$ удалением ребра e (в противном случае). В первом случае множество A очевидно является запрещающим и в графе G_0 — противоречие. Во втором случае множество A также является запрещающим в графе G_0, так как при удалении ребра количество нечетных компонент не уменьшается (если ребро удалялось из нечтной компоненты и было в ней мостом, одна из двух новых компонент все равно будет нечетной). Опять противорчеие.

Итак, граф G_0+e также не имеет ни совершенного паросочетания, ни запрещающих множеств. Будем добавлять к имеющемуся графу ребра, пока это возможно (то есть не появляется совершенное паросочетание). Если ни одного ребра добавить нельзя, то граф G обладает следующим свойством *насыщенности*: в графе G нет совершенного паросочетания, но оно появляется при добавлении любого ребра.

Структура насыщенных графов описывается полностью.

Рассмотрим насыщенный граф G. Обозначим через V_1 множество вершин графа G полной степени (то есть соединенных со всеми).

Докажем следующее утверждение: *в графе $G - V_1$ любая компонента связности является полным графом.*

Достаточно показать, что если в графе $G - V_1$ проведены ребра $v_1 - v_2$ и $v_1 - v_3$, то в нем проведено и ребро $v_2 - v_3$ (то есть отношение быть соединенными ребром транзитивно). Предположим противное: v_2 и v_3 не соединены. Так как $v_1 \notin V_1$, вершина v_1 не соединена с некоторой вершиной $v_4 \in V(G)$.

Пользуясь свойством насыщенности, находим совершенные паросочетания F_1 и F_2 в графах $G+e_1$ и $G+e_2$, где $e_1 = v_2 - v_3$, $e_2 = v_1 - v_4$. Рассмотрим ребра паросочетаний F_1 и F_2. Они образуют несколько чередующихся циклов и несколько ребер, принадлежащих обоим паросочетаниям. Рассмотрим циклы C_1 и C_2, содержащие ребра e_1 и e_2 соответственно. Возможны два случая.

1) Если $C_1 \neq C_2$, изменим паросочетание F_1, заменив в цикле C_1 ребра паросочетания F_1 ребрами паросочетания F_2. Получим совершенное паросочетание графа G — противоречие.

2) Если $C_1 = C_2$, пойдем по пути $C_1 - e_2$ от вершины v_1 к вершине v_4, пока не встретим вершину v_2 или v_3. Не умаляя общности, это вершина v_2. Изменим F_1 следующим образом: заменим ребра F_1 ребрами F_2 на пути от v_3 до v_4 и добавим ребро $v_1 - v_3$ (а ребро e_1 удалим). Получится совершенное паросочетание графа G — противоречие. Утверждение доказано.

Теперь совсем несложно закончить доказательство теоремы Татта.

Так как множество V_1 не является запрещающим в графе G, нечетных компонент в $G - V_1$ не больше, чем количество s вершин множества V_1. А в этом случае несложно построить совершенное паросочетание в графе G — противоречие.

Как и лемма о девушках, теорема Татта может быть перенесена на случай несовершенных паросочетаний.

Назовем *дефектом* графа G минимальное из таких неотрицательных чисел k_0, что при удалении любых s вершин графа G образуется не более, чем $s + k_0$ нечетных компонент.

Заметим, что четность дефекта равна четности количества вершин графа.

Верна следующая

Формула Бержа. Дефект графа равен количеству вершин, непокрытых наибольшим паросочетанием.

Доказательство. Пусть $d(G)$ — дефект графа G. Аналогично доказательству простой части теоремы Татта убеждаемся, что в любом паросочетании остаются непокрытыми хотя бы $d(G)$ вершин.

С другой стороны, если добавить к графу G новые вершины в количестве $d(G)$ и соединить их ребрами со всеми остальными и друг с другом, то в новом графе не будет запрещающих множеств (действительно, если при удалении нескольких вершин остается хотя бы одна новая, то остается связный граф; если же удаляются все новые вершины и s старых, то остается не более $s + d(G)$ нечетных компонент по определению дефекта) Значит, в новом графе есть совершенное паросочетание. При этом все его ребра, кроме не более чем $d(G)$, принадлежат и графу G. Стало быть в G есть паросочетание, не покрывающее не более $d(G)$ вершин.