Микелова тачка и Симсонова права

верзија 2.3: 27.3.2017.

Душан Ђукић

Да бисмо избегли разматрање случајева на основу распореда тачака, радићемо са оријентисаним угловима по модулу 180°.

Т.1 (О Микеловој тачки). Нека су D, E и F произвољне тачке на правим BC, CA, AB у равни троугла ABC. Тада кругови AEF, BFD и CDE имају заједничку тачку P.

Доказ. Нека се кругови AEF и BDF поново секу у тачки P (ако се ови кругови додирују, узимамо $P \equiv F$). Тада је $\sphericalangle DPE = \sphericalangle DPF + \sphericalangle FPE = \sphericalangle DBF + \sphericalangle FAE = \sphericalangle CBA + \sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = \sphericalangle DCE$, што значи да тачка P лежи на кругу CDE. □

Дефиниција. Тачка P се зове *Микелова тачка* за тачке D, E, F у односу на троугао ABC; троугао DEF је *Микелов троугао* за тачку P.

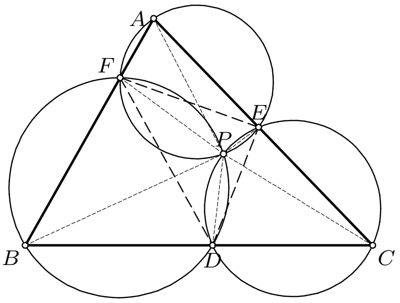
Ако су тачке D, E, F на правим BC, CA, AB редом колинеарне, онда се њихова Микелова тачка налази на описаном кругу троугла ABC. Овако добијамо још једно важно тврђење о Микеловој тачки:

Т.2. Нека четири праве у општем положају одређују четири троугла. Описани кругови ова четири троугла имају заједничку тачку.

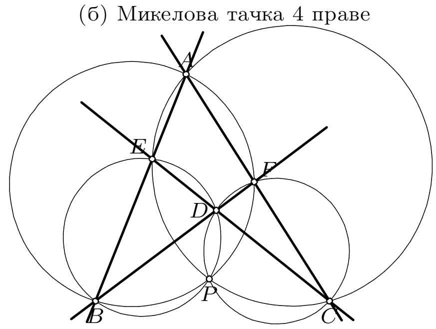
Доказ. Ако посматрамо један од ових троуглова, та четири круга су у ствари Микелови кругови за три колинеарне тачке и описани круг троугла.

То значи да се свака три од ова четири круга секу у једној тачки, а одатле следи тврђење. □

(а) Микелова тачка у троуглу



(б) Микелова тачка 4 праве



Троугао ABC и тачка P не одређују једнозначно Микелов троугао, али одређују његове углове. Заиста, $\sphericalangle DFE = \sphericalangle DFP + \sphericalangle PFE = \sphericalangle DBP + \sphericalangle PAE$, тј.

$$\begin{array}{rl} & \sphericalangle DFE = \sphericalangle APB - \sphericalangle ACB, \\ \text{и аналогно} & \sphericalangle EDF = \sphericalangle BPC - \sphericalangle BAC, \\ & \sphericalangle FED = \sphericalangle CPA - \sphericalangle CBA. \end{array} \qquad (1)$$

Одавде следи:

Т.3. Ако су D, D' тачке на правој BC, E, E' на CA и F, F' на AB, троуглови DEF и $D'E'F'$ су директно слични ако и само ако имају заједничку Микелову тачку.

У том случају, ротациона хомотетија са центром у P слика један у други. □

Дефиниција. *Педални троугао* тачке P у односу на троугао ABC је троугао $P_aP_bP_c$, где су P_a, P_b, P_c редом подножја нормала из P на праве BC, CA, AB.

Пошто је P_bP_c тетива круга над пречником AP са периферијским углом α, важи

$$P_bP_c = AP \sin\alpha.$$

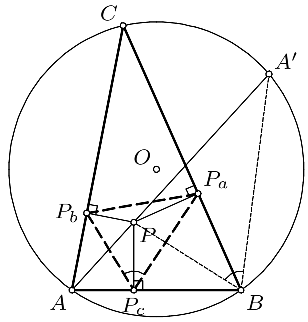
Према томе, $P_bP_c : P_cP_a : P_aP_b = a\cdot AP : b\cdot BP : c\cdot CP$. Одавде такође следи да, за дате $x,y,z>0$, у равни постоји тачка P таква да је $PA:PB:PC = x:y:z$ ако и само ако су ax, by и cz странице троугла.

Т.4. Површина педалног троугла $P_aP_bP_c$ једнака је $\frac{1}{4}(1-\frac{OP^2}{R^2})[ABC]$, где су O и R центар и полупречник описаног круга троугла ABC, а $[ABC]$ његова површина.

Доказ. Нека AP сече описани круг у A'. Тада је $\sphericalangle A'BP = \sphericalangle P_aP_cP_b$, одакле је $[P_aP_bP_c] = \frac{1}{2}P_cP_a\cdot P_cP_b \sin\sphericalangle A'BP = \frac{1}{2}PA\cdot PB\sin\alpha\sin\beta\sin\sphericalangle A'BP$. Синусна теорема у $\triangle A'BP$ даје $\frac{\sin\sphericalangle A'BP}{\sin\gamma} = \frac{PA'}{PB}$, па тако добијамо

$$[P_aP_bP_c] = \frac{1}{2}PA\cdot PA'\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Производ $PA\cdot PA'$ је, као потенција тачке P у односу на круг ABC, једнак R^2-OP^2, што заједно са $[ABC] = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ даје тражени резултат. □



Последица. Полупречник описаног круга троугла $P_aP_bP_c$ је $\frac{AP\cdot BP\cdot CP}{2(R^2-OP^2)}$. □

Из релација (1) следи да тачке P_a, P_b, P_c леже на правој ако и само ако тачка P лежи на описаном кругу $\triangle ABC$.

Дефиниција. За тачку P на кругу ABC, права $P_aP_bP_c$ је *Симсонова права* тачке P у односу на $\triangle ABC$.

На пример, Симсонова права темена A је висина кроз A, а Симсонова права тачке дијаметрално супротне тачки A је права BC.

Т.5. (а) Симсонова права тачке P у троуглу ABC је паралелна правој AA_p, где је A_p друга пресечна тачка нормале из P на BC са описаним кругом.

(б) Угао између Симсонових правих тачака P и Q једнак је периферијском углу над тетивом PQ.

Доказ. (а) $\sphericalangle A_pAB = \sphericalangle A_pBA + \sphericalangle AA_pB = \sphericalangle A_pPA + \sphericalangle ACB = \sphericalangle P_aPP_b + \sphericalangle P_bPA + \sphericalangle ACB = \sphericalangle P_bPA = \sphericalangle P_bP_cA$, тј. $P_bP_c \parallel A_pA$

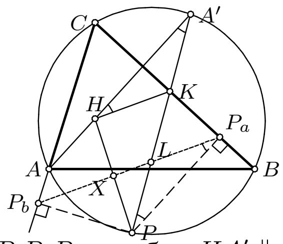
(б) Ако са ℓ_p и ℓ_q означимо Симсонове праве тачака P и Q редом, а са A_q други пресек нормале из Q на BC са кругом ABC, на основу (а) је $\sphericalangle(\ell_p,\ell_q) = \sphericalangle(AA_p, AA_q) = \sphericalangle A_pAA_q = \sphericalangle PAQ$ јер су лукови PQ и A_pA_q исте дужине. □

Тачка P је на описаном кругу око $\triangle ABC$ ако и само ако је њена изогонално спрегнута тачка бесконачна, тј. изогонални конјугати правих AP, BP, CP су паралелни. Лако се проверава да је тада Симсонова права тачке P нормална на изогоналне конјугате AP, BP, CP.

Следи још једно важно својство Симсонове праве.

Т.6. Нека је H ортоцентар троугла ABC и P тачка на његовом описаном кругу. Тада Симсонова права тачке P полови дуж PH.

Доказ. Означимо са A' другу пресечну тачку праве AH са описаним кругом. Нека права PA' сече праву BC и Симсонову праву P_aP_b редом у K и L. Довољно је да покажемо да је Симсонова права паралелна са HK и да полови дуж PK.



Пошто су тачке P, P_a, P_b и C на кругу, важи $\sphericalangle P_bP_aP = \sphericalangle P_bCP = \sphericalangle AA'P = \sphericalangle P_aPA'$, па је троугао LPP_a једнакокраки са $PL = P_aL$. То значи да је L средиште хипотенузе PK правоуглог троугла PP_aK. Најзад, како је $HK = KA'$, имамо $\sphericalangle KHA' = \sphericalangle AA'P = \sphericalangle P_bP_aP$, па због $HA' \parallel P_aP$ следи $P_aP_b \parallel HK$. $\square$

Средиште дужи PH лежи на слици описаног круга при хомотетији са центром H и коефицијентом $\frac{1}{2}$, а то је Ојлеров круг троугла ABC.

Последица. Симсонове праве двеју дијаметрално супротних тачака P и Q секу се под правим углом на Ојлеровом кругу. $\square$

Посматрајмо четири праве у општем положају. По Т.2, описани кругови троуглова одређених овим правим имају заједничку тачку. Подножја нормала из те тачке на дате четири праве припадају заједничкој Симсоновој правој ових правих.

Т.7. Ортоцентри троуглова одређених са четири праве у општем положају леже на једној правој (*Оберова права*). Та права је паралелна њиховој заједничкој Симсоновој правој.

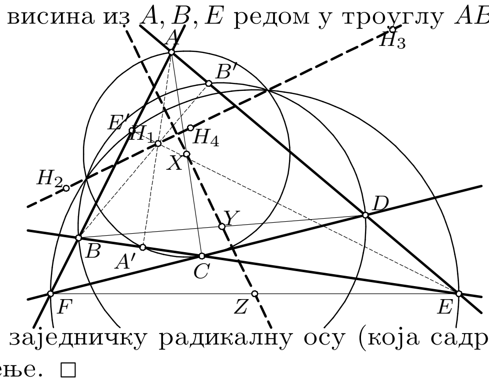
Доказ. Означимо са H_1, H_2, H_3, H_4 ортоцентре добијених троуглова. Нека је P Микелова тачка датих правих, а ℓ њихова заједничка Симсонова права. На основу Т.6, права ℓ полови дужи PH_i ($i = 1, 2, 3, 4$), па су тачке H_i колинеарне. Очито је права кроз тачке H_i паралелна са ℓ. $\square$

Конфигурацију четири праве ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 и ℓ_4 у општем положају често зовемо *комплетним четвороуглом.* Нека је $\ell_1 \cap \ell_2 = \{A\}$, $\ell_2 \cap \ell_3 = \{B\}$, $\ell_3 \cap \ell_4 = \{C\}$, $\ell_4 \cap \ell_1 = \{D\}$, $\ell_1 \cap \ell_3 = \{E\}$ и $\ell_2 \cap \ell_4 = \{F\}$. Под *дијагоналама* овог комплетног четвороугла подразумевамо дужи AC, BD и EF.

Познато је да средишта дијагонала потпуног четвороугла припадају једној правој. Следеће тврђење повезује ову праву са Оберовом и истовремено даје други доказ постојања обе праве.

Т.8. (Теорема Гаус-Боденмилера) Кругови над дијагоналама датог комплетног четвороугла као пречницима имају заједничку радикалну осу.

Доказ. Нека је H_1 ортоцентар и A', B', E' подножја висина из A, B, E редом у троуглу ABE. Тачке A, B, A', B' су на кругу, тачке A, E, A', E' такође, па је $H_1A \cdot H_1A' = H_1B \cdot H_1B' = H_1E \cdot H_1E'$. Круг k_{AC} над пречником AC пролази кроз A', па је $\mathcal{P}_{H_1,k_{AC}} = H_1A \cdot H_1A'$. Слично добијамо да H_1 има исту потенцију у односу на k_{BD} и k_{EF}.



Аналогно, сваки од ортоцентара троуглова BCF, CDE и DAF има једнаку потенцију у односу на k_{AC}, k_{BD} и k_{EF}, и не поклапају се сви, дакле ова три круга имају заједничку радикалну осу (која садржи сва четири ортоцентра), одакле следи тврђење. $\square$

Последица. (а) Средишта X, Y, Z дужи AC, BD и EF су колинеарна *(Њутн-Гаусова права)*.

(б) Ортоцентри троуглова ABE, BCF, CDE и DAF леже на заједничкој радикалној оси кругова k_{AC}, k_{BD} и k_{EF}.

(ц) Њутн-Гаусова права је нормална на Оберову праву, односно на заједничку Симсонову праву комплетног четвороугла.

Задаци

1. Нека је P тачка на описаном кругу $\triangle ABC$. Нормале из P на BC, CA, AB поново секу круг у тачкама A_1, B_1, C_1. Доказати да је $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC$.

2. Нека су A, B, C, D, E, F тачка у равни међу којима никоје три нису на правој. Ако кругови ABC, CDE и EFA имају заједничку тачку, доказати да и кругови BCD, DEF и FAB имају заједничку тачку.

3. Ако се три круга секу у тачки која лежи на истом кругу са њиховим центрима, доказати да су њихове друге пресечне тачке колинеарне.

4. Ако су D, E и F редом тачке на страницама BC, CA, AB троугла ABC, доказати да центри кругова AEF, BFD и CDE одређују троугао директно сличан троуглу ABC.

5. *(Манхајмова теорема)* Ако је $M \neq P$ тачка у равни и M_a, M_b, M_c пресеци правих AM, BM, CM са Микеловим круговима AEF, BFD, CDE редом, доказати да тачке M, M_a, M_b, M_c леже на кругу. Шта ако је M бесконачна тачка?

6. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао. Праве AB и CD се секу у тачки E, а праве BC и DA у тачки F. Доказати да Микелова тачка правих AB, BC, CD и DA припада дужи EF.

7. *(Микелова теорема о пет кругова)* У петоуглу $A_1A_2A_3A_4A_5$ је $A_{i-1}A_i \cap A_{i+1}A_{i+2} = B_i$ за $i = 1, \ldots, 5$ (индекси су по модулу 5). Кругови $B_{i-1}A_{i-1}A_i$ и $B_iA_iA_{i+1}$ секу се поново у C_i. Доказати да су тачке $C_1, \ldots, C_5$ концикличне.

8. (а) Доказати да су педални троуглови тачака P и P' у троуглу ABC индиректно слични ако и само ако је P' инверзна слика тачке P у односу на описани круг $\triangle ABC$.

   (б) Ако су A', B', C', D' слике тачака A, B, C, D редом при некој инверзији, тада је педални троугао тачке A' у односу на $\triangle B'C'D'$ индиректно сличан педалном троуглу тачке A у односу на $\triangle BCD$.

9. Ако за тачке M и N у равни троугла ABC важи $AM : BM : CM = AN : BN : CN$, доказати да је тачка N инверзна слика тачке M у односу на описани круг $\triangle ABC$.

10. Нека су H ортоцентар, а O и R редом центар и полупречник описаног круга троугла ABC. Тачке D, E и F су симетричне тачкама A, B, C у односу на праве BC, CA и AB, редом. Доказати да су тачке D, E и F колинеарне ако и само ако је $OH = 2R$.

11. Четвороугао $ABCD$ је уписан у круг. Доказати да се Симсонове праве $\ell(A, BCD)$, $\ell(B, CDA)$, $\ell(C, DAB)$ и $\ell(D, ABC)$ секу у једној тачки.

12. Дате су различите тачке A_1, B_1, C_1 на описаном кругу троугла ABC тако да важи $\widehat{AA_1} + \widehat{BB_1} + \widehat{CC_1} \equiv 0^\circ$ (збир оријентисаних лукова). Доказати да се Симсонове праве за тачке A_1, B_1 и C_1 у односу на $\triangle ABC$ секу у једној тачки.

13. (а) Нека је P тачка на описаном кругу тетивног четвороугла $ABCD$. Доказати да подножја нормала из тачке P на Симсонове праве $\ell(P, ABC)$, $\ell(P, ABD)$, $\ell(P, ACD)$ и $\ell(P, BCD)$ припадају истој правој. *(Симсонова права у четвороуглу)*

    (б) Доказати да се аналогно може индуктивно дефинисати Симсонова права тачке P у тетивном n-тоуглу, као права која садржи подножја нормала из P на Симсонове праве у свим $(n-1)$-тоугловима одређеним његовим теменима.

14. Дат је троугао ABC. Наћи геометријско место центара свих једнакостраничних троуглова PQR са теменима P, Q, R на правим BC, CA, AB, редом.

15. Нека је O центар описаног круга оштроуглог троугла ABC. Круг кроз тачке C и O сече странице CB и CA редом у тачкама D и E. Доказати да ортоцентар троугла ODE лежи на правој AB.

16. Тачке D, E, F на страницама BC, CA, AB троугла ABC су такве да је троугао DEF сличан троуглу ABC. Ако се ортоцентри троуглова ABC и DEF поклапају, доказати да је $\triangle ABC$ једнакостраничан.

17. Тачке D, E, F на страницама BC, CA, AB троугла ABC су такве да је троугао DEF сличан троуглу ABC. Ако се центри уписаних кругова троуглова ABC и DEF поклапају, доказати да је $\triangle ABC$ једнакостраничан.

18. У оштроуглом троуглу ABC са $AC \neq BC$ тачке D, E и F су редом средишта страница BC, CA и AB, а K је подножје висине из C. Кругови описани око троуглова AEK и BDK се секу у тачки $P \neq K$. Доказати да је $\sphericalangle ACP = \sphericalangle FCB$.

19. Нека су тачке P и Q изогонално спрегнуте у односу на троугао ABC. Доказати да њихови педални троуглови имају заједнички описани круг.

20. Нека је O центар описаног круга оштроуглог троугла ABC. Тачке P и Q на страницама AB и AC редом су такве да је $\sphericalangle BOP = \sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle COQ = \sphericalangle ACB$. Доказати да права симетрична правој BC у односу на праву PQ додирује описани круг троугла APQ.

21. Тачка D лежи на страници BC троугла ABC. Права AD поново сече описани круг троугла ABC у X. Нека су P и Q подножја нормала из X на AB и AC редом, и γ круг над пречником XD. Доказати да права PQ додирује γ ако и само ако $AB = AC$.

22. Дат је оштроугли троугао ABC. Тачка N је таква да је $\sphericalangle NBA = \sphericalangle NCA = 90°$, а D и E су тачке на страницама AC и AB, редом, такве да је $\sphericalangle BNE = \sphericalangle CND$. Права DE сече праву BC у тачки F, а K је средиште дужи DE. Ако је $X \neq A$ тачка пресека кругова ABC и ADE, доказати да је $\sphericalangle KXF = 90°$.

23. Нека су O и I редом центри описаног и уписаног круга троугла ABC. Тачке D, E и F на страницама BC, CA и AB редом су такве да је $BD + BF = CA$ и $CD + CE = AB$. Описани кругови троуглова BFD и CDE секу се у тачки $P \neq D$. Доказати да је $OP = OI$.

24. Тачке A_1, B_1 и C_1 су одабране редом на страницама BC, CA и AB троугла ABC. Описани кругови троуглова AB_1C_1, BC_1A_1 и CA_1B_1 поново секу описани круг троугла ABC у тачкама A_2, B_2 и C_2, редом. Ако су тачке A_3, B_3, C_3 редом симетричне тачкама A_1, B_1, C_1 у односу на средишта страница BC, CA, AB, доказати да су троуглови $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ слични.

Решења

1. Тврђење следи из $\sphericalangle A_1C_1B_1 = \sphericalangle A_1PB_1 = \sphericalangle ACB$ (углови са нормалним крацима) и аналогних једнакости.

2. Нека је P заједничка тачка кругова ABC и CDE. Круг EFA пролази кроз тачку P ако и само ако је $\sphericalangle AFE = \sphericalangle APE = \sphericalangle APC + \sphericalangle CPE = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CDE$ (оријентисани углови по модулу $180°$!), тј. $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDE + \sphericalangle EFA = 0$. Тада је такође $\sphericalangle BCD + \sphericalangle DEF + \sphericalangle FAB = 0$, па кругови BCD, DEF и FAB имају заједничку тачку.

3. Нека су A, B и C центри датих кругова, а њихова заједничка тачка P на кругу ABC. Њихове друге пресечне тачке P_1, P_2, P_3 су симетричне тачки P у односу на праве AB, AC и BC. Како подножја нормала из P на AB, AC и BC леже на истој правој, тачке P_1, P_2, P_3 су такође колинеарне.

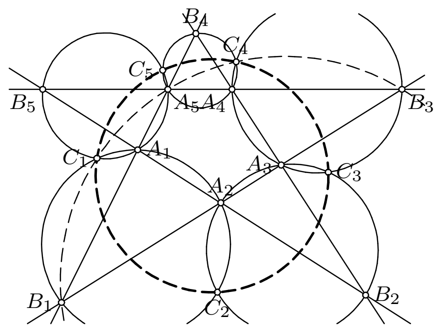
4. Означимо центре троуглова AEF, BFD, CDE редом са O_a, O_b, O_c. Нека се кругови AEF, BFD, CDE секу у тачки P. Како је $\sphericalangle AEP = \sphericalangle BFP = \sphericalangle CDP$, једнакокраки троуглови AO_aP, BO_bP и CO_cP су директно слични, па је $\triangle O_aO_bO_c$ слика троугла ABC при обртној хомотетији око тачке P.

5. Једноставан рачун углова: $\sphericalangle PM_aM = \sphericalangle PM_aA = \sphericalangle PFA = \sphericalangle PDB = \sphericalangle PM_bM = \sphericalangle PEC = \sphericalangle PM_cM$, па тачке M_a, M_b, M_c леже на кругу који пролази кроз P и M.

   Ако је M бесконачна тачка, онда је и круг "бесконачан", тј. тачке M_a, M_b, M_c и P леже на правој.

6. Ако се кругови BCE и CDF секу у тачки P, онда је $\sphericalangle CPE = \sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle CPF = \sphericalangle ADC$. Одатле је $\sphericalangle EPC + \sphericalangle CPF = 180^\circ$, тј. P је на дужи EF.

7. Покажимо да су тачке C_1, C_2, C_3, C_4 на кругу; тврђење задатка ће следити по аналогији. Треба да покажемо да је $\sphericalangle C_2C_3C_4 + \sphericalangle C_2C_1C_4 = 180^\circ$.

   Имамо $\sphericalangle C_2C_3C_4 = \sphericalangle C_2C_3A_3 + \sphericalangle A_3C_3C_4 = \sphericalangle C_2A_2B_1 + \sphericalangle A_3B_3C_4$, па је $\sphericalangle C_2C_3C_4 + \sphericalangle C_4C_1C_2 = \sphericalangle C_2C_1B_1 + \sphericalangle C_4C_1C_2 + \sphericalangle A_3B_3C_4 = \sphericalangle C_4C_1B_1 + \sphericalangle B_1B_3C_4$; зато је довољно показати да су тачке C_1, B_1, B_3, C_4 концикличне.

   Испоставља се да се заједно са тачкама C_1, B_1, B_3, C_4 на кругу налази и тачка A_5. Покажимо да је C_4 (и C_1, аналогно) на кругу $B_1B_3A_5$. Заиста, важи $\sphericalangle B_1B_3C_4 = 180^\circ - A_3A_4C_4 = \sphericalangle C_4A_4B_4 = \sphericalangle C_4A_5B_4 = 180^\circ - \angle C_4A_5B_1$, што нам је и требало.

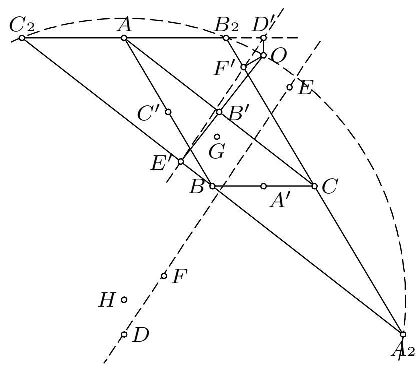
8. (a) На основу Т.3, за дату тачку P, тачка P' са траженом особином је јединствена.

   Означимо са P_a, P_b, P_C и P'_a, P'_b, P'_c редом подножја нормала из P и P' на BC, CA, AB, а са O центар описаног круга $\triangle ABC$. Ако је P' инверзна слика тачке P у односу на круг ABC, онда је $\sphericalangle P'_aP'_bP'_c = \sphericalangle AP'C - \sphericalangle ABC = \sphericalangle AP'O + \sphericalangle OP'C - \sphericalangle ABC = \sphericalangle OAP + \sphericalangle PCO - \sphericalangle ABC = \sphericalangle AOC + \sphericalangle CPA - \sphericalangle ABC = \sphericalangle ABC - \sphericalangle APC = -\sphericalangle P_aP_bP_c$. Слично је и $\sphericalangle P'_bP'_aP'_c = -\sphericalangle P_bP_aP_c$, па су троуглови $P_aP_bP_c$ и $P'_aP'_bP'_c$ индиректно слични.

   (б) Ако је O центар инверзије, имамо $\sphericalangle A'_bA'_cA'_d = \sphericalangle B'A'D' - \sphericalangle B'C'D' = \sphericalangle B'A'O + \sphericalangle OA'D' - \sphericalangle B'C'O - \sphericalangle OC'D' = \sphericalangle OBA + \sphericalangle ADO - \sphericalangle OBC - \sphericalangle CDO = \sphericalangle CBA + \sphericalangle ADC = \sphericalangle BCD - \sphericalangle BAD = -\sphericalangle A_bA_cA_d$.

9. Како је $(a \cdot AM) : (b \cdot BM) : (c \cdot CM) = M_bM_c : M_cM_a : M_aM_b$ и $(a \cdot AN) : (b \cdot BN) : (c \cdot CN) = N_bN_c : N_cN_a : N_aN_b$, следи да су троуглови $M_aM_bM_c$ и $N_aN_bN_c$ слични. На основу претходног задатка и Т.2, или је $N \equiv M$, или је N инверзна слика тачке M.

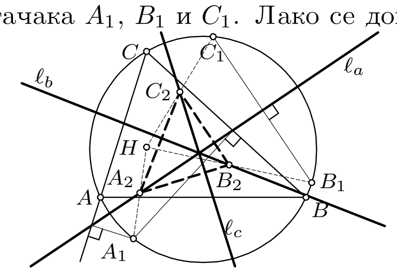
10. Применимо хомотетију са центром у тежишту G троугла ABC и коефицијентом $-1/2$. Тачке A, B, C се сликају редом у средишта A', B', C' страница BC, CA, AB, H се слика у O, а тачке D, E, F у тачке D', E', F' симетричне тачкама A', B', C' у односу на $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$.

    Посматрајмо троугао $A_1B_1C_1$ такав да су A, B, C средишта дужи B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1, редом. Како праве $A'D'$, $B'E'$ и $C'F'$ пролазе кроз тачку O, тачке D', E', F' су подножја нормала из O на праве B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1. Тачке D, E, F су колинеарне ако и само ако су то и D', E', F', а то по тврђењу о Симсоновој правој важи ако и само ако O лежи на описаном кругу k троугла $A_1B_1C_1$. Круг k има центар H и полупречник $2R$, и одавде следи тврђење.

11. На основу Т.6, права $\ell(A, BCD)$ пролази кроз средиште M дужи AH_a, где је H_a ортоцентар троугла BCD. Ако је O центар круга $ABCD$, важи $\overrightarrow{OH_a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ (по Хамилтоновој теореми), одакле је $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OH_a}}{2} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2}$. Због симетрије, остале три Симсонове праве пролазе кроз исту тачку M.

12. Означимо са ℓ_a, ℓ_b и ℓ_c редом Симсонове праве тачака A_1, B_1 и C_1. Лако се доказује (нпр. коришћењем Т.5) да је $\ell_a \perp B_1C_1$. Притом ℓ_a пролази кроз средиште A_2 дужи A_1H. Уз аналогну дефиницију B_2 и C_2, то значи да је ℓ_a висина из A_2 у троуглу $A_2B_2B_2$. Слично важи за ℓ_b и ℓ_c, па све три Симсонове праве пролазе кроз ортоцентар троугла $A_2B_2C_2$.

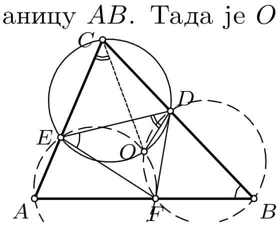


13. (а) Пројекције B_1, C_1, D_1 тачке P на праве AB, AC, AD, редом, леже на кругу над пречником AP. Праве B_1C_1, C_1D_1 и D_1B_1 су Симсонове праве тачке P у троугловима ABC, ACD и ABD редом. Пројекције тачке P на те три Симсонове праве леже на Симсоновој правој тачке P у троуглу $B_1C_1D_1$. Аналогно, пројекција на четврту Симсонову праву је на истој правој.

(б) Нека је P тачка на описаном кругу n-тоугла $A_1A_2 \dots A_n$, Пројекције $B_2, B_3, \dots, B_n$ на праве $A_1A_2, A_1A_3, \dots, A_1A_n$ редом леже на кругу над пречником A_1P. Доказаћемо индукцијом да се Симсонова права тачке P у n-тоуглу $A_1A_2 \dots A_n$ поклапа са Симсоновом правом тачке P у $(n-1)$-тоуглу $B_2B_3 \dots B_n$. База $n = 4$ је доказана у делу (а). По индуктивној претпоставци, Симсонова права у $(n-1)$-тоуглу $A_1A_3 \dots A_n$ се поклапа са Симсоновом правом у $(n-2)$-тоуглу $B_3B_4 \dots B_n$. Следи да пројекције тачке P на Симсонове праве $(n-1)$-тоуглова добијених брисањем једног од темена $A_2, \dots, A_n$ (а аналогно и брисањем темена A_1) из n-тоугла $A_1A_2 \dots A_n$ леже на Симсоновој правој у $(n-1)$-тоуглу $B_2B_3 \dots B_n$.

14. По Т.2, сви троуглови PQR имају заједничку Микелову тачку M која задовољава $\sphericalangle BMC = \alpha + 60^\circ$ и $\sphericalangle CMA = \beta + 60^\circ$. Обртна хомотетија са центром M која слика $\triangle M_aM_bM_c$ у $\triangle PQR$ такође слика центар O троугла $M_aM_bM_c$ у центар Z троугла PQR. Притом су троуглови MM_aP и MOZ слични, па је $\sphericalangle MOZ = 90^\circ$. Дакле, тачка Z лежи на правој кроз O нормалној на MO, и то је тражено геометријско место.

15. Посматрајмо тачку $F \neq A$ у којој круг AEO сече страницу AB. Тада је O Микелова тачка за тачке D, E, F, па F такође лежи на кругу BDO. Из $\sphericalangle DEF = \sphericalangle AOC - \sphericalangle ABC = \sphericalangle ABC = 90^\circ - \sphericalangle OCA = 90^\circ - \sphericalangle ODE$ следи да је $EF \perp DO$. Аналогно важи $DF \perp EO$, па је F ортоцентар троугла ODE.

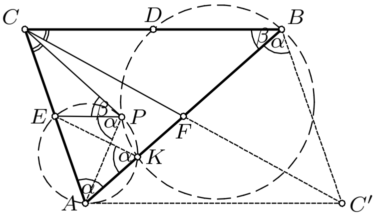


16. Микелова тачка P за тачке D, E, F задовољава $\sphericalangle APB = \sphericalangle ACB + \sphericalangle DFE = 2\sphericalangle ACB$, и слично $\sphericalangle BPC = 2\sphericalangle BAC$; следи да је $P \equiv O$ центар описаног круга троугла ABC. По претходном задатку, O је ортоцентар троугла DEF, а O се поклапа са ортоцентром $\triangle ABC$ ако и само ако је $\triangle ABC$ једнакостраничан.

17. Центар описаног круга O је Микелова тачка за D, E, F. Ако су A_1, B_1, C_1 редом средишта страница BC, CA, AB, троугао DEF је слика троугла $A_1B_1C_1$ при обртној хомотетији са центром O. Ако су I, I_1 и J редом центри уписаних кругова троуглова ABC, $A_1B_1C_1$ и DEF, онда је $\triangle OA_1D \sim \triangle OI_1J$, па је $\sphericalangle OI_1J = 90^\circ$. Међутим, ми ћемо показати да у неједнакостраничном троуглу ABC важи $\sphericalangle OI_1I \neq 90^\circ$, одакле ће следити $I \neq J$.

Хомотетија са центром у тежишту T троугла ABC и коефицијентом -2 слика I_1 у I и O у H. Зато треба показати да је $\sphericalangle TIH \neq 90^\circ$. Означимо са E средиште дужи OH, а са R и r полупречнике описаног и уписаног круга $\triangle ABC$. Како је $\overrightarrow{IH} = 2\overrightarrow{IE} - \overrightarrow{IO}$ и $\overrightarrow{IT} = \frac{2\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IO}}{3}$, користећи познате једнакости $OI^2 = R^2 - 2Rr$ и $IE = \frac{R}{2} - r$ добијамо $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{IT} = \frac{1}{3}(4IE^2 - IO^2) = -\frac{2}{3}r(R-2r) < 0$, тако да је $\cos\sphericalangle TIH < 0$, тј. $\sphericalangle TIH > 90^\circ$.

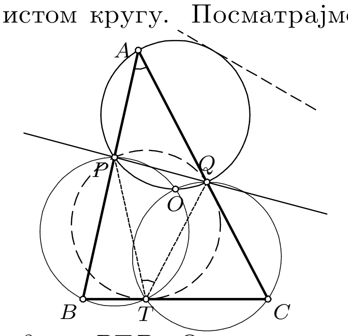
18. Нека је Q тачка таква да су троуглови CEQ и CFB директно слични. Из $\sphericalangle ECQ = \sphericalangle FCB$ следи $\sphericalangle QCD = \sphericalangle ACF$, а такође је $\frac{QC}{CD} = \frac{QC}{CE} \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{CF} \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{AC}{CF}$, па су и троуглови QCD и ACF директно слични.



Обртна хомотетија са центром у C која слика $\triangle CEQ$ у $\triangle CFB$ такође слика A у тачку C' симетричну тачки C у односу на F. Зато је $\sphericalangle AQE = \sphericalangle C'BF = \sphericalangle A = \sphericalangle AKE$, па тачка Q лежи на кругу AKE. Слично, Q је на кругу BKD, па је $Q \equiv P$.

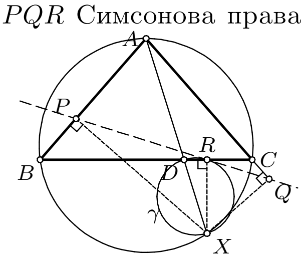
19. Нека је G подножје нормале из P на AB, а H, I подножја нормала из Q на CB и CA редом. Четвороуглови $AEPG$ и $AFQI$ су слични, па важи $\sphericalangle AEG = \sphericalangle AFI$, дакле тачке E, F, G, I леже на неком кругу k. Аналогно, тачке D, E, I, H леже на неком кругу k_1, а тачке D, H, F, G на неком кругу k_2. Ако су кругови k, k_1 и k_2 различити, радикалне осе по два од ових кругова су праве AB, BC и CA, што је немогуће јер радикалне осе припадају истом прамену. Следи да је $k_1 \equiv k_2 \equiv k$, дакле све тачке D, E, F, G, H, I су на истом кругу.

20. Углове $\triangle ABC$ означавамо уобичајено са α, β, γ. Како је $\sphericalangle POQ = 360^\circ - \sphericalangle BOP - \sphericalangle COQ - \sphericalangle BOC = 180^\circ - \alpha$, тачке A, P, O, Q су на истом кругу. Посматрајмо тачку $T \neq C$ на правој BC такву да је $PT = PB$. Из $\sphericalangle BTP = \sphericalangle BOP$ следи да су тачке O, P, B, T на кругу, па је O Микелова тачка за P, Q, T. Одавде су и тачке O, Q, C, T концикличне, па имамо $\sphericalangle PTQ = \sphericalangle BOC - \sphericalangle BAC = \alpha$. Према томе, круг PQT је симетричан кругу APQ у односу на праву PQ.



Остаје да приметимо да права BC додирује круг PQT: заиста, $\sphericalangle PQT = \sphericalangle AOC - \sphericalangle ABC = \beta = \sphericalangle PTB$. Одавде одмах следи тврђење задатка.

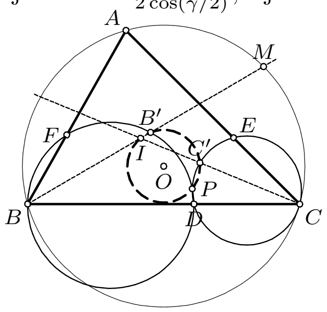
21. Нека је R подножје нормале из X на BC - тада је PQR Симсонова права тачке X. Та права додирује γ, тј. круг XDR, ако и само ако је $\sphericalangle PRD = \sphericalangle RXD$. Имамо $\sphericalangle PRD = \sphericalangle PXB = 90^\circ - \sphericalangle XBA = 90^\circ - \sphericalangle XBC + \sphericalangle ABC = 90^\circ - \sphericalangle DAC + \sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle RXD = 90^\circ - \sphericalangle ADB = 90^\circ + \sphericalangle BCA - \sphericalangle DAC$, дакле $\sphericalangle PRD = \sphericalangle RXD$ ако и само ако је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA$, тј. $AB = AC$.



22. Означимо са M средиште странице BC. Ако са D' и E' означимо редом пројекције тачака D и E на праву BC, онда је $BE' = BE\cos\beta = BN\mathrm{tg}x\cos\beta$ и аналогно $CD' = CN\mathrm{tg}x\cos\gamma$, где је $x = \sphericalangle BNE = \sphericalangle CND$, па како је по синусној теореми $BN/CN = \cos\gamma/\cos\beta$, следи $BE' = CD'$ и одатле $MD' = ME'$. Према томе, пројекција тачке K на праву CD је тачка M.

Како је $\sphericalangle XED = \sphericalangle XAC = \sphericalangle XBC$ (претпостављајући да је X на краћем луку AC) и слично $\sphericalangle XDE = \sphericalangle XCB$, троуглови XBC и XED су слични. Зато су и троуглови XKD и XMC слични, па је $\sphericalangle XKF = \sphericalangle XKD = \sphericalangle XMC = \sphericalangle XMF$. Следи да су тачке X, K, M и F концикличне, па је $\sphericalangle KXF = \sphericalangle KMF = 90^\circ$.

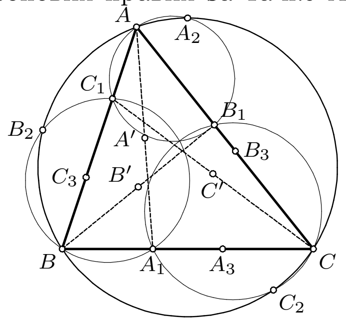
23. Означимо са B' и C' редом тачке у којима кругови BDF и CDEпоново секу праве BI и CI. Како је $B'D = B'F = \frac{DF}{2\cos(\beta/2)}$, из Птоломејеве теореме у четвороуглу $BDB'F$ добијамо да је $BB' = \frac{BF+BD}{2\cos(\beta/2)} = \frac{AC}{2\cos(\beta/2)}$. Аналогно је $CC' = \frac{AB}{2\cos(\gamma/2)}$, тј. тачке B' и C' не зависе од избора тачака D, E, F.



У оријентисаним угловима по модулу $180°$ имамо $\sphericalangle B'PC' = \sphericalangle B'PD + \sphericalangle DPC' = \sphericalangle B'BD + \sphericalangle DCC' = \sphericalangle B'IC'$, што значи да тачке B', C', I, P леже на истом кругу k. Остаје да покажемо да је управо O центар круга k.

Ако права BI сече описани круг троугла ABC у тачки $M \neq B$, онда је $MB' = MA = \frac{AC}{2\cos(\beta/2)} = BI$, па су троуглови OBI и OMB' подударни и одатле $OI = OB'$. Слично је $OI = OC'$, па је O центар круга k.

24. По Т.5, угао $A_2C_2B_2$ је једнак углу између Симсонових правих за тачке A_2 и B_2 у односу на $\triangle ABC$. Даље, тачка A_2 је Микелова тачка правих BC, CA, AB и B_1C_1, па је по последици Т.8 Симсонова права ℓ_a те тачке нормална на Њутн-Гаусову праву за ове четири праве, тј. на праву која спаја средишта B' и C' дужи BB_1 и CC_1, редом. Аналогно, Симсонова права ℓ_b тачке B_2 у односу на $\triangle ABC$ је нормална на праву $A'C'$. Одавде следи да је $\sphericalangle A_2C_2B_2 = \sphericalangle(\ell_a, \ell_b) = \sphericalangle A'C'B'$. Слично важи $\sphericalangle B_2A_2C_2 = \sphericalangle B'A'C'$, тако да је $\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle A'B'C'$.



Најзад, важи $\overrightarrow{A'C'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{A_1C_1}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{A_3C_3}$, слично важи $\overrightarrow{B'C'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{B_3C_3}$, па је троугао $A'B'C'$ сличан троуглу $A_3B_3C_3$.

Београд, 2012-2017