Задаци за самосталан рад

(припремио Душан Ђукић)

Унутар сваке области, лакши задаци су обично на почетку, тежи на крају, али правила нема.
Дајте сваком задатку шансу, макар се чинио грозним. Дајем вам 14 дана за рад. Лепо се забавите.

Алгебра

1. Ако су a, b и c позитивни и $(a+c)(b^2+ac)=4a$, колико највише може бити $b+c$?
2. Наћи све функције $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ такве да је $f(x+y)\geqslant f(x)+y$ и $f(f(x))\leqslant x$ за све $x,y>0$.
3. Дат је природан број $n>1$. Збир реалних бројева $a_1,a_2,\dots,a_n$ је нула. Колико најмање може бити парова индекса $i<j$ за које је $a_i+a_j\geqslant 0$?
4. Ако су $a,b,c,d>0$ и $abcd=1$, доказати да је $a^4+b^4+c^4+d^4\geqslant 4+4(a-b)^2$.
5. Наћи све функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такве да важи $f(2xy)^2+f\big(f(x)^2-y^2\big)^2=f(x^2+y^2)^2$ за све $x,y\in\mathbb{R}$.
6. Одредити све реалне полиноме $P(x)$ такве да је $P(x^2-2)=P(x)^2-2$ за све $x\in\mathbb{R}$.
7. Полином $P(x)$ је такав да је полином $P(x)^2-x-1$ дељив са x^{100}. Наћи коефицијент уз x^{99} у полиному $(P(x)+1)^{100}$.
8. Ако су $1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\dots\leqslant a_n\leqslant n$ природни бројеви, доказати да је $\sum_{i=1}^n(a_{a_i}-a_i)\leqslant\frac{(n-1)^2}{4}$.

Геометрија

9. Нека су M и N редом средишта страница AB и CD конвексног четвороугла $ABCD$. Доказати да је бар један од збирова $AN+BN$ и $CM+DM$ већи од збира $AD+BC$.
10. У конвексном петоуглу $ABCDE$ је $AB=BC$, $CD=DE$ и $\sphericalangle ABC+\sphericalangle CDE=180^\circ$. Ако је M средиште странице AE, доказати да је $\sphericalangle BMD=90^\circ$.
11. У троуглу ABC уписани круг има центар I и додирује страницу BC у тачки D. Симетрала $\sphericalangle BAC$ сече дуж BC у тачки E. Тачка N је средиште лука BAC описаног круга $\triangle ABC$, а F тачка пресека правих DI и AN. Доказати да права NI полови дуж EF.
12. Уписани круг троугла ABC, са центром I, додирује странице BC, CA и AB редом у тачкама D, E и F. Тачка M је средиште странице BC. Тачка P на правој AI је таква да је $MP=MD$, а тачка $Q\neq D$ на уписаном кругу таква да је $\sphericalangle AQD=90^\circ$. Доказати да је један од углова $\sphericalangle PQE$ и $\sphericalangle PQF$ прав.
13. Троугао ABC у коме је $AB<AC$ уписан је у круг Ω са центром O. Тачка D на симетрали угла BAC и E на дужи BC су такве да је $OE\parallel AD$ и $DE\perp BC$. Тачка K на полуправој EB је таква да је $EK=EA$. Круг описан око троугла AKD поново сече праву BC и круг Ω редом у тачкама P и Q. Доказати да је PQ тангента на круг Ω.
14. Дат је трапез $ABCD$. Тачка M је средиште основице CD, а тачка P је таква да је $AP=AD$ и $BP=BC$. Ако је $\sphericalangle APD=\sphericalangle BMC$, доказати да је такође $\sphericalangle AMD=\sphericalangle BPC$.
15. Дата је тачка P у равни троугла ABC, ван правих одређених страницама. Тачке K и L су редом ортоцентри троуглова APB и APC, а Q пресечна тачка праве AP са описаним кругом $\triangle BPC$. Ако је R подножје нормале из Q на праву BC, доказати да је $AR\perp KL$.
16. Уписани круг троугла ABC има центар I и додирује страницу BC у тачки D. Тачка D' је симетрична тачки D у односу на I, а R је средиште дужи AI. Доказати да Фојербахова тачка (тачка додира Ојлеровог и уписаног круга) лежи на правој RD'.

Комбинаторика

17. Колико има скупова A од 100 позитивних бројева који садрже бројеве 1 и 2 и, за све $x,y\in A$, бар један од бројева $x+y$ и $|x-y|$ је такође у A?

18. Ученици неке школе су основали секције, при чему сваке две секције имају заједничког члана. Доказати да је могуће дати једном ученику и лењир и шестар, а сваком другом ученику само по једно од та два, тако да свака секција располаже и лењиром и шестаром.

19. На квадратној табли 8×8 означено је n поља тако да сваки правоугаоник 3×2 или 2×3 садржи бар два суседна поља која су оба означена. Које је најмање могуће n?

20. За дати низ слова А и Б, *дубином* зовемо број различитих поднизова добијених брисањем неких слова (можда ниједног). Нпр. дубина низа БААБ је 9, јер су одговарајући поднизови А,Б,АА,АБ,БА,ББ,ААБ,БАА,БАБ. Која је највећа могућа дубина низа од n слова?

21. У друштву има $n \geqslant 3$ људи и не постоје четири различите особе a, b, c, d такве да су $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, d\}$ и $\{d, a\}$ парови познаника, али $\{a, c\}$ и $\{b, d\}$ нису (познанство је узајамно). *Максимална клика* је сваки подскуп људи који се сви међусобно познају, али нико ван подскупа их не познаје све. Доказати да у овом друштву не постоји више од $\frac{n(n-1)}{2}$ максималних клика.

22. Дато је n тачака у равни. Сваке три чине недегенерисани троугао површине не веће од 1. Доказати да међу овим троугловима има највише n оних са површином једнаком 1.

23. Дато је n кутија са $1, 2, \ldots, n$ каменчића. Анка и Бранка играју игру. Анка распоређује ове кутије у низ, након чега њих две (прво Бранка) бирају свака у свом потезу по једну кутију и из ње узимају каменчић. При томе играч на потезу (осим Бранке у првом) мора да одабере кутију суседну оној из које је претходни каменчић узет. Губи играч који не може да одигра потез. Ко побеђује?

24. У круг је уписано n троуглова чијих је свих $3n$ темена различито. Доказати да је могуће у сваком троуглу обојити једно теме црвеном и једно зеленом бојом тако да су црвена и зелена темена дуж кружнице распоређена наизменично.

Теорија бројева

25. Наћи све четворке простих бројева a, b, c, d таквих да је $ab + bc + ca = 12d + 1$.

26. Ако је n природан број, доказати да је $\sum_{i=1}^{n} \lfloor \frac{n}{i} \rfloor^2 = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$.

27. *Питагорејска тројка* је тројка природних бројева $\{a, b, c\}$ у којој је $a^2 + b^2 = c^2$. Доказати да за сваке две питагорејске тројке P и Q постоји низ питагорејских тројки $P = P_0, P_1, P_2, \ldots,$ $P_n = Q$ тако да P_{i-1} и P_i имају заједнички елемент за све $i = 1, \ldots, n$.

28. Ако је $n \in \mathbb{N}$, доказати да број $n(2^n - 1)$ у бинарном запису има тачно n јединица.

29. Наћи све функције $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такве да важи $f(p) > 0$ и $\big(f(x) + f(p)\big)^{f(p)} \equiv x \pmod{p}$ за све целе бројеве x и просте бројеве p.

30. Низови (a_n) и (b_n) су дати условима $a_1 = b_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n^2 + b_n^2$ и $b_{n+1} = 2a_n^2 - b_n^2$ за све $n \geqslant 1$. Доказати да су бројеви a_m и b_n узајамно прости за све m и n.

31. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n за које бројилац разломка $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ у нескративом облику није степен простог броја.

32. Скуп природних бројева S има својство да су свака два узајамно проста, али за свака три различита броја $x, y, z \in S$ збир $x + y + z$ је дељив бар једним од њих. Колико највише елемената може имати скуп S?

Решења

1. По услову задатка је $4a = (a+c)(b^2+ac) = a(b^2+c^2)+c(a^2+b^2) \geqslant a(b^2+c^2)+c\cdot 2ab = a(b+c)^2$, одакле следи $b+c \leqslant 2$. Једнакост се достиже нпр. за $a=b=c=1$.

2. По првом услову, за свако $x>0$ важи $f(x) \geqslant f(\varepsilon)+x-\varepsilon \geqslant x-\varepsilon$ за све $\varepsilon>0$, одакле следи $f(x)\geqslant x$. С друге стране, такође због првог услова, функција је f растућа, па ако је $f(x)>x$, онда је и $f(f(x))>x$, противно другом услову. Дакле, $f(x)\leqslant x$ за све x. Следи да је $f(x)=x$.

3. Одговор је $n-1$ за $n\notin\{3,5\}$, односно $n-2$ за $n=3$ и $n=5$.

   Ове вредности се достижу у случају n-торки бројева $(1,1,-2)$ за $n=3$, $(2,2,2,-3,-3)$ за $n=5$ и $(n-1,-1,-1,\dots,-1)$ за све остале бројеве n. Доказаћемо индукцијом по n да су ово најмање могуће вредности. За $n\leqslant 3$ то је тривијално; нека је $n\geqslant 4$.

   Пар бројева a_i,a_j $(i<j)$ за који је $a_i+a_j\geqslant 0$ зваћемо *добрим*. Нека су дати бројеви $a_1>a_2>\dots>a_n$. Ако је $a_1+a_n\geqslant 0$, онда је $a_1+a_i\geqslant 0$ за све i, па има бар $n-1$ добрих парова. Претпоставимо зато да је $k<n$ такво да је $a_1+a_k\geqslant 0>a_1+a_{k+1}$. Ако је $k\leqslant\frac{n}{2}$, онда је сваки од збирова a_i+a_{n+1-i} негативан, противно претпоставци да је збир свих бројева нула. Дакле, $k\geqslant\frac{n+1}{2}$.

   Уклањањем бројева a_1 и a_n губимо $k-1\geqslant\frac{n-1}{2}$ добрих парова, а остаје нам $n-2$ бројева са позитивним збиром. По индуктивној претпоставци, међу њима има бар $n-3$ добрих парова за $n\notin\{5,7\}$, односно $n-4$ за $n=5$ и $n=7$. Тако за $n\notin\{5,7\}$ имамо укупно бар $n-3+\frac{n-1}{2}\geqslant n-\frac{3}{2}$, дакле бар $n-1$. Најзад, за $n=5$ и $n=7$ имамо бар $n-4+\frac{n-1}{2}$ добрих парова, а то је 3, односно 6. Индукција је завршена.

4. Како је $c^4+d^4\geqslant 2c^2d^2=\frac{2}{a^2b^2}$, довољно је доказати неједнакост $a^4+b^4+\frac{2}{a^2b^2}\geqslant 4+4(a-b)^2$, тј. $(a^2-b^2)^2+2(ab-\frac{1}{ab})^2\geqslant 4(a-b)^2$. Увођењем смене $(a-b)^2=x$ и $ab=y$ имамо $(a^2-b^2)^2=x(x+4y)$, па претходна неједнакост постаје

$$x(x+4y-4)+2\left(y-\frac{1}{y}\right)^2\geqslant 0,\quad \text{тј.}\quad (x+2y-2)^2+2\left(y-\frac{1}{y}\right)^2\geqslant 4(y-1)^2.$$

   Ако је $y\geqslant 1$, онда је $x(x+4y-4)\geqslant 0$, па неједнакост тривијално важи. С друге стране, ако је $y<1$, онда је $2(y-\frac{1}{y})^2=2(1+\frac{1}{y})^2(y-1)^2\geqslant 4(y-1)^2$, па неједнакост опет важи.

5. Преласком на функцију $g(x)=f(x)^2$ дату једначину можемо записати као

$$g(2xy)+g(g(x)-y^2)=g(x^2+y^2)\quad\text{за све } x,y\in\mathbb{R}. \qquad (*).$$

   Замена y са $-y$ даје $g(-2xy)=g(2xy)$, тј. g је парна функција. Даље, како за све $a\geqslant b\geqslant 0$ постоје x и y такви да је $x^2+y^2=a$ и $2xy=b$, из $(*)$ следи да је $g(a)\geqslant g(b)$, тј. g је неопадајућа функција на интервалу $[0,\infty)$. Одатле је $g(g(0))\geqslant g(0)$, али из $(*)$ за $x=y=0$ добијамо $g(g(0))=0$, из чега следи $g(0)=0$.

   Претпоставимо да постоји $a>0$ такво да је $g(a)=0$. Заменом $x=\min\{\frac{1}{2}\sqrt{a},a\}$ и $y=\sqrt{a}$ у $(*)$ добијамо $g(x)=0$ и $g(a+x^2)=g(a)+g(g(x)-a)=0$. Индукцијом следи $g(a+nx^2)=0$ за све $n\in\mathbb{N}$. Како је функција g неопадајућа, закључујемо да је $g\equiv 0$, што задовољава $(*)$.

   Остаје случај када је $g(a)=0$ само за $a=0$. Тада замена $y=x$ у $(*)$ даје $g(g(x)-x^2)=0$, па је $g(x)=x^2$ за све x, што такође задовољава $(*)$.

   Према томе, $f\equiv 0$ или је f било која функција таква да је $|f(x)|=|x|$ за све x.

6. Постоје два константна решења: $P(x)\equiv -1$ и $P(x)\equiv 2$. Такође, за свако $n\in\mathbb{N}$ услов задовољава полином P_n дат условом $P_n(2\cos t)=2\cos nt$. Заиста, ако је $x=2\cos t$, онда је $P_n(x^2-2)=P_n(2\cos 2t)=2\cos 2nt=(2\cos nt)^2-2=P_n(x)^2-2$.

   Доказаћемо да за дато n постоји највише један полином P степена n с траженом особином, чиме ће задатак бити решен. Претпоставимо да постоје два таква полинома, рецимо P и Q. Поређењем водећег коефицијента видимо да су оба полинома монична. Ако је $\deg(P-Q)=i<n$, онда је $\deg(P(x^2-2)-Q(x^2-2))=2i$. С друге стране, $P(x^2-2)-Q(x^2-2)=P(x)^2-Q(x)^2=(P(x)-Q(x))(P(x)+Q(x))$ има степен $n+i>2i$, што је контрадикција.

Напомена. Полиноми P_n су познати као *Чебишовљеви полиноми* и задовољавају релацију $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - \frac{1}{4}P_{n-1}(x)$.

7. Из услова задатка је $|P(0)| = 1$, па је један од полинома $P(x) \pm 1$ дељив са x. Ако је то $P(x)+1$, онда је $(P(x)+1)^{100}$ дељиво са x^{100} и тражени коефицијент је 0.

   Нека је сада $P(x) - 1$ дељиво са x. Тада је коефицијент уз x^{99} у $(P(x)-1)^{100}$ нула, па је тражени коефицијент једнак коефицијенту уз x^{99} у полиному $Q(x) = (P(x)-1)^{100} + (P(x)+1)^{100} = \sum_{i=0}^{50} \binom{100}{2i} P(x)^{2i}$. Међутим, из услова задатка следи да је $Q(x) \equiv \sum_{i=0}^{50} \binom{100}{2i}(1+x)^i \pmod{x^{100}}$, што је полином степена 50, па је његов коефицијент уз x^{99} нула.

8. Ако има чланова a_i таквих да је $a_i < i$, њиховом заменом са i разматрани збир не опада. Зато надаље сматрамо да је $a_i \geqslant i$ за све i.

   Нека је $x_0 = 1$, а за $k > 0$, нека је x_k индекс $j \geqslant a_{x_{k-1}} \geqslant x_{k-1}$ за који је $a_j - j$ максимално.

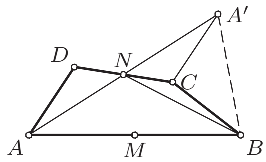
   Можемо да сматрамо да је $x_0 < x_1 < \cdots < x_k = x_{k+1}$ за неко $k \geqslant 1$. По дефиницији, за $i \geqslant x_{r-1}$ важи $a_{a_i} - a_i \leqslant a_{x_r} - x_r \leqslant x_{r+1} - x_r$. Између осталог, $a_{a_i} = a_i$ за $i \geqslant x_k$. Следи да је

$$S = \sum_{i=1}^{n}(a_{a_i} - a_i) = \sum_{r=1}^{k} \sum_{i=x_{r-1}}^{x_r - 1} (a_{a_i} - a_i) \leqslant \sum_{r=1}^{k}(x_r - x_{r-1})(x_{r+1} - x_r) = \sum_{r=1}^{k} y_r y_{r+1},$$

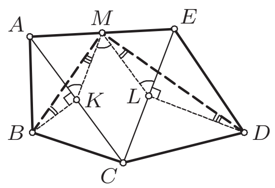
   где је $y_r = x_r - x_{r-1}$ и $\sum_r y_r \leqslant n-1$. Најзад, ако је $\max_r y_r = y_s$, онда је $S \leqslant y_s \sum_{r \neq s} y_r \leqslant y_s(n-1-y_s) \leqslant \frac{1}{4}(n-1)^2$.

   Напомена. Вредност $S = [\frac{1}{4}(n-1)^2]$ се достиже ако је $a_i = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ за $i < \frac{n}{2}$ и $a_i = n$ за $i \geqslant \frac{n}{2}$.

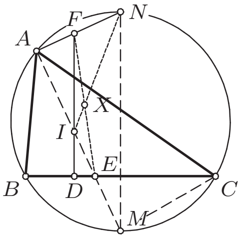
9. Не умањујући општост, сматраћемо да је $\sphericalangle BCD + \sphericalangle CDA \geqslant 180^\circ$. Нека је A' тачка симетрична тачки A у односу на N. Тада је $ADA'C$ паралелограм, па је $A'C = AD$. Како је $\sphericalangle BCN + \sphericalangle NCA' \geqslant 180^\circ$, тачка C лежи унутар троугла $A'NB$ или на страници $A'B$, па важи $AD + BC = A'C + BC < A'N + BN = AN + BN$.



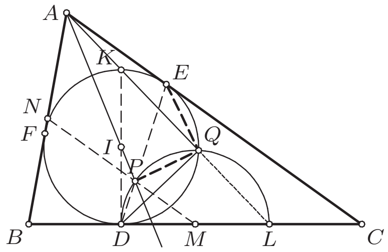
10. Нека су K и L редом средишта дужи AC и CE, тако да је четвороугао $CKML$ паралелограм. Из $\sphericalangle ABK = \frac{1}{2}\sphericalangle ABC = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle CDE = \sphericalangle DEL$ следи да је $\triangle ABK \sim \triangle DEL$. Одавде добијамо $\frac{BK}{ML} = \frac{BK}{KA} = \frac{EL}{LD} = \frac{KM}{LD}$, тј. $\frac{BK}{KM} = \frac{ML}{LD}$. Такође је $\sphericalangle BKM = \sphericalangle MLD = 90^\circ + \sphericalangle KML$, одакле следи $\triangle BKM \sim \triangle MLD$. Сада је $\sphericalangle BMD = \sphericalangle BMK + \sphericalangle LMD + \sphericalangle KML = \sphericalangle BMK + \sphericalangle KBM + \sphericalangle KML = 90^\circ$.



11. Нека је X тачка пресека правих NI и EF, а M тачка таква да је MN пречник описаног круга $\triangle ABC$. По Менелајевој теореми је $\frac{EX}{XF} = \frac{EI}{IA} \cdot \frac{AN}{NF} = \frac{EI}{IA} \cdot \frac{AM}{MI}$. Како је BI симетрала угла ABE, имамо $\frac{EI}{IA} = \frac{EB}{BA}$. С друге стране, троуглови ABE и AMC су слични, па је и $\frac{AM}{MI} = \frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BE}$. Множењем следи $\frac{EX}{XF} = 1$.



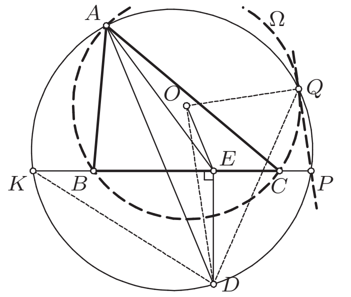
12. Означимо са N средиште странице AB. Нека су P_1 и P_2 редом подножја нормале из B и C на AI. Имамо $NA = NB = NP_1$, што значи да је $\sphericalangle NP_1A = \sphericalangle P_1AN = \sphericalangle CAP_1$, тј. $NP_1 \parallel AC$, па је P_1 на средњој линији MN. Осим тога, BDP_1I је тетиван четвороугао, па је $\sphericalangle MDP_1 = \sphericalangle P_1IB = 90^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle C = \sphericalangle CDE$, тј. P_1 је такође на правој DE. Следи да је $MD = MP_1$. Аналогно је и $MD = MP_2$. Тачка P је једна од тачака $P_{1,2}$, рецимо P_1. Дакле, P лежи на правим MN и DE.



   Нека су K и L редом тачке симетричне тачки D у односу на I и M. Познато је да је L тачка додира приписаног круга са страницом BC и да тачке A, K и L леже на истој правој. Како је $\sphericalangle KQD = 90^\circ = \sphericalangle AQD$, на тој правој лежи и тачка Q. Из $\sphericalangle DQL = 90^\circ$ следи да су тачке P и Q на кругу над пречником DL. Сада је $\sphericalangle DQP = \sphericalangle DLP = \sphericalangle KDE = \sphericalangle KQE$, тј. $\sphericalangle PQE = \sphericalangle DQK = 90^\circ$.

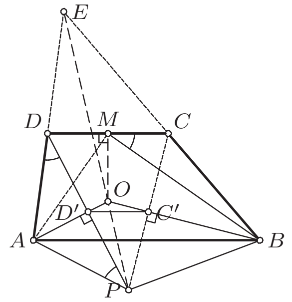
13. Пошто је $\sphericalangle EDA = \sphericalangle DAO = \frac{\sphericalangle B - \sphericalangle C}{2}$, трапез $ADEO$ је једнакокрак, па је $OD = EA = EK$.

Посматрајмо тачку $\bar{Q}$ на кругу Ω такву да су E и $\bar{Q}$ са исте стране праве DO и $\sphericalangle DO\bar{Q} = 90^\circ$. Како је $O\bar{Q} = OA = ED$, следи да је $\triangle KED \cong \triangle DO\bar{Q}$. Одатле је $\sphericalangle O\bar{Q}D = \sphericalangle EDK = 90^\circ - \sphericalangle DKE$, па како је $\sphericalangle A\bar{Q}O = 90^\circ - \frac{\sphericalangle \bar{Q}OA}{2} = 90^\circ - \frac{270^\circ - \sphericalangle AOD}{2} = \frac{\sphericalangle AED}{2} - 45^\circ = \frac{\sphericalangle AEK}{2} = 90^\circ - \sphericalangle EKA$, следи $\sphericalangle A\bar{Q}D = 180^\circ - \sphericalangle DKA$, тј. $\bar{Q}$ је на описаном кругу $\triangle AKD$. Закључујемо да је $\bar{Q} \equiv Q$.



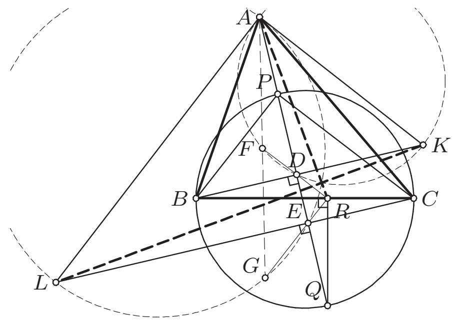
Сада је $\sphericalangle OQP = \sphericalangle OQD + \sphericalangle DQP = \sphericalangle EDK + \sphericalangle DKE = 90^\circ$, тј. QP је тангента на круг Ω.

14. Означимо са E тачку пресека правих AD и BC, а са C' и D' редом средишта дужи PC и PD. Праве AD' и BC' секу се у центру O описаног круга троугла CPD. Како је $AB \parallel CD \parallel C'D'$, по Дезарговој теореми за троуглове ADD' и BCC' тачке E, O и P су колинеарне (при чему E или O може бити бесконачна тачка).



Четвороугао $OC'PD'$ је тетиван, па је $\sphericalangle BOM = 90^\circ + \sphericalangle OBA = 90^\circ + \sphericalangle OC'D' = 90^\circ + \sphericalangle OPD' = \sphericalangle EOA$. Такође важи $\sphericalangle OAE = 90^\circ - \sphericalangle ADP = 90^\circ - \sphericalangle BMC = \sphericalangle OMB$. Следи да су троуглови OAE и OMB обртно хомотетични, а одатле имамо и $\triangle OBE \sim \triangle OMA$. Следи да је $\sphericalangle AMD = 90^\circ - \sphericalangle OMA = 90^\circ - \sphericalangle OBE = \sphericalangle BCP = \sphericalangle CPB$.

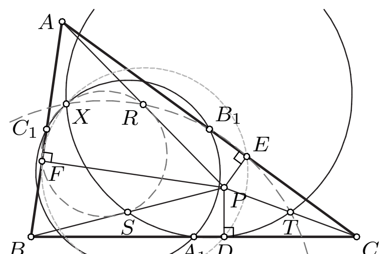
15. Нека права AP сече BK и CL редом у тачкама D и E. Праве RD и RE поново секу кругове AKD и ALE редом у тачкама F и G.



Пошто је четвороугао $QRDB$ тетиван, важи $\sphericalangle BRD = \sphericalangle BQP = \sphericalangle BCP$, тј. $RD \parallel CP$. Сада је $\sphericalangle FAP = \sphericalangle FAK - \sphericalangle PAK = \sphericalangle RDK - (\sphericalangle APB - 90^\circ) = 180^\circ - \sphericalangle QDR - \sphericalangle APB = 180^\circ - \sphericalangle QPC - \sphericalangle APB = \sphericalangle CPA - \sphericalangle APB$. Слично је и $\sphericalangle GAP = \sphericalangle CPA - \sphericalangle APB$, што значи да су тачке A, F и G колинеарне.

Сада је $\sphericalangle AGE = \sphericalangle ALE = \sphericalangle CPD = \sphericalangle FDP$, па је четвороугао $DEGF$ тетиван. Одавде је $RD \cdot RF = RE \cdot RG$, што значи да тачка R има једнаку потенцију у односу на кругове AKD и ALE. Следи да је AR радикална оса ових двају кругова. С друге стране, права која спаја центре кругова AKD и ALE је средња линија у $\triangle AKL$ и паралелна је правој KL. Одавде следи да је $AR \perp KL$.

16. Најпре ћемо доказати једно опште тврђење.

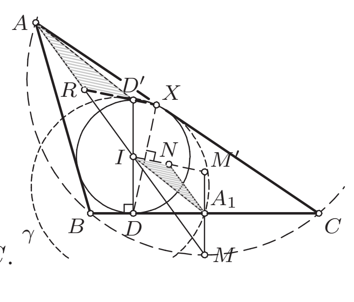


Лема. Ако је P тачка у равни троугла ABC, онда Ојлерови кругови троуглова ABC, PBC, PCA и PAB и описани круг педалног троугла тачке P имају заједничку тачку.

Доказ. Само рачун углова. Означимо са A_1, B_1, C_1 средишта страница BC, CA, AB, са D, E, F подножја нормала из P на BC, CA, AB, а са R, S, T средишта дужи AP, BP, CP, редом. Нека се кругови $A_1B_1C_1$ и A_1STD (Ојлерови у $\triangle ABC$ и $\triangle PBC$) поново секу у тачки X.

- Како је $\sphericalangle C_1XS = \sphericalangle C_1XA_1 + \sphericalangle A_1XS = \sphericalangle C_1B_1A_1 + \sphericalangle A_1TS = \sphericalangle CBA + \sphericalangle PBC = \sphericalangle PBA = \sphericalangle C_1RS$ (у оријентисаним угловима по модулу 180°), Ојлеров круг троугла PAB пролази кроз X. Аналогно и Ојлеров круг троугла PAC пролази кроз X.
- Сада је $\sphericalangle EXF = \sphericalangle EXR + \sphericalangle RXF = \sphericalangle EB_1R + \sphericalangle RC_1F = \sphericalangle ACP + \sphericalangle PBA = \sphericalangle EDP + \sphericalangle PDF = \sphericalangle EDF$ (опет оријентисани углови), па и круг DEF пролази кроз X. $\square$

По леми за $P \equiv I$, Фојербахова тачка X је на Ојлеровом кругу γ троугла BCI, чији је центар N. Према томе, ако круг уписан у $\triangle ABC$ додирује BC у тачки D, онда је X симетрично тачки D у односу на IN, па је $D'X \parallel IN$. Остаје да се докаже да је $IN \parallel RD'$.



Права AI сече описани круг $\triangle ABC$ у средишту M лука BC. Тачка M је центар описаног круга $\triangle IBC$, па је N средиште дужи IM', где је M' тачка симетрична тачки M у односу на BC.

Познато је да је тачка E додира приписаног круга наспрам A са страницом BC симетрична тачки D у односу на A_1, као и да лежи на правој AD'. Одавде следи да је $IA_1 \parallel D'E$, тј. $IA_1 \parallel AD'$. Како је $D'I \parallel A_1M$, следи да је $\triangle AD'I \sim \triangle IA_1M$. Одавде је $\frac{AD'}{AI} = \frac{IA_1}{IM}$, па је и $\frac{AD'}{AR} = \frac{A_1I}{A_1N}$ и, према томе, $\triangle AD'R \sim \triangle A_1IN$. Следи да је заиста $IN \parallel RD'$.

17. Нека су $x_1 < x_2 < \dots < x_{100}$ елементи скупа A. По услову задатка, бројеви $x_{100} - x_i$ за $i = 1, \dots, 99$ су елементи скупа A (јер бројеви $x_{100} + x_i$ то нису), па се они поклапају са $x_{99}, \dots, x_1$, тим редом. Следи да је $x_i + x_{100-i} = x_{100}$ за све i.

Даље, бројеви $x_{99} - x_i$ за $i = 2, \dots, 98$ су елементи скупа A (јер $x_{99} + x_i$ то нису) и мањи су од $x_{98} = x_{100} - x_2$, па се они поклапају са $x_{97}, \dots, x_1$. Следи да је $x_i + x_{99-i} = x_{99}$ за $i = 1, \dots, 98$.

Према томе, $x_{100} - x_{i+1} = x_{99} - x_i$ за $i = 1, \dots, 98$, тј. $x_{i+1} - x_i = x_{100} - x_{99} = x_1$, одакле добијамо $x_i = ix_1$. Закључујемо да је A скуп облика $\{d, 2d, 3d, \dots, 100d\}$.

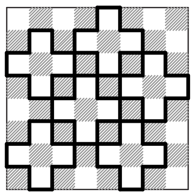
Сада из $1 \in A$ и $2 \in A$ следи да је $d = \frac{1}{i}$ за неко $i \in \{1, \dots, 50\}$, што даје 50 могућих скупова A.

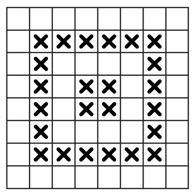
Напомена. Није тешко потпуно описати овакве скупове и ако искључимо услове да су елементи скупа A позитивни. Под претпоставком да је б.с.о. $A \subset \mathbb{Z}$ и $1 \in A$, постоје цели бројеви m и M $(m \leqslant 1 \leqslant M)$ такви да су:

- $m, m+1, m+2, \dots, M \in A$, при чему $m-1, M+1 \notin A$;
- осталих $99 + m - M$ елемената леже у интервалу $[-\frac{M-m+1}{2}, m-2]$.

18. Одаберимо (било коју) секцију S с најмањим бројем чланова и једног њеног члана по имену Радојица. Даћемо Радојици лењир и шестар, осталим члановима секције S лењире, а свима ван секције S шестаре. Свака секција у којој је Радојица има и лењир и шестар. Свака друга секција (због минималности секције S) има бар једног ученика који није у S, те он има шестар, а има и једног заједничког члана са секцијом S, који има лењир.

19. Међу четири суседа ма ког поља које није ивично бар два морају бити означена. Заиста, ако нпр. леви, горњи и десни сусед неког поља нису означени, онда правоугаоник 2×3 који их обухвата не садржи два суседна означена поља.





Нека је табла обојена црно и бело попут шаховске. По претходном, сваки од шест „крстова” на левој слици садржи бар по два означена бела поља, што даје бар 12 означених белих поља. Аналогно, бар 12 црних поља је означено, што даје укупно 24.

Пример са 24 означена поља је приказан на десној слици.

20. Означимо са x_n највећу могућу дубину n-тословног низа. Дубина низа АА...А је n. Посматрајмо зато неки низ $a_1a_2 \dots a_n$ у коме је, рецимо, $a_1 = \dots = a_{k-1} = $ А и $a_k = $ Б.

– Поднизови који почињу са А су низ „А” и поднизови облика Аv, где је v подниз низа $a_2a_3 \dots a_n$. Оваквих поднизова има највише $1 + x_{n-1}$.
– Поднизови који почињу са Б су низ „Б” и поднизови облика Бw, где је w подниз низа $a_{k+1}a_{k+2} \dots a_n$. Оваквих поднизова има највише $1 + x_{n-k} \leqslant 1 + x_{n-2}$.

Према томе, $x_n \leqslant 2 + x_{n-1} + x_{n-2}$, одакле уз услове $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$ индуктивно налазимо $x_n \leqslant F_{n+3} - 2$, где F_k означава k-ти Фибоначијев број. При томе, у случају низова АБАБАБ... и БАБАБА... све ове неједнакости постају једнакости, па је одговор $F_{n+3} - 2$.

21. Тврђење је тачно за $n = 3$, јер међу четири подскупа људи увек постоје два од којих је један подскуп другог. Тврђење доказујемо индукцијом по n: претпоставимо да оно важи за $n \geqslant 3$ људи и посматрајмо групу G са $n+1$ људи.

Фиксирајмо особу a која познаје бар некога (ако такве нема, број максималних клика је n). Свака максимална клика K у скупу $G \setminus \{a\}$ *генерише* по једну максималну клику у скупу G - наиме, или $K \cup \{a\}$ (ако a познаје целу групу K) или K (у супротном) је тада максимална клика у скупу G. По индуктивној претпоставци, генерисаних клика има највише $\frac{n(n-1)}{2}$.

Посматрајмо максималну клику K која није генерисана. Тада $a \in K$, али клика $K \setminus \{a\}$ у скупу $G \setminus \{a\}$ није максимална, тј. може се проширити неком особом $c \neq a$. Особе c и a се не познају (у супротном би се и клика $K \subset G$ могла проширити) и познају целу групу $K \setminus \{a\}$.

Претпоставимо да постоји особа $b \notin K \setminus \{a, c\}$ која познаје и a и c (различита од њих). Због максималности, постоји особа $d \in K \setminus \{a\}$ коју b не познаје, али тада (a, b, c, d) чини четворку људи која је по услову задатка забрањена. Према томе, $K \setminus \{a\}$ је скуп свих заједничких познаника особа a и c.

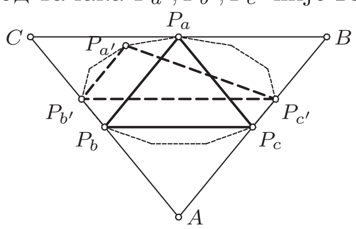
Овако свака негенерисана максимална клика одговара једној особи $c \neq a$, па негенерисаних максималних клика има највише n. Укупно има $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ максималних клика у скупу G, чиме је индуктивни корак завршен.

22. Сваки троугао површине 1 има темена на граници конвексног омотача датих тачака. Заиста, ако је $[XYZ] = 1$ и Z је строго унутар троугла $P_iP_jP_k$, онда бар један од троуглова XYP_i, XYP_j, XYP_k има површину већу од 1. Зато можемо да сматрамо да све тачке леже на граници конвексног омотача. Оне се могу означити са $P_1, P_2, \dots, P_n$ тако да је $P_1P_2 \dots P_n$ конвексан многоугао (у коме неки углови могу бити 180°).

Испитајмо како троуглови површине 1 могу бити распоређени. Нека су $P_aP_bP_c$ и $P_{a'}P_{b'}P_{c'}$ два таква троугла, при чему је $a < b < c$ и $a' < b' < c'$. Показаћемо следеће:

$(*)$ Важи или $a \leqslant a' \leqslant b \leqslant b' \leqslant c \leqslant c'$, или $a' \leqslant a \leqslant b' \leqslant b \leqslant c' \leqslant c$.

Нека су P_a, P_b и P_c редом средишта дужи BC, CA, AB. Ниједна од тачака $P_{a'}, P_{b'}, P_{c'}$ није ван $\triangle ABC$. Заиста, ако су нпр. $P_{a'}$ и P_b са различитих страна праве BC, онда је $[P_{a'}P_bP_c] > [P_aP_bP_c] = 1$. Према томе, ако $(*)$ не важи, онда један од троуглова AP_bP_c, BP_cP_a и CP_aP_b, рецимо први, не садржи ниједну од тачака $P_{a'}, P_{b'}, P_{c'}$ (чак ни на граници). Онда нпр. $\triangle CP_aP_b$ (без темена P_b) садржи две, рецимо $P_{a'}$ и $P_{b'}$. Како је $[P_{a'}P_bP_{c'}] \leqslant [P_{a'}P_{b'}P_{c'}]$, важи $\sphericalangle P_{b'}P_bP_{c'} + \sphericalangle P_bP_{c'}P_{a'} \geqslant 180^\circ$. Међутим, $\sphericalangle P_{b'}P_bP_{c'} + \sphericalangle P_bP_{c'}P_{a'} \leqslant \sphericalangle CP_bP_{c'} + \sphericalangle P_bP_{c'}P_a \leqslant 180^\circ$, уз једнакост само ако је $P_{a'} \equiv P_a$, а $P_{b'}$ и $P_{c'}$ леже на дужима CP_b и P_aP_c. Али тада је $[P_{a'}P_{b'}P_{c'}] < 1$, па ова контрадикција завршава доказ $(*)$.



Из $(*)$ следи да, ако су $P_{a_i}P_{b_i}P_{c_i}$ (где је $a_i < b_i < c_i$ и $i = 1, \dots, m$) сви троуглови површине 1 у лексикографском поретку, онда је

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_m \leqslant b_1 \leqslant b_2 \leqslant \dots \leqslant b_m \leqslant c_1 \leqslant c_2 \leqslant \dots \leqslant c_m.$$

Закључујемо да су сви збирови $a_i + b_i + c_i$ различити. Али како је $(a_m+b_m+c_m) - (a_1+b_1+c_1) \leqslant c_m - a_1 \leqslant n - 1$, тих збирова има највише n и отуда тврђење.

23. Након што Анка распореди кутије, размотримо упаривање каменчића на следећи начин. Упаримо сваки каменчић из прве кутије са по једним каменчићем из друге кутије; даље, неупарене каменчиће из друге кутије упарујемо с каменчићима из треће, па неупарене каменчиће из треће са онима из четврте, итд. Овај поступак има два могућа исхода:

(1°) *Потпуно упаривање* – сви каменчићи су успешно упарени.

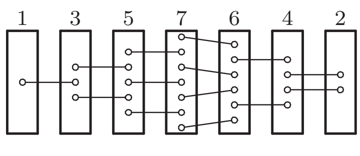
У овом случају Анка има победничку стратегију, јер има одговор на сваки Бранкин потез - довољно је да увек узме каменчић упарен с Бранкиним.

(2°) *Непотпуно упаривање* – поступак је заустављен, јер у некој k-тој кутији још има неупарених каменчића, али их у $(k+1)$-вој кутији (ако она постоји) више нема.

У овом случају Бранка има победничку стратегију. Довољно је да у свом првом потезу узме неупарен каменчић из k-те кутије, а потом на сваки Анкин потез одговори узимањем каменчића упареног са Анкиним (приметимо да, због парности, Анка никад неће узети каменчић из кутије k).

Ако је $n \equiv 1, 2 \pmod 4$, укупан број каменчића је непаран, па ниједан распоред кутија неће допуштати потпуно упаривање. Тада Бранка побеђује.

С друге стране, ако је $n \equiv 0, 3 \pmod 4$, Анка може да распореди кутије редоследом $1, 3, 5, \dots, 6, 4, 2$. Није тешко проверити да се тада добија потпуно упаривање, па Анка побеђује.



24. Потребно је из сваког троугла изабрати по једну страну тако да свака изабрана страна сече паран број других. Тада се циљ очигледно постиже идући дуж кружнице и наизменично бојећи темена изабраних страна црвено и зелено.

Скуп $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, где је x_i страна i-тог троугла, зовемо *гнездом*, а пресликавање $f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ зовемо *сплетом* гнезда X ако се x_i и $x_{f(i)}$ секу или поклапају за свако i. Ако страна x_i сече k_i других изабраних страна, гнездо X има $\prod_{i=1}^{n}(k_i + 1)$ могућих сплетова. Дакле, треба доказати да постоји гнездо са непарним бројем сплетова. Закључак ће следити ако покажемо да је укупан број парова (X, f), где је f сплет гнезда X, непаран.

Парова (X, f) у којима је f идентичко пресликавање има 3^n. С друге стране, парова (X, f) у којима пресликавање f садржи прост циклус облика $y_1 \to y_2 \to \dots \to y_k \to y_1$ $(k \geqslant 3)$ има паран број. Заиста, заменом овог циклуса обрнутим циклусом $y_1 \to y_k \to \dots \to y_2 \to y_1$ добија се други овакав пар, те се сви такви парови могу поделити у групе од по два.

Остају парови у којима f није идентичко и нема циклуса дужине веће од два. Тада постоји $1 \leqslant i_0 \leqslant n$ такво да је $f(i_0) \neq i_0$ и $f(i) \neq i_0$ за све $i \neq f(i_0)$. (Заиста, прост граф са теменима $1, 2, \dots, n$ и гранама $i \leftrightarrow f(i)$ је шума, а i_0 може бити било који лист.) Рецимо, $i_0 = 1$. Ако сада фиксирамо $X \setminus \{x_1\}$ и пресликавање f, грану x_1 можемо додати на два начина, јер тачно две стране првог троугла секу $x_{f(1)}$. Тако се и овакви парови могу поделити у групе од по два.

Све у свему, укупан број парова (X, f) је непаран.

25. Ако ниједан од бројева a, b и c није 3, онда $ab + bc + ca = \frac{(a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2}{2}$ даје остатак 0 или 2 при дељењу са 3, те тада нема решења. Зато мора бити нпр. $c = 3$, чиме једначина постаје $(a + 3)(b + 3) = 12d + 10$. Не могу и a и b бити непарни, иначе би десна страна била дељива са 4. Зато је нпр. $b = 2$ и једначина постаје $5(a + 3) = 12d + 10$. Одавде је d дељиво са 5, тј. $d = 5$ и $a = 11$. Добијамо као једино решење $\{a, b, c\} = \{2, 3, 11\}$ и $d = 5$.

26. Означимо $L(n) = \sum_{i=1}^{n} \lfloor \frac{n}{i} \rfloor^2$ и $R(n) = \sum_{i=1}^{n} (2i - 1) \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$. Доказаћемо индукцијом по n да је $L(n) = R(n)$. То је тачно за $n = 1$; нека је $n > 1$ и $L(n - 1) = R(n - 1)$. Како је $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor = \lfloor \frac{n-1}{i} \rfloor + 1$ када $i \mid n$, а $\lfloor \frac{n}{i} \rfloor = \lfloor \frac{n-1}{i} \rfloor$ у супротном, имамо

$$L(n) - L(n - 1) = \sum_{i \mid n} \left(\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor^2 - \left\lfloor \frac{n-1}{i} \right\rfloor^2 \right) = \sum_{i \mid n} \left(2 \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor - 1 \right) = \sum_{j \mid n} (2j - 1) = R(n) - R(n - 1).$$

Следи да је $L(n) = R(n)$, чиме је индуктивни корак завршен.

27. За свако $n \geqslant 3$ постоји питагорејска тројка која садржи n. Заиста, за $n = 2k$ то је $P_n = \{2k, k^2{-}1, k^2{+}1\}$, а за $n = 2k{+}1$ то је $P_n = \{2k{+}1, 2k^2{+}2k, 2k^2{+}2k{+}1\}$.

Особину из задатка записиваћемо као $P \sim Q$. За $P = \{a, b, c\}$ означавамо $kP = \{ka, kb, kc\}$. Ако је $P \sim Q$, онда је $kP \sim kQ$.

Пошто је $P \sim P_n$ за $n = \min P$, довољно је доказати да важи $P_n \sim P_3 = \{3, 4, 5\}$ за свако $n \geqslant 3$. То тврђење ћемо доказати индукцијом по n. Оно је тривијално за $n \leqslant 5$, док је $P_6 = \{6, 8, 10\} \sim \{8, 15, 17\} \sim \{9, 12, 15\} \sim \{5, 12, 13\} \sim P_3$. Дакле, тврђење важи за $n \leqslant 6$.

Нека је сада $n \geqslant 7$. Ако је $n = 2k$, по индуктивној претпоставци за k имамо $P_n \sim 2P_k \sim 2P_3 = P_6 \sim P_3$. С друге стране, ако је $n = 2k + 1$ $(k \geqslant 3)$, по индуктивној препоставци за $k + 1$ и $2k$ важи $P_n \sim 2kP_{k+1} \sim 2kP_3 \sim 3P_{2k} \sim 3P_3 = \{9, 12, 15\} \sim \{3, 4, 5\}$. Индукција је готова.

28. Нека број $n - 1$ у бинарном запису има k јединица. Тада $(n - 1)2^n$ такође има k бинарних јединица. С друге стране, како је $2^n - 1 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}$, број $2^n - n = (2^n{-}1) - (n{-}1)$ има тачно $n{-}k$ бинарних јединица. Према томе, $n(2^n{-}1) = (n{-}1)2^n + (2^n{-}n)$ има $n{-}k{+}k = n$ бинарних јединица (приметимо да се јединице у ова два броја не преклапају).

29. Са p увек означавамо прост број. За $x = p$ дата једначина даје $p \mid 2f(p)$, одакле следи да $p \mid f(p)$ за свако $p > 2$. То важи и за $p = 2$. Заиста, заменом $x = 0$ добијамо $p \mid f(p) + f(0)$, тј. $p \mid f(0)$ за све $p > 2$, па је $f(0) = 0$, те сада за $x = 0$ и $p = 2$ добијамо $2 \mid f(2)$.

С друге стране, ако $p \mid f(x)$, онда је $0 \equiv (f(x) + f(p))^{f(p)} \equiv x$, па $p \mid x$. Према томе, $p \mid f(x)$ ако и само ако $p \mid x$. Између осталог, $f(p) = p^n$ за неко $n \geqslant 0$. Сада дата једначина даје $x \equiv f(x)^{p^n} \equiv f(x) \pmod{p}$ по Фермаовој теореми, тј. $p \mid f(x) - x$ за све p, па мора бити $f(x) \equiv x$, што јесте решење.

30. Чланови обају низова су непарни. Претпоставимо да је $p > 2$ прост број и да $p \nmid a_1, \dots, a_{n-1}$ и $p \nmid b_1, \dots, b_{n-1}$, али $p \mid a_n b_n$. Приметимо да p не дели и a_n и b_n. У супротном из $p \mid a_{n-1}^2 = \frac{a_n + b_n}{4}$ следи $p \mid a_{n-1}$, противно претпоставци.

Нека $p \mid a_n$. Низ рационалних бројева $x_i = \frac{a_i}{b_i}$ задовољава релацију $x_{i+1} = \frac{2x_i^2+1}{2x_i^2-1}$, па из $x_n \equiv 0$ следи $x_{n+1} \equiv -1$ и $x_{n+2} \equiv 3 = x_2 \pmod p$. Индукцијом следи да је низ x_m периодичан по модулу p с периодом n почев од x_2, па именилац броја x_m никад није дељив са p, тј. $p \nmid b_m$.

Слично, ако је $p \mid b_n$, низ $y_i = \frac{b_i}{a_i}$ задовољава релацију $y_{i+1} = \frac{2+y_i^2}{2-y_i^2}$, па из $y_n \equiv 0 \pmod p$ следи $y_{n+1} \equiv 1 = y_1$ и индукцијом $y_{n+i} \equiv y_i \pmod p$, па именилац a_m броја y_m никад није дељив са p.

31. Нека је $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = H_n = \frac{a_n}{b_n}$, где су a_n и b_n узајамно прости. Приметимо да, ако је $2^k < n \leqslant 2^{k+1}$, тачно један од именилаца $1, 2, \ldots, n$ је дељив са 2^k, тако да $2^k \mid b_n$. Одавде је $b_n \geqslant \frac{n+1}{2}$. За $n \geqslant 4$ је $H_n > 2$, те је $a_n = H_n b_n > n + 1$.

Претпоставимо да је a_n степен простог броја за све $n > N_0$ ($N_0 > 5$) и одаберимо прост број $p > N_0$. Пошто је $2H_{p-1} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{p}{i(p-i)}$, знамо да $p \mid a_{p-1}$, па је

$$a_{p-1} = p^k \quad \text{за неко } k \in \mathbb{N}.$$

Доказаћемо индукцијом по n да је a_{p^n-1} степен броја p за свако $n \in \mathbb{N}$. Претпоставимо да то важи за $n-1$, тј. $a_{p^n-1} = p^\ell$, где је $n \geqslant 2$. Тада је $b_{p^{n-1}-1} \geqslant \frac{1}{2}p^{n-1}$ и $H_{p^{n-1}-1} > 2$, одакле је $a_{p^{n-1}-1} > p^{n-1} \geqslant p$, тј. $\ell \geqslant 2$. Како је

$$\frac{a_{p^n-1}}{b_{p^n-1}} = H_{p^n-1} = \frac{1}{p} H_{p^{n-1}-1} + \sum_{\substack{i=1 \\ p \nmid i}}^{p^n-1} \frac{1}{i} = \frac{p^{\ell-1}}{b_{p^{n-1}-1}} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ p \nmid i}}^{p^n-1} \frac{p^n}{i(p^n-i)},$$

број a_{p^n-1} је дељив са p, па је и он степен броја p, и то већи од p^n. Индукција је готова.

Одаберимо $n > k$. Како је $S = \frac{1}{p^n-1} + \frac{1}{p^n-2} + \cdots + \frac{1}{p^n-p+1} \equiv H_{p-1} \pmod{p^n}$, бројилац разломка S је дељив са p^k, а није са p^{k+1}. С друге стране, бројилац разломка H_{p^n-1} је дељив са p^n. Следи да је бројилац a_{p^n-p} разломка $H_{p^n-p} = H_{p^n-1} - S$ дељив са p^k, али не и са p^{k+1}. Самим тим мора бити $a_{p^n-p} = p^k$, што је немогуће због $a_{p^n-p} > p^n - p$.

32. Може се одабрати 7 таквих бројева. За почетак, скуп $\{1, 2, 3, 5, 7\}$ има тражено својство. Даље, по Кинеској теореми о остацима постоје непарни бројеви a и b (нпр. $(a, b) = (193, 3467)$) такви да

$$\begin{array}{llll} 3 \mid a{+}3{+}5, & 5 \mid a{+}5{+}7, & 7 \mid a{+}7{+}3, & \\ 3 \mid b{+}7{+}3, & 5 \mid b{+}3{+}5, & 7 \mid b{+}5{+}7, & a \mid a{+}b{+}7. \end{array}$$

Тада и скуп $S = \{1, 2, 3, 5, 7, a, b\}$ има тражено својство. Заиста, сваки збир три броја који укључује 1 или 2 дељив је са 1, односно 2, а такође $3 \mid a{+}b{+}3$ и $5 \mid a{+}b{+}5$.

Претпоставимо да постоји скуп S са 8 елемената. Он садржи бар шест непарних бројева већих од 1, рецимо $a_1, a_2, a_3 < a_4 < a_5 < a_6$. Највише један од збирова $a_5 + a_6 + a_i$ ($i \leqslant 4$) је дељив са a_5, а ниједан није дељив са a_6 (јер је $a_5{+}a_i$ парно и мање од $2a_6$). Према томе, за бар три индекса i, $a_i \mid a_5 + a_6 + a_i$, тј. $a_5 + a_6$ је дељиво бар трима од бројева a_i ($i \leqslant 4$).

Слично, сваки од збирова $a_4 + a_5$ и $a_4 + a_6$ је дељив бар двама од бројева a_j ($j \leqslant 3$). Без смањења општости, $a_1 a_2 \mid a_4 + a_5$ и $a_1 a_3 \mid a_4 + a_6$. При томе, збирови $a_4{+}a_5$, $a_4{+}a_6$ и $a_5{+}a_6$ немају непарних заједничких делилаца већих од 1, јер их немају ни a_4, a_5 и a_6. Дакле,

$$a_1 \nmid a_5 + a_6 \quad \Rightarrow \quad a_2 a_3 a_4 \mid a_5 + a_6 \quad \Rightarrow \quad a_2 \nmid a_4 + a_6, \quad a_3 \nmid a_4 + a_5.$$

Збир $a_2{+}a_4{+}a_6$ није дељив ни са a_2, ни са a_6 (јер $2 \mid a_2{+}a_4 < 2a_6$), па мора бити дељив са a_4, тј. $a_4 \mid a_2{+}a_6$. Слично, $a_3{+}a_4{+}a_5$ мора бити дељиво са a_4, тј. $a_4 \mid a_3{+}a_5$. Али тада је и $(a_3{+}a_5) + (a_2{+}a_6) - (a_5{+}a_6) = a_2 + a_3$ дељиво са a_4, што је немогуће јер $2 \mid a_2 + a_3 < 2a_4$.