Задаци за самосталан рад

(припремио Душан Ђукић)

Покушао сам, вероватно неуспешно, да унутар сваке области сортирам задатке од лакших ка тежим. Радите их сами и пробајте сваки. Дајем вам 10 дана за рад. Лепо се забавите.

Алгебра

1. Нека су a, b, c позитивни бројеви. Доказати или оповргнути: (а) ако је $a(b^3+c^3) = b(c^3+a^3) = c(a^3+b^3)$, онда је $a = b = c$; (б) ако је $a(a^3+b^3) = b(b^3+c^3) = c(c^3+a^3)$, онда је $a = b = c$.

2. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да важи $f(x)f(yf(x)-1) = x^2 f(y) - f(x)$ за све $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Може ли се функција $f(x) = 2^x + 3^x + 6^x$ записати као коначан збир периодичних функција?

4. Реални бројеви x, y, z задовољавају услове $|x|, |y|, |z| \geqslant 1$ и $x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Одредити највећу могућу вредност збира $x + y + z$.

5. Одредити све реалне полиноме P такве да важи $P(x^2) = P(x + \frac{1}{2})P(x - \frac{1}{2})$ за све x.

6. Доказати да су за сваки природан број n сви корени полинома $\sum_{k=0}^{n} 2^{k(n-k)} x^k$ реални.

7. Одредити најмању константу c са следећим својством: за свако $n \in \mathbb{N}$, позитивне бројеве $x_1, \dots, x_n$ и $y_k = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}$ важи $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 \leqslant c(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$.

8. Нека су $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ неконстантни низови рационалних бројева. Претпоставимо да је $(a_i - a_j)(b_i - b_j)$ цео број за све i, j. Доказати да постоји рационалан број γ такав да су $(a_i - a_j)\gamma$ и $(b_i - b_j)/\gamma$ цели бројеви за све i, j.

Геометрија

9. У оштроуглом троуглу ABC тачка D је подножје висине из A, а P и Q су подножја нормала из D на праве AB и AC, редом. Симетрале углова BDP и CDQ редом секу праве AB и AC у тачкама K и L. Доказати да центар уписаног круга троугла DPQ лежи на правој KL.

10. У простору је дато $n \geqslant 4$ тачака од којих никоје четири нису у истој равни. Дозвољено је одабрати два тачке A и B и преместити тачку A у средиште дужи AB. Ако се после неколико операција може добити исти скуп тачака, колико је најмање могуће n?

11. У троуглу ABC, тачка O је центар описаног круга, A' подножје висине из A, а X произвољна тачка на полуправој AA'. Симетрала угла BAC поново сече описани круг $\triangle ABC$ у тачки D. Тачка M је средиште дужи DX, а N је тачка на правој DX таква да је $ON \parallel AD$. Доказати да је $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAN$.

12. Круг ω додирује круг Ω изнутра у тачки T. Променљива тангента t на круг ω додирује ω у тачки S и сече круг Ω у P. Доказати да центри описаних кругова свих могућих троуглова PST леже на фиксном кругу.

13. Тачке M и N редом на непаралелним страницама AD и BC трапеза $ABCD$ су такве да дијагонале трапеза деле дуж MN на три једнака дела, али $MN \nparallel AB$. Одредити однос основица трапеза.

14. Троугао ABC је уписан у круг Ω. Уписани круг троугла ABC додирује страницу BC у тачки D. Круг γ додирује лук BAC круга Ω и дуж BC у тачки D. Ако је U центар круга γ, а I_a центар приписаног круга троугла ABC наспрам A, доказати да је $AU \parallel DI_a$.

15. За тачку D на страници BC троугла ABC, означимо са O_b и O_c центре описаних кругова троуглова ABD и ACD, редом. Претпоставимо да тачке B, C, O_b, O_c леже на кругу са центром X. Ако је H ортоцентар троугла ABC, доказати да важи $\sphericalangle DAX = \sphericalangle DAH$.

16. Уписани круг ω троугла ABC додирује страницу BC у тачки D. Права AD сече круг ω у тачки $L \neq D$. Нека је I_a центар приписаног круга ω_a наспрам A, M средиште странице BC, а N средиште дужи MI_a. Доказати да тачке B, C, N и L леже на истом кругу.

Комбинаторика

17. У институту раде поштењачине (увек говоре истину) и лажови (увек лажу). Сваки запослени је изнео две тврдње о институту: (1) овде нема ни 10 људи који раде више од мене, и (2) има бар 100 људи који примају већу плату од мене. Под претпоставком да сви раде различито и да су им свима различите плате, које су све могуће вредности броја запослених у инстутуту?

18. Дат је природан број n. Колико највише квадрата страница n са теменима у целобројним тачкама и страницама паралелним координатним осама се може одабрати тако да свака два имају тачно две заједничке тачке на ивицама?

19. У кругу је нацртано n пречника који га деле на $2n$ исечака. Произвољних n исечака је обојено црвено, а осталих n плаво. У плавим исечцима су, почев од неког, уписани бројеви $1, 2, \dots, n$ у смеру казаљке на сату. У црвеним исечцима су, почев од неког, уписани бројеви $1, 2, \dots, n$ у смеру супротном казаљци на сату. Доказати да постоји полукруг који садржи све бројеве од 1 до n.

20. Дати су природни бројеви a и b. Означимо са $f(a, b)$ број a-торки целих бројева чија сума апсолутних вредности чланова није већа од b. Доказати да је $f(a, b) = f(b, a)$.

21. На усменом испиту учествује 100 студената. Сваког студента испитује један од 25 професора. Сваки студент је подмитио највише 15 професора. Доказати да се може направити распоред испитивања тако да ниједан студент не одговара код професора кога је подмитио, а притом ниједан професор не испитује више од 10 студената.

22. У Северној Баксузији има 100 градова, од којих су неки повезани путевима тако да се из сваког града може стићи у сваки други. Укупно у земљи има 1000 путева. Влада Северне Баксузије намерава да неке путеве (можда и све) затвори тако да из сваког града полази паран број путева (и нула је паран број). На колико начина влада то може учинити?

23. На кругу су поређани бројеви $1, 2, \dots, n$ неким редом. Ако постоје два суседна броја a и b (b десно од a) тако да је $b \leqslant a - 2$, дозвољено је заменити им места. Доказати да ће се након највише $\binom{n}{3}$ оваквих замена доћи до позиције у којој даље замене нису могуће.

24. Посматрајмо квадратну решетку $n \times n$. *Квадратном путањом* називамо затворену путању (дуж линија решетке) у облику квадрата са страницама паралелним ивицама решетке. Нека је $M(n)$ најмањи број темена која треба означити тако да свака квадратна путања пролази кроз бар једну означену тачку. Доказати да је $\frac{2}{7}(n-1)^2 \leqslant M(n) \leqslant \frac{2}{7}n^2$.

Теорија бројева

25. Дато је n природних бројева. Означимо са d_k највећи заједнички делилац свих производа по k од ових бројева. Доказати да $d_k^2 \mid d_{k-1}d_{k+1}$ за $2 \leqslant k \leqslant n-1$.

26. Природни бројеви $a > b > 1$ су такви да $b^2 + a - 1 \mid a^2 + b - 1$. Доказати да $b^2 + a - 1$ није степен простог броја.

27. За природан број n посматрајмо највећи заједнички делилац d свих бројева облика $a^n + (a+1)^n + (a+2)^n$, $a \in \mathbb{N}$. Наћи све могуће вредности броја d.

28. Низ природних бројева (a_n) задовољава услове $a_{n+1} > a_n$ и $a_{2n} = 2a_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$.
(а) Доказати да за сваки прост број $p > a_1$ постоји члан овог низа који је дељив са p.
(б) Доказати да за сваки непаран прост број p постоји низ (a_n) са наведеним својствима у коме ниједан члан није дељив са p.

29. Доказати да је број $2^{2^n-1} - 2^n - 1$ сложен за све природне бројеве $n > 2$.

30. Доказати да једначина $x^7 + 7 = y^2$ нема решења у скупу целих бројева.

31. Низ природних бројева $a_1, a_2, \dots$ је такав да је $n \leqslant a_n \leqslant n + 2016$ за све n и $(a_m, a_n) = 1$ кад год је $(m, n) = 1$. Ако је p прост број и $p \mid a_n$, доказати да $p \mid n$.

32. Нека је n природан број. Ако једначина $x^2 + y^2 + z^2 = n$ има решење (x, y, z) у скупу рационалних бројева, доказати да онда она има решење и у скупу целих бројева.

Решења

1. (а) *Не.* Ако ставимо $c = a$, услов задатка постаје $a(a^3 + b^3) = b \cdot 2a^3$, што се своди на $a^3 - 2a^2b + b^3 = (a-b)(a^2 - ab - b^2) = 0$. Тако је услов задовољен за $a = c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}b$.

   (б) *Да.* Ако је $a \geqslant b \geqslant c$, онда је $a^3 + b^3 \geqslant a^3 + c^3$, па из $a(a^3 + b^3) = c(a^3 + c^3)$ следи $a = c$ и $b = c$. Слично, ако је $a \leqslant b \leqslant c$, онда је $a^3 + b^3 \leqslant b^3 + c^3$, па из $a(a^3 + b^3) = b(b^3 + c^3)$ следи $a = b$ и $a = c$.

2. Замена $x = 0$ у дату једначину $(*)$ даје $f(0)(f(yf(0) - 1) + 1) = 0$. Ако је $f(0) \neq 0$, онда је $f(yf(0) - 1) = -1$ за све y, па пошто $yf(0) - 1$ узима све реалне вредности, следи $f \equiv -1$, што није решење. Дакле, $f(0) = 0$.

   Претпоставимо да је $f(a) = 0$ за неко $a \neq 0$. За $x = a$ у $(*)$ добијамо $f(y) = 0$ за све y, тј. $f \equiv 0$ што јесте решење.

   Надаље сматрамо да је $f(x) \neq 0$ за све $x \neq 0$. За $x = y = 1$ у $(*)$ добијамо $f(f(1) - 1) = 0$, па је $f(1) = 1$. Сада за $x = 1$ једначина $(*)$ даје $f(y-1) = f(y) - 1$. Одавде је $f(yf(x) - 1) = f(yf(x)) - 1$, па $(*)$ постаје $f(x)f(yf(x)) = x^2 f(y)$. За $y = 1$ имамо $f(x)f(f(x)) = x^2$. Сада је $(x-1)^2 = f(x-1)f(f(x-1)) = (f(x) - 1)(f(f(x)) - 1) = f(x)f(f(x)) - f(x) - f(f(x)) + 1$, одакле је $f(x) + x^2/f(x) = f(x) + f(f(x)) = 2x$, а то се своди на $(f(x) - x)^2 = 0$. Према томе, $f(x) = x$ за све $x \neq 0$. Функција $f(x) \equiv x$ је такође решење.

3. *Не.* Показује се индукцијом да се ниједна ненула функција облика $f(x) = a2^x + b3^x + c6^x$ не може тако представити. Заиста, ако претпоставимо да је $f(x)$ збир n периодичних функција с периодима $T_1, \dots, T_n$, онда је функција $f_1(x) = f(x + T_1) - f(x)$ такође облика $a_1 2^x + b_1 3^x + c_1 6^x$, али је представљива у облику збира $n-1$ периодичних функција.

4. Услов задатка се може записати као $f(x) + f(y) + f(z) = 0$, где је $f(t) = t + \frac{1}{t}$. Ако су два од бројева x, y, z позитивна, нпр. $x, y > 0 > z$, онда из очигледног $f(x) + f(y) > f(x + y)$ следи $-z > x + y$, тј. $x + y + z < 0$. Надаље сматрамо да су $x, y < 0 < z$. Ако ставимо $x = -x_1$ и $y = -y_1$, услов задатка постаје $f(x_1) + f(y_1) = f(z)$, а треба максимизовати $S = z - x_1 - y_1$.

   Функција f је непрекидна, растућа и конвексна на интервалу $(1, \infty)$. Према томе, за неко $t \geqslant 1$ је $f(t) + f(1) = f(z) = f(x_1) + f(y_1) \leqslant f(x_1 + y_1 - 1) + f(1)$, и тада је $t \leqslant x_1 + y_1 - 1$. Следи да је $S \leqslant S' = z - t - 1$, а притом је

   $$S' = z - t - 1 = \frac{1}{t} + 1 - \frac{1}{z} = \frac{z-t}{zt} + 1 \leqslant \frac{z-t}{z-t+1} + 1 = \frac{S'+1}{S'+2} + 1,$$

   тј. $S'^2 \leqslant 3$. Према томе, $S \leqslant \sqrt{3}$, уз једнакост за $x = y = -1$ и $z = 2 + \sqrt{3}$.

5. Једини такви константни полиноми су $P \equiv 0$ и $P \equiv 1$. Претпоставимо да P није константан и посматрајмо његову нулу c са највећим модулом. Заменом $x = c \pm \frac{1}{2}$ добијамо да су и $(c \mp \frac{1}{2})^2$ нуле полинома P, па је $|(c \pm \frac{1}{2})^2| \leqslant |c|$. Међутим, како је $(c + \frac{1}{2})^2 - (c - \frac{1}{2})^2 = 2c$ ово је могуће једино ако је $(c + \frac{1}{2})^2 = c$ и $(c - \frac{1}{2})^2 = -c$, тј. $c = \frac{1}{2}i$. Следи да су $\pm\frac{1}{2}i$ нуле полинома P, па $x^2 + \frac{1}{4} \mid P(x)$. Стављањем $P(x) = (x^2 + \frac{1}{4})Q(x)$ у полазну једначину добијамо да и полином Q задовољава услове задатка. На овај начин индуктивно добијамо да су једина решења задатка $P \equiv 0$ и $P = (x^2 + \frac{1}{4})^n$ за $n \in \mathbb{N}_0$.

6. Случај $n \leqslant 2$ се директно проверава. За $n > 2$ посматрајмо тачке $x_i = -2^{2i-n}$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Тада је

   $$(-1)^i P(x_i) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{i-k} 2^{i^2 - (i-k)^2} = 2^{i^2} \left(1 - \frac{2}{2^{1^2}} + \frac{2}{2^{2^2}} - \frac{2}{2^{3^2}} + \cdots\right) > 0,$$

   што значи да P има нулу на сваком од n интервала (x_i, x_{i+1}), $0 \leqslant i \leqslant n-1$.

7. Доказаћемо индукцијом по n да важи

   $$y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2 + (2n+1)y_n^2 < 4(x_1^2 + \cdots + x_n^2),$$

   одакле ће следити $c \leqslant 4$. Ово тривијално важи за $n = 1$, а за индукцијски корак нам треба неједнакост $(2n+3)y_{n+1}^2 - 2ny_n^2 < 4x_{n+1}^2$. Ова неједнакост се заменом $x_{n+1} = (n+1)y_{n+1} - ny_n$ своди на $2n(2n+1)y_n^2 - 8n(n+1)y_n y_{n+1} + (4n^2 + 6n + 1)y_{n+1}^2 > 0$, што је тачно јер је то квадратни полином по y_n, y_{n+1} са дискриминантом $-8n$.

Да бисмо показали $c \geqslant 4$ и одатле $c = 4$, подесићемо $x_i = \frac{1}{\sqrt{i}}$. Тада из $x_i > 2(\sqrt{i+1} - \sqrt{i})$ следи $y_k > \frac{2(\sqrt{k+1}-1)}{k}$ и одатле

$$y_k^2 > \frac{4(k+2-2\sqrt{k+1})}{k^2} > \frac{4}{k} - \frac{8}{k\sqrt{k}} = 4x_k^2 - \frac{8}{k\sqrt{k}}.$$

Пошто је $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} < 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \leqslant 3$, из претходног сабирањем добијамо

$$y_1^2 + \cdots + y_n^2 > 4(x_1^2 + \cdots + x_n^2) - 24.$$

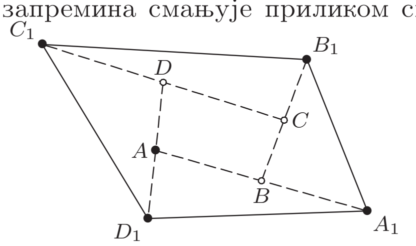
Пошто хармонијски ред $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ дивергира, тврђење одмах следи.

8. Нека је без смањења општости $a_1 = b_1 = 0$. Тада је $a_i b_i = (a_i - a_1)(b_i - b_1)$ цео број за све i. Даље, број $a_i b_j + a_j b_i = a_i b_i + a_j b_j - (a_i - a_j)(b_i - b_j)$ је такође цео за све i, j.

   Посматрајмо полиноме $A_n(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$ и $B_n(x) = b_1 + b_2 x + \cdots + b_n x^{n-1}$. Сваки коефицијент у полиному $C_n(x) = A_n(x) B_n(x)$ је збир неколико израза облика $a_i b_i$ и $a_i b_j + a_j b_i$, па полином $C_n(x)$ има целе коефицијенте. На основу Гаусове леме постоји рационалан број γ_n такав да и полиноми $\gamma_n A_n(x)$ и $B_n(x)/\gamma_n$ имају целе коефицијенте; означимо скуп свих оваквих бројева γ_n са Γ_n. Јасно је да је Γ_n коначан скуп и $\Gamma_n \supseteq \Gamma_{n+1}$ за све n, па како су сви скупови Γ_n непразни, то је и њихов пресек $\Gamma = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$. За γ можемо узети било који елемент скупа Γ.

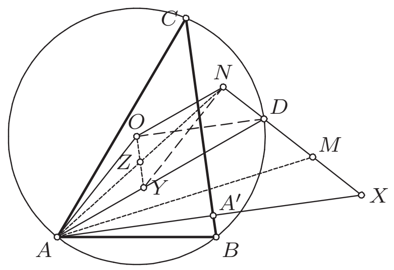
9. Нека је S центар уписаног круга $\triangle DPQ$. Како је $\sphericalangle DSP = 90^\circ + \frac{1}{2} \sphericalangle DQP = 90^\circ + \frac{1}{2} \sphericalangle BDP = \sphericalangle DKB$, четвороугао $DKPS$ је тетиван, те је $\sphericalangle DSK = \sphericalangle DPK = 90^\circ$. Слично је $\sphericalangle DSL = 90^\circ$, одакле следи тврђење.

10. Ако је $n = 4$, дате тачке чине тетраедар чија се запремина смањује приликом сваког померања, па се не може добити полазни скуп тачака. Дакле, $n \geqslant 5$.

    За $n = 5$ имамо пример. Нека су A, B, C, D некомпланарне тачке и нека су A_1, B_1, C_1, D_1 редом симетричне тачкама A, B, C, D у односу на B, C, D, A. Скуп тачака A_1, B_1, C_1, D_1, A задовољава услове. Заиста, ако тачку A померамо редом према тачкама A_1, B_1, C_1, D_1, она се премешта у тачке B, C, D, па назад у A.

11. Нека је Y тачка на AD таква да је $AONY$ паралелограм, а Z средиште дужи OY. Троуглови OND и ADX су слични (паралелне странице), па је $\frac{AD}{AX} = \frac{ON}{OD} = \frac{AY}{AO}$. Како је још $\sphericalangle OAY = \sphericalangle DAX$, троуглови AOY и AXD су слични. Одавде су и троуглови AZY и AMD слични, па је $\sphericalangle NAD = \sphericalangle DAM$, тј. $\sphericalangle BAN = \sphericalangle CAM$.

12. Означимо са O, O_1 и U редом центре кругова Ω, ω и PST. Знамо да је $OU \perp PT$ и $O_1 U \perp ST$. Следи да је $\sphericalangle OUO_1 = \sphericalangle PTS = 90^\circ - \sphericalangle USP = \sphericalangle O_1 SU = \sphericalangle OTU$, што значи да су троуглови OUO_1 и OTU слични. Сада је $OU^2 = OO_1 \cdot OT$, што је фиксно.

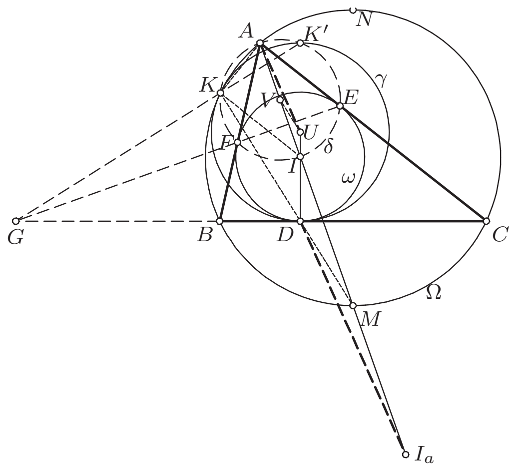
13. Нека дијагонале AC и BD редом секу дуж MN у тачкама P и Q, уз распоред $M - P - Q - N$. Ако означимо $AM = \lambda \cdot AD$ и $BN = \mu \cdot BC$, имамо

    $$\frac{AB}{CD} = \frac{P_{ABC}}{P_{BCD}} = \frac{P_{ABC}}{P_{ANC}} \cdot \frac{P_{ANC}}{P_{AMC}} \cdot \frac{P_{AMC}}{P_{ADC}} = \frac{2\lambda}{1-\mu}.$$

    Аналогно је $\frac{AB}{CD} = \frac{2\mu}{1-\lambda}$, одакле следи $\lambda(1-\lambda) = \mu(1-\mu)$, па због $\lambda \neq \mu$ мора бити $\lambda = 1 - \mu$. Одавде је $\frac{AB}{CD} = 2$.

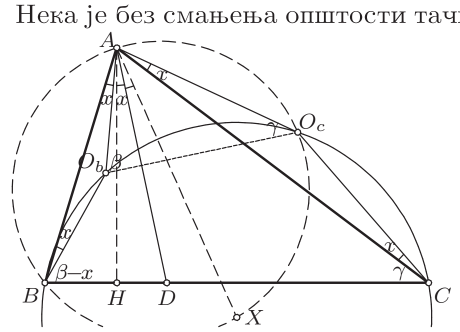
14. Нека је K тачка додира круга γ и описаног круга Ω троугла ABC. Хомотетија са центром K која слика γ у Ω слика тачку D у тачку M на Ω. Како су тангенте у D на γ и у M на Ω паралелне, тачка M је средиште лука BC који не садржи A.

Како је $\sphericalangle MBD = \sphericalangle MKB$, троуглови MBD и MKB су слични, па је $MD \cdot MK = MB^2 = MI^2$, одакле следи и $\triangle MID \sim \triangle MKI$. Ако је сада N средиште лука BAC, имамо $\sphericalangle AKI = \sphericalangle AKM - \sphericalangle IKM = \sphericalangle AKM - \sphericalangle DIM = \sphericalangle AKM - \sphericalangle AMN = \sphericalangle MKN = 90°$. Према томе, тачка K и тачке E и F у којима ω додирује AC и AB редом леже на кругу δ над пречником AI. Означимо са V центар круга δ.



Означимо са K' другу тачку пресека γ и δ. Праве BC, EF и KK' се секу у радикалном центру G кругова ω, γ и δ. Како је $\frac{BG}{GC} = \frac{BF}{FA} \cdot \frac{AE}{EC} = \frac{BD}{DC} = \frac{BM}{MC} \cdot \frac{BK}{KC} = \frac{BK}{KC}$, тачке D, K, G су на Аполонијевом кругу у односу на тачке B и C, па је $\sphericalangle DKG = 90°$. Следи да је $\sphericalangle DKK' = 90°$, тј. K' је дијаметрално супротна тачки D у кругу γ. Сада из $UV \perp KK'$ следи $UV \parallel MD$. Следи да је $\triangle IUV \sim \triangle IDM$. Најзад, како су M и V средишта дужи II_a и IA, следи $\triangle IUA \sim \triangle IDI_a$ и одатле $AU \parallel DI_a$.

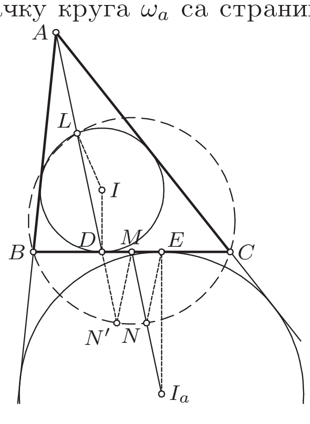
15. Углове троугла означавамо уобичајено са α, β, γ. Нека је без смањења општости тачка D између H и C. Пошто је $x = \sphericalangle O_bAB = \sphericalangle O_cAC = 90° - \sphericalangle ADB$, троуглови AO_bB и AO_cC су слични и исто оријентисани. Одавде је $\sphericalangle O_bAO_c = \alpha$ и $\frac{AO_b}{AO_c} = \frac{AB}{AC}$, па је $\triangle AO_bO_c \sim \triangle ABC$. Сада тетивност четвороугла BCO_cO_b даје $180° = \sphericalangle O_bBC + \sphericalangle CO_cO_b = (\beta - x) + \sphericalangle CO_cA - \sphericalangle O_bO_cA = (\beta - x) + (180° - 2x) - \gamma$. Следи да је $\sphericalangle HAD = x = \frac{\beta - \gamma}{3}$.



Даље, $\sphericalangle BXO_c = 2\sphericalangle BCO_c = 2(\gamma + x)$ и $\sphericalangle O_cAB = \alpha + x$, одакле добијамо $\sphericalangle BXO_c + \sphericalangle O_cAB = 2\gamma + \alpha + 3x = 180°$, тј. четвороугао $ABXO_c$ је тетиван. Сада је $\sphericalangle BAX = \sphericalangle BO_cX = 90° - \sphericalangle BCO_c = 90° - \gamma - x$ и $\sphericalangle DAX = \sphericalangle BAX - \sphericalangle BAD = (90° - \gamma - x) - (90° - \beta + x) = x = \sphericalangle HAD$.

16. Нека је I центар круга ω. Означимо са E додирну тачку круга ω_a са страницом BC, а са F тачку дијаметрално супротну њој на том кругу.

Хомотетија са центром A која слика круг ω у ω_a слика праву BC у тангенту на ω_a паралелну њој, што мора бити тангента у тачки F; дакле, тачке A, D и F су колинеарне. Пошто је $MD = ME$, за тачку N' симетричну тачки N у односу на симетралу дужи BC важи $\overrightarrow{DN'} = \overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DF}$, па и N' лежи на правој AD.



Даље, из $ID = IL$, $NI_a = NE$ и $\sphericalangle EI_aN = \sphericalangle EFD = \sphericalangle IDL$ следи да су троуглови ILD и NI_aE слични, што заједно са сличношћу троуглова ICD и CI_aE даје $DL \cdot DN' = DL \cdot NE = ID \cdot I_aE = CD \cdot CE = CD \cdot BD$. Одавде следи да тачке B, C, N' и L леже на истом кругу; на том кругу је и тачка N јер је $BCNN'$ једнакокраки трапез.

17. Из изјаве поштењачине са највећом платом следи да има бар 100 лажова (боље плаћених од њега), док из изјаве најлошије плаћеног лажова следи да лажова нема више од 100. Према томе, има тачно 100 лажова, а аналогно добијамо и да има тачно 10 поштењачина. Укупно има 110 запослених.

18. Нека је K један од посматраних квадрата. Сваки други квадрат има тачно једно теме у K; означимо то теме. Никоја два означена темена нису на истој правој паралелној некој од оса. Следи да означених темена нема више од $n - 1$, што укупно даје највише n квадрата. Пример са n квадрата чине квадрати чија су доња-лева темена тачке $(0, 0), (1, 1), \ldots, (n - 1, n - 1)$.

19. Посматрајмо два исечка са једнаким бројевима на најмањем међусобном растојању: нека су то, рецимо, плави и црвени исечак са бројем n, означени редом са A и B, при чему је B после A у смеру казаљке на сату. Бар један исечак са бројем 1 није између A и B - у супротном би исечци са бројем 1 били на мањем растојању. Следи да сви исечци строго између A и B имају исту боју, рецимо плаву. Тврдимо да полукруг који почиње са плави исечком са бројем 1 и наставља у смеру казаљке на сату садржи све бројеве. Заиста, нека су црвени бројеви на том полукругу $1, 2, 3, \ldots, k$. Тада плавих исечака на њему има $n-k$ и они су означени бројевима $n, n-1, \ldots, k+1$.

20. Природно се додефинише $f(n,0) = 1$ за $n \in \mathbb{N}$. Даље, важи $f(n,1) = f(1,n) = 2n+1$.

    За $a \geqslant 2$ посматрајмо a-точлани низ са збиром апсолутних вредности чланова b. Број таквих низова са последњим чланом k ($|k| \leqslant b$) је $f(a-1, b-|k|)$, одакле следи релација $f(a,b) = \sum_{k=-b}^{b} f(a-1, b-|k|)$. Одузимањем једнакости $f(a,b-1) = \sum_{k=1-b}^{b-1} f(a-1, b-|k|-1)$ добијамо $f(a,b) = f(a,b-1) + f(a-1,b) + f(a-1,b-1)$. Сада једноставном индукцијом следи $f(a,b) = f(b,a)$ за све $a, b \in \mathbb{N}$.

21. Индукцијом по k доказујемо следеће тврђење: Ако има n студената и m професора, при чему је сваки студент заборавио да подмити бар k професора, онда се може уредити да сваки студент одговара код професора кога није подмитио, и сваки професор испитује највише $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ студената.

    За $k = 1$ тврђење је тривијално; нека је $k > 1$. Ако сваки професор има највише $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ студената који га нису подмитили, произвољан распоред испитивача задовољава услове. Претпоставимо зато да неки професор има више од $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ студената које сме да испитује и доделимо му ма којих $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ од њих. Остаје $n - \lceil \frac{n}{k} \rceil$ студената и $m-1$ професора; по индуктивној претпоставци, за њих се може направити одговарајући распоред у коме ниједан професор не испитује више од $\lceil \frac{n - \lceil \frac{n}{k} \rceil}{k} \rceil \leqslant \lceil \frac{n}{k} \rceil$ студената, што завршава индукцију.

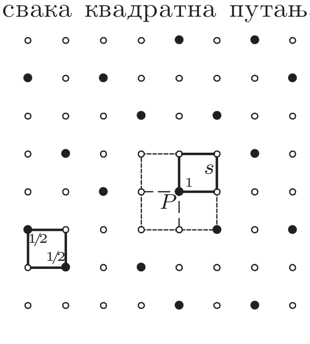
22. Допустићемо путеве који спајају неки град са самим собом, као и парове градова повезане више него једанпут. Посматрајмо неки пут s који спаја градове A и B. Замислимо државу Јужну Баксузију са 99 градова и 999 путева, која се од Северне разликује само у томе што су градови A и B спојени у један, а пут s ишчезао (сви остали путеви су сачувани). Претпоставимо да Јужна Баксузија, следећи Северну, намерава да спроведе исти такав план. Довољно је да употреби план Северне Баксузије, бришући сва спомињања пута s. С друге стране, сваки план Северне Баксузије се може добити из плана Јужне, уз евентуални додатак укидања пута s како би и из A и B излазили парни бројеви путева. На овај начин имамо бијекцију између планова Северне и Јужне Баксузије.

    Из претходног следи да се спајањем два града број могућих планова не мења. Применимо операцију спајања градова 99 пута. Остаје нам један град који је спојен сам са собом помоћу 901 путева. Ма који подскуп путева да укинемо, услов парности броја путева ће аутоматски важити. Према томе, у овом случају, а самим тим и у полазном, број могућих планова је 2^{901}.

23. За $k = 1, 2, \ldots, n-1$, означимо са x_k број бројева $l < k$ таквих да се бројеви $k+1$, l и k појављују на кругу тим редом. Приликом замене броја n са неким бројем $a \leqslant n-2$, број x_{n-1} се смањује за 1, а сви остали бројеви x_i остају исти. Такође, ако b и $a \leqslant b-2$ замене места, онда се x_{b-1} смањује за 1, док x_b расте за 1.

    Према томе, након сваке замене величина $M = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) x_k$ се смањује за тачно 1. Како је $x_k \leqslant k-1$, почетна вредност M није већа од $\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(k-1) = \binom{n}{3}$, па се не може извршити више од $\binom{n}{3}$ замена.

24. Претпоставимо да је означено $M(n)$ тачака тако да свака квадратна путања пролази кроз неку означену тачку. За произвољну 2×2 квадратну путању s, доделимо свакој означеној тачки на s вредност $\frac{1}{k}$, где је k број означених тачака на s. За сваку означену тачку P означимо са $f(P)$ збир оваквих вредности додељених тачки P по свим путањама s кроз P.



    За сваку тачку P на спољној ивици решетке важи $f(P) \leqslant 2$. Такође, ако је тачка P у унутрашњости решетке, она лежи на 4 квадратне путање 2×2, а бар једна од ове 4 путање садржи означену тачку различиту од P јер квадратна путања 3×3 која уоквирује P садржи бар једну означену тачку. Према томе, $f(P) \leqslant \frac{7}{2}$.

С друге стране, збир вредности $f(P)$ по свим означеним тачкама P једнак је $(n-1)^2$ јер свака од $(n-1)^2$ могућих путања s доприноси овом збиру са 1. Следи да је $\frac{7}{2}M(n) \geqslant (n-1)^2$, тј. $M(n) \geqslant \frac{2}{7}(n-1)^2$.

Најзад, ако означимо све тачке (x,y) за које је $y - 2x \equiv 2$ или $6 \pmod 7$, услов задатка је задовољен, а лако се проверава да је за свако n означено тачно $[\frac{2}{7}n^2]$ тачака.

25. Доказаћемо да је експонент произвољног простог броја p у $d_{k-1}d_{k+1}$ већи од одговарајућег експонента у d_k^2. Нека су експоненти броја p у датим бројевима једнаки $r_1 \leqslant r_2 \leqslant \dots \leqslant r_n$. Експонент p у d_i је $r_1 + \dots + r_i$. па су експоненти у $d_{k-1}d_{k+1}$ и d_k^2 једнаки редом $(r_1 + \dots + r_{k-1}) + (r_1 + \dots + r_{k+1})$ и $2(r_1 + \dots + r_k)$. Први израз је већи за $r_{k+1} - r_k$.

26. Претпоставимо да је $p^n = b^2+a-1 \mid a^2+b-1$, где је p прост број. Како $b^2+a-1 \mid (b^2-1)^2-a^2$, сабирањем добијамо $p^n \mid (b^2-1)^2 + (b-1) = b(b-1)(b^2+b-1)$. Како су чиниоци $b-1$, b и b^2+b-1 узајамно прости по паровима (нпр. $(b-1, b^2+b-1) = (b-1, b^2) = 1$) и $p^n < b(b-1)$, следи да $p^n \mid b^2+b-1$ и одатле $p^n \mid a-b$, што је немогуће јер $0 < a-b < p^n$.

27. Означимо $x_a = a^n + (a+1)^n + (a+2)^n$. Из $d \mid x_{d+1} - x_d = (d+3)^n - d^n \equiv 3^n \pmod d$ следи да је $d = 3^k$ за неко $k \in \mathbb{N}$.

С друге стране, ако ставимо $n = 3^{k-1}$, по Леми о дизању експонента имамо $3^k \parallel x_{a+1} - x_a = (a+3)^n - a^n$, па како је $x_{-1} = 0$, следи да $3^k \parallel x_0, x_1$ и индукцијом $3^k \mid x_n$ за $n \in \mathbb{N}$.

Према томе, могуће вредности d су сви степени тројке (већи од 1).

28. (а) Нека је n такво да је $a_{n+1} - a_n = d$ најмање могуће. Тада је $a_{2n+2} - a_{2n} = 2d$, па по избору броја d мора бити $a_{2n+2} - a_{2n+1} = a_{2n+1} - a_n = d$. Слично, индукцијом се доказује да за свако k чланови $a_{2^k n}, a_{2^k n+1}, \dots, a_{2^k(n+1)}$ чине аритметичку прогресију с разликом d. Како је $d \leqslant a_2 - a_1 = a_1 < p$, у овој аритметичкој прогресији постоји члан дељив са p ако одаберемо k тако да је $2^k > p$.

(б) Означимо са $f(x)$ највећи степен двојке не већи од x и дефинишимо $a_n = np + f(n)$. Овај низ је растући и, пошто је $f(2n) = 2f(n)$, важи $a_{2n} = 2a_n$; с друге стране, $p \nmid f(n)$, па самим тим $p \nmid a_n$ за све n.

29. За парно n важи $a_n = 2^{2^n-1} - 2^n - 1 \equiv 2 - 1 - 1 = 0 \pmod 3$. Даље, за $n \equiv 1 \pmod 4$ $(n > 1)$ је $2^{2^n-1} \equiv 2^3$ и $2^n \equiv 2 \pmod 5$, па $5 \mid a_n$.

Нека је k природан број такав да $2^k \parallel n+1$. Тврдимо да је тада a_n дељиво са $2^{2^k}+1$. Заиста, $2^{2^k}+1 \mid 2^{n+1}+1$, па је $2a_n = 2^{2^n} - 2^{n+1} - 2 \equiv 1 + 1 - 2 = 0 \pmod{2^{2^k}+1}$.

30. Провером по модулу 4 добијамо да мора бити $n \equiv 1 \pmod 4$; тада $2 \mid y$.

Напишимо полазну једначину у облику $(x+2)A = x^7 + 2^7 = y^2 + 11^2$, где је $A = x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 64$. Пошто $x+2 \mid y^2 + 11^2$ и $x+2 \equiv 3 \pmod 4$, мора бити $(y, 11) > 1$, тј. $11 \mid y$, а такође и $11 \mid x+2$ и $11 \mid A$. Међутим, $A \equiv 7 \cdot 64 \pmod{x+2}$, па $11 \mid 7 \cdot 64$, контрадикција.

31. Означимо са $g(n)$ најмањи прост делилац броја a_n, а са P_n скуп свих простих бројева не већих од n. Посматрајмо било који број N такав да $2017! \mid N-1$. Како је $a_p \leqslant p + 2016 < N + 2016$ за $p \in P_N$, важи $g(p) \in P_{N+2016} = P_N$. Притом је по услову задатка $g(p) \neq g(q)$ кад год су p и q различити прости бројеви, па је g бијекција у скупу P_N. Пошто то важи за све N, g је бијекција у скупу P свих простих бројева.

Нека је $p \in P$ и $k \in \mathbb{N}$. Ако је q било који прост делилац броја a_{p^k}, по претходном постоји $r \in P$ такав да је $g(r) = q$, али тада из $q \mid (a_r, a_{p^k})$ следи $(r, p^k) > 1$, тј. $r = p$. Дакле, a_{p^k} је степен простог броја $g(p)$.

Претпоставимо сада да је $g(p) = q \neq p$ за неко $p \in P$. Одаберимо $k \in \mathbb{N}$ тако да је $q^k > 2017$ и $n \in \mathbb{N}$ тако да $\varphi(q^k) \mid n$ и $p^n > q^k$. Пошто је $p^n \equiv 1 \pmod q^k$, ниједан од бројева $p^n, p^n+1, \dots, p^n+2016$ није дељив са q^k. Тако $q^k \nmid a_{p^n}$, па a_{p^n} није степен броја q, што је немогуће. Следи да је $f(p)$ степен броја p,

Најзад, ако $p \mid a_n$, онда је $(a_n, a_p) > 1$, а одатле је $(p, n) > 1$, тј. $p \mid n$.

32. Посматрајмо решење $(x, y, z) = (\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d})$ дате једначине $(a, b, c \in \mathbb{Z},\ d \in \mathbb{N})$ у коме је d минимално. Претпоставимо да је $d > 1$. Постоје цели бројеви p, q, r такви да је $|x-p|, |y-q|, |z-r| \leqslant \frac{1}{2}$. Нека права кроз тачке $A(x, y, z)$ и $B(p, q, r)$ сече сферу $x^2+y^2+z^2 = n$ у тачки $A'(x', y', z') \neq A$. Доказаћемо да и тачка A' има рационалне координате и да је њихов заједнички именилац мањи од d.

Нека је $\overrightarrow{AA'} = t \cdot \overrightarrow{AB}$, $t \neq 0$. Тада је $n = |A'|^2 = (t\overrightarrow{B} - (t-1)\overrightarrow{A})^2 = (t-1)^2 n - 2t(t-1)\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} + t^2|B|^2$, одакле налазимо

$$t = \frac{2(n - \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B})}{n + |B|^2 - 2\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{A'} = \overrightarrow{A} + t\overrightarrow{AB} = \frac{2(dn - d\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B})\overrightarrow{B} - (n - |B|^2) \cdot d\overrightarrow{A}}{d(n + |B|^2) - 2d\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}.$$

У горњем изразу за $\overrightarrow{A'}$ бројилац и именилац су цели јер су то и координате вектора $d\overrightarrow{A}$. Међутим, именилац $d(n + |B|^2) - 2d\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = d \cdot AB^2$ није већи од $\frac{3}{4}d$, што даје жељену контрадикцију.