Задаци за самосталан рад

(припремио Душан Ђукић)

Покушао сам, вероватно неуспешно, да унутар сваке области сортирам задатке од лакших ка тежим. Радите их сами (али не на часовима) и пробајте што више различитих задатака, без предрасуда о себи, мени или задацима. У недељу и понедељак проверавађу колико је ко од вас решио. Лепо се забавите.

Алгебра

1. Дефинишимо низ са $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_{n+1} = 1 - x_1 x_2 \cdots x_n$ за $n \geqslant 1$. Доказати да је $x_{100} > 0,99$.
2. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи $f(f(x)+y) = 2x + f(f(y)-x)$.
3. Ако су $0 < a < b < c$ реални бројеви и $k > 1$, доказати да је $a^k b + b^k c + c^k a < ab^k + bc^k + ca^k$.
4. Ако су a, b, c позитивни бројеви и $a+b+c=3$, доказати да важи
$$\frac{a^2(b+1)}{ab+a+b} + \frac{b^2(c+1)}{bc+b+c} + \frac{c^2(a+1)}{ca+c+a} \geqslant 2.$$
5. Наћи све функције $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ такве да је $f(x + f(y + f(z))) = y + f(x+z)$ за све $x, y, z \in \mathbb{Q}$.
6. Кубни полином облика $x^3 + px + q$ са целим коефицијентима има три различита ирационална корена x_1, x_2 и x_3. Одредити најмању могућу вредност збира $|x_1| + |x_2| + |x_3|$.
7. Дати су природни бројеви m и n, при чему $2 \mid m$. Доказати да за сваки полином $P(x)$ са реалним коефицијентима степена m постоји полином $Q(x)$ са реалним коефицијентима степена n такав да је полином $Q(P(x))$ дељив са $Q(x)$ ако и само ако је n парно.
8. Дат је природан број $n \geqslant 2$. Доказати да за све реалне бројеве $a_1 < a_2 < \cdots < a_{2n}$ важи неједнакост
$$\sum_{\substack{i<j \\ 2 \mid i-j}} a_i a_j < \frac{n-1}{4n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2n})^2.$$

Геометрија

9. Уписани круг тангентног петоугла $ABCDE$ додирује страницу BC у K. Ако је $AB = BC = CD$, доказати да је $\sphericalangle EKB = 90^\circ$.
10. У тетивном петоуглу $ABCDE$ је $AB = BC$ и $CD = DE$. Дужи AD и BE се секу у P, а дуж BD сече CA и CE у Q и T, редом. Доказати да је троугао PQT једнакокраки.
11. Круг са центром I додирује странице BC, CA и AB троугла ABC у тачкама D, E, F, редом. Тежишна дуж из темена A сече EF у K. Доказати да K лежи на правој DI.
12. Дат је трапез $ABCD$ са $AB \parallel CD$. Ако су R_1 и R_2 полупречници описаних кругова троуглова ACD и BCD, доказати да је $4R_1R_2 \geqslant AB^2$.
13. Тачка D на страници AC троугла ABC је таква да је $BD = AC$. Тачка F унутар троугла је таква да је $\sphericalangle ACF = \frac{1}{2}\sphericalangle ADB$ и $\sphericalangle CAF = \frac{1}{2}\sphericalangle CDB$. Права BF сече AC у E. Доказати да је $AD = CE$.
14. Нека је P произвољна тачка у унутрашњости оштроуглог троугла ABC, а A_1, B_1, C_1 редом тачке симетричне тачки P у односу на странице BC, CA, AB. Доказати да тежиште троугла $A_1B_1C_1$ лежи унутар троугла ABC.
15. У неједнакокраком троуглу ABC, уписани круг Γ са центром I додирује странице BC, CA, AB редом у тачкама A_1, B_1, C_1. Тачка M је средиште дужи B_1C_1. Права AA_1 поново сече Γ у A_2, а A_1M и A_2M поново секу Γ у P и Q. Доказати да су тачке A, P и Q колинеарне.
16. Кроз пресек дијагонала конвексног четвороугла повучена је произвољна права. Доказати да дужина дела праве унутар четвороугла није већа од дужине бар једне његове дијагонале.

Комбинаторика

17. На острву живи 100 лажова и 100 поштењачина. Свако има бар једног друга. Поштењачине никад не лажу, а лажови увек лажу. Једног дана, 100 житеља острва је рекло “сви моји другови су лажови” а осталих 100 “сви моји другови су поштењачине”. Колико најмање може бити парова другова, од којих је један лажов, а други поштењачина?

18. На састанку комисије за СМО, 40 чланова комисије бира први задатак за СМО са списка од 30 задатака. Договорили су се да буде изабран задатак који уме да реши бар половина чланова комисије, али не сви. Испоставило се да је сваки члан комисије решио тачно 26 задатака, при чему никоја два нису решила исти скуп задатака. Доказати да они могу наћи одговарајући задатак.

19. Наћи све природне бројеве n за које се квадрат странице n може исећи на квадрате страница 2 и 3.

20. Конвексан многоугао $\mathcal{M}$ се слика у себе при ротацији за 90°. Доказати да постоје два круга са односом полупречника $\sqrt{2}$ таква да је један садржан у многоуглу $\mathcal{M}$, а други садржи $\mathcal{M}$.

21. У Пуерто Параноји оперише 16 тајних агената, од којих сваки прати бар једног од осталих, али никоја двојица не прате један другог. Познато је да се ма којих 10 агената може поређати у низ тако да први прати другог, други прати трећег, итд, и десети прати првог. Доказати да и ма којих 11 агената могу да се овако поређају у низ.

22. Дечаци и девојчице, којих је укупно n^2, распоређени су у квадрат $n \times n$. За сваку врсту или колону, као и за сваку од $2(2n-1)$ дијагонала, знамо колико у њој има девојчица. За које n су нам ови подаци увек довољни да одредимо позиције свих девојчица? За које позиције можемо увек са сигурношћу рећи да ли су на њима девојчице или дечаци?

23. Скуп свих дијагонала правилног $(4n+3)$-угла ($n \in \mathbb{N}$) подељен је на k (дисјунктних) подскупова $S_1, S_2, \ldots, S_k$ тако да, за све $1 < i < j < k$, бар једна дијагонала у S_i сече бар једну дијагоналу у S_j (у унутрашњој тачки). Одредити највеће могуће k.

24. Дат је природан број n. Доказати да се скуп $\{1, 2, \ldots, n\}$ може поделити на m (дисјунктних) подскупова са једнаким збировима елемената ако и само ако је m делилац броја $\frac{n(n+1)}{2}$ не већи од $\frac{n+1}{2}$.

Теорија бројева

25. Дат је 25-цифрен број без деветки у децималном запису. Доказати да можемо да увећамо две његове једнаке цифре за 1 тако да добијемо број који није дељив са 7.

26. Природни бројеви $x, y > 1$ су такви да је $x^2 + xy - y$ потпун квадрат. Доказати да је $x + y + 1$ сложен број.

27. Природни бројеви a, b, c, d и n су такви да важи $a + c < n$ и $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} < 1$. Доказати да је $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} < 1 - \frac{1}{n^3}$.

28. Доказати да за свако $\alpha < \frac{4}{3}$ постоје рационалан број $r > \alpha$ и ирационалан број xтакви да су $x^2 - rx$ и $x^3 - rx$ рационални.

29. Одредити све просте бројеве p и q за које је $p^{q+1} + q^{p+1}$ потпун квадрат.

30. Природни бројеви n, m, k су такви да су бројеви $5^n - 2$ и $2^k - 5$ дељиви са $5^m - 2^m$. Доказати да су n и m узајамно прости.

31. Дат је природан број $n > 1$. Одредити највеће m за које је могуће изабрати n бројева из скупа $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ тако да је НЗС свака два већи или једнак m.

32. Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ постоје природни бројеви $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ такви да је $\varphi(a_1) > \varphi(a_2) > \cdots > \varphi(a_n)$.

Решења

1. Имамо $1-x_{n+1}=x_n(x_1x_2\cdots x_{n-1})=x_n(1-x_n)$, дакле $x_{n+1}=f(x_n)$, где је $f(x)=x^2-x+1$. Доказујемо индукцијом по n да је $x_n\geqslant\frac{n}{n+1}$. То важи за $n=1$; претпоставимо да важи за n. Функција $f(x)=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ је растућа на $[\frac{1}{2},\infty)$, па је $x_{n+1}=f(x_n)\geqslant f(\frac{n}{n+1})=1-\frac{n}{n^2+2n+1}>1-\frac{1}{n+2}=\frac{n+1}{n+2}$, што је крај доказа. У нашем случају, $x_{100}\geqslant\frac{100}{101}>0,99$.

2. Приметимо да је функција f "на". Заиста, замена $y=-f(x)$ даје $f(f(-f(x))-x)=f(0)-2x$, што узима све реалне вредности.

   Конкретно, постоји c за које $f(c)=0$. Заменом $x=c$ у полазну једначину добијамо $f(y)=2c+f(f(y)-c)$. Како $z=f(y)-c$ узима све реалне вредности, следи $f(z)=z-c$ за све $z\in\mathbb{R}$. Оваква функција задовољава полазну једначину: $f(f(x)+y)=2x+f(f(y)-x)=x+y+2c$.

3. Тражена неједнакост је еквивалентна са $(c^k-b^k)(b-a)>(b^k-a^k)(c-b)$, тј. са $\frac{c^k-b^k}{c-b}>\frac{b^k-a^k}{b-a}$. Притом је $\frac{c^k-b^k}{c-b}>kb^{k-1}$, јер је то еквивалентно са $c^k+(k-1)b^k>kb^{k-1}c$ што важи по тежинској АГ неједнакости; аналогно је $\frac{b^k-a^k}{b-a}<kb^{k-1}$.

   Напомена. По теореми о средњој вредности за функцију $f(x)=x^k$, $\frac{f(c)-f(b)}{c-b}=f'(\xi_1)$ и $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi_2)$ за неке $a<\xi_2<b<\xi_1<c$. Онда је $f'(\xi_1)=k\xi_1^{k-1}>f'(\xi_2)=k\xi_2^{k-1}$.

4. Напишимо $\frac{a^2(b+1)}{ab+a+b}=a-\frac{ab}{ab+a+b}$. По неједнакости између средина је $\frac{ab}{ab+a+b}\leqslant\frac{ab}{3\sqrt[3]{a^2b^2}}=\frac{\sqrt[3]{ab}}{3}\leqslant\frac{a+b+1}{9}$, тј. $\frac{a^2(b+1)}{ab+a+b}\geqslant\frac{8a-b-1}{9}$. Сабирањем са двема аналогним једнакостима добијамо тражену. Једнакост важи само за $a=b=c=1$.

5. Заменом $x=z=0$ у полазну једначину $(*)$ добијамо $f(f(y+f(0)))=y+f(0)$, тј. $f(f(x))=x$ за све x; одавде следи да је f ињективна, па из $f(x+f(y+f(z)))=f(z+f(y+f(x)))=y+f(x+z)$ следи $x+f(y+f(z))=z+f(y+f(x))$. Одавде заменом z са $f(z)$ добијамо $f(y+z)=f(z)+f(y+f(x))-x$. За $x=b=f(0)$ ова једнакост се своди на $f(y+z)=f(y)+f(z)-b$. Следи да је функција $g(t)=f(t)-b$ адитивна (тј. $g(y+z)=g(y)+g(z)$), па је $g(t)=at$ за неку константу k, тј. $f(t)=at+b$. Убацивањем у $(*)$ добијамо $(a,b)=(1,0)$ или $a=-1$, тј. $f(x)=x$ или $f(x)=b-x$ $(b\in\mathbb{R})$, што јесу решења.

   Напомена. Функционална једначина $g(y+z)=g(y)+g(z)$ се зове *Кошијева*. Њена једина решења на $\mathbb{Q}$ су облика $g(x)=ax$, али на $\mathbb{R}$ има и нелинеарна (крајње дивља) решења.

6. Ако полином $P(x)=x^3+px+q$ има три реалне нуле, онда $P'(x)=3x^2+p$ има реалне нуле између којих је бар једна нула полинома P. Нуле полинома P' су $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$. Дакле, $p<0$ и $P(\sqrt{-\frac{p}{3}})P(-\sqrt{-\frac{p}{3}})<0$, што се своди на $4p^3+27q^2<0$, тј. $|q|<\sqrt{-\frac{4p^3}{27}}$.

   Нека су $r_1<r_2<r_3$ нуле полинома P. Важи $r_1+r_2+r_3=0$, па заменом полинома $P(x)$ са $-P(-x)$ по потреби можемо да сматрамо да је $q<0$ и $r_1<r_2<0<r_3$. Тада је $|r_1|+|r_2|+|r_3|=2r_3$. Тражимо најмању могућу вредност $2r_3$. Као прво, $P(1)=1+p+q<0$, па је $r_3>1$. Претпоставимо да је $r_3<2$, тј. $8+2p+q>0$. Уз услов $4p^3+27q^2<0$, једине могућности су полиноми x^3-2x-1 и x^3-3x-1, од којих први отпада јер има нулу -1. У другом случају је $2r_3=4\cos\frac{\pi}{9}$.

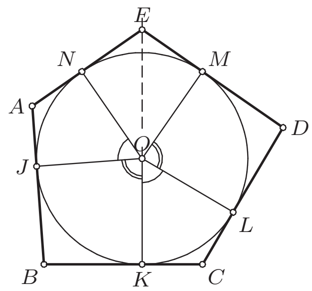
   Напомена. Израз $-4p^3-27q^2=(r_1-r_2)^2(r_1-r_3)^2(r_2-r_3)^2$ је *дискриминанта* полинома P.

7. Ставимо $P(x) = x^m + x + 1$. Претпоставимо да је $\deg Q = n$ непарно. Полином Q има бар једну реалну нулу. Нека је $Q(x) = (x - a_1)\cdots(x - a_k)R(x)$, где су $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_k$ реални, а полином $R(x)$ нема реалних нула. Тада је $Q(P(a_1)) = (P(a_1) - a_1)\cdots(P(a_1) - a_k)R(P(a_1)) \neq 0$ јер је $P(a_1) > a_1 \geqslant a_i$ и $R(P(a_1)) \neq 0$. Дакле, $Q(P(x))$ није дељиво са $x - a_1$, а самим тим ни са $Q(x)$.

   Остаје да покажемо да за парно n полином $Q(x)$ постоји. Ако $P(x) - x$ има реалну нулу a, довољно је узети $Q(x) = (x - a)^n$. Ако $P(x) - x$ нема реалних нула, посматрајмо две његове комплексне нуле a и $\bar{a}$ и узмимо $Q(x) = ((x - a)(x - \bar{a}))^{n/2} \in \mathbb{R}[x]$.

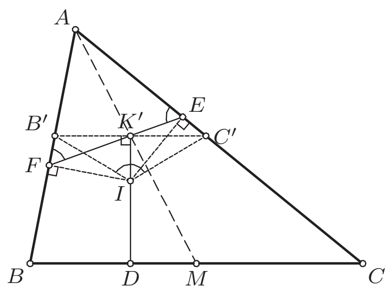
8. Посматрајмо полином $P(x) = (x - a_1)(x - a_3)\cdots(x - a_{2n-1}) + (x - a_2)(x - a_4)\cdots(x - a_{2n})$. Све његове нуле су реалне и различите јер је $P(a_{2n}) > 0 > P(a_{2n-2}) < 0 < P(a_{2n-4}) > \cdots$. Означимо те нуле са $b_1, b_2, \dots, b_n$. По Вијетовим формулама је $\sum_{i=1}^{2n} a_i = 2\sum_{j=1}^{n} b_j$ и $\sum_{i<j, 2|i-j} a_i a_j = 2\sum_{i<j} b_i b_j$. Неједнакост између квадратне и аритметичке средине даје $\sum_{i<j} b_i b_j < \frac{n-1}{2n}(\sum_i b_i)^2$, одакле следи тврђење.

9. Нека је O центар круга, а J, L, M, N редом додирне тачке са AB, CD, DE, EA. Из услова задатка следи $AN = AJ = CK = CL$ и $BJ = BK = DL = DM$, одакле је $ANOJ \cong CKOL$ и $BJOK \cong DLOM$. Како је још и $EOM \cong EON$, имамо $\sphericalangle EOK = \sphericalangle EON + \sphericalangle NOJ + \sphericalangle JOK = \sphericalangle EOM + \sphericalangle LOK + \sphericalangle MOL$, одакле је $\sphericalangle EOK = 180^\circ$, тј. $EO \perp BC$.



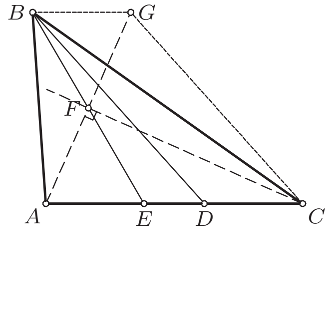
10. Из $\sphericalangle PET = \sphericalangle BEC = \sphericalangle ADB = \sphericalangle PTC$ следи да су тачке P, E, D, T на кругу, па је $\sphericalangle PTQ = \sphericalangle PED = \sphericalangle BED$. Аналогно је $\sphericalangle PQT = \sphericalangle BAD = \sphericalangle BED$, па је $PQ = PT$.

11. Нека DI сече EF у K' и нека права кроз K' паралелна са BC сече AB у B' и AC у C'. Тачке F, B', I, K' су на кругу над пречником IB', па је $\sphericalangle B'IK' = \sphericalangle AFK'$. Аналогно је $\sphericalangle C'IK' = \sphericalangle AEK' = \sphericalangle AFK'$. Следи да су троуглови $B'IK'$ и $C'IK'$ подударни, па је $B'K' = C'K'$. То значи да K' лежи на тежишној дужи кроз A, па је $K' \equiv K$.

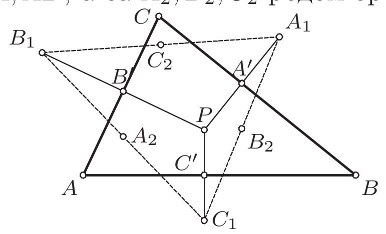


12. Полупречник описаног круга $\triangle XYZ$ означавамо са R_{XYZ}. Имамо $2R_{ACD} = \frac{AC}{\sin\sphericalangle ADC}$ и $2R_{BCD} = \frac{BD}{\sin\sphericalangle BCD}$, па је
$$4R_{ACD}R_{BCD} = \frac{AC \cdot BD}{\sin\sphericalangle ADC \sin\sphericalangle BCD} = \frac{AC \cdot BD}{\sin\sphericalangle ABC \sin\sphericalangle BAD} = 4R_{ABC}R_{ABD} < AB^2$$
јер су $2R_{ABC}, 2R_{ABD} \leqslant AB$.

13. Из $\sphericalangle ACF + \sphericalangle CAF = \frac{1}{2}\sphericalangle ADB + \frac{1}{2}\sphericalangle CDB = 90^\circ$ добијамо $\sphericalangle AFC = 90^\circ$. Нека је G тачка симетрична тачки A у односу на F. Тада је $\sphericalangle ACG = 2\sphericalangle ACF = \sphericalangle ADB$, па је $CG \parallel BD$. Такође је $CG = AC = BD$, па је $BDCG$ паралелограм и $BG = CD$. Сада су троуглови AFE и GFB подударни јер имају једнаке углове и $AF = FG$. Одавде је $AE = BG = CD$, тј. $AD = CE$.



14. Означимо са A', B', C' редом пројекције P на BC, CA, AB, а са A_2, B_2, C_2 редом средишта дужи B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Како је $B'A_2 \parallel PC_1 \perp AC'$ и аналогно $C'A_2 \perp AB'$, тачка A_2 је ортоцентар троугла $AB'C'$. При томе је троугао $AB'C'$ оштроугли ($\sphericalangle AB'C' < \sphericalangle AB'P = 90^\circ$ итд.) па је A_2 у његовој унутрашњости. Дакле, A_2 је унутар троугла ABC; аналогно су и B_2 и C_2 унутар $\triangle ABC$, а тежиште троугла $A_1B_1C_1$ је унутар троугла $A_2B_2C_2$.



15. Како је $AM \cdot AI = AB_1^2 = AA_1 \cdot AA_2$, тачке M, I, A_1 и A_2 су на истом кругу, па је $\sphericalangle QMI = \sphericalangle IA_1A_2 = \sphericalangle IA_2A_1 = \sphericalangle IMA_1$. Следи да су праве A_2Q и PA_1 симетричне у односу на AI, па је и права PQ симетрична правој A_2A_1 и пролази кроз A.

<u>*Напомена.*</u> Тврђење важи и ако је M произвољна тачка на B_1C_1. Заиста, ако AP сече Γ у Q', онда се праве A_1P и A_2Q' секу на полари тачке $A = PQ' \cap A_1A_2$ у односу на Γ, а то је баш права B_1C_1, па је $Q' \equiv Q$.

16. Нека права кроз пресек O дијагонала AC и BD четвороугла $ABCD$ сече AB у X и CD у Y. Означимо $\sphericalangle AOX = \sphericalangle COY = \alpha$ и $\sphericalangle BOX = \sphericalangle DOY = \beta$. Имамо $S_{AOX} = \frac{1}{2} OA \cdot OX \sin\alpha$, $S_{BOX} = \frac{1}{2} OB \cdot OX \sin\beta$ и $S_{AOB} = S_{AOX} + S_{BOX} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin(\alpha+\beta)$, одакле добијамо

$$OX = \frac{OA \cdot OB \sin(\alpha+\beta)}{OA\sin\alpha + OB\sin\beta} \leqslant \frac{OA \cdot OB(\sin\alpha + \sin\beta)}{OA\sin\alpha + OB\sin\beta} \leqslant \frac{OA\sin\beta + OB\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta}.$$

Слично важи $OY \leqslant \frac{OC\sin\beta + OD\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta}$, па је $XY \leqslant \frac{AC\sin\beta + BD\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta} \leqslant \max\{AC, BD\}$.

17. Ако је бар 50 поштењачина рекло "сви моји другови су лажови", онда имамо бар 50 тражених парова. У супротном, 50 лажова је рекло (и лагало) "сви моји другови су лажови"; свако од њих се у ствари дружи са неким поштењачином, те опет имамо 50 парова.

Покажимо да је могуће да има тачно 50 парова. Нека су $p_1, \dots, p_{100}$ поштењачине и $l_1, \dots, l_{100}$ лажови, и нека p_i и l_i друже ($i = 1, \dots, 50$), при чему ни један ни други немају више другова. Поштењачине $p_{51}, \dots, p_{100}$ се друже само између себе, као и лажови $l_{51}, \dots, l_{100}$. Тада ће за $i = 1, \dots, 50$ сви l_i и p_i рећи "сви моји другови су лажови", а за $i = 51, \dots, 100$, l_i и p_i ће рећи "сви моји другови су поштењачине".

18. Претпоставимо супротно, тј. да је сваки задатак или решило свих 40 чланова комисије, или највише 19. Унесимо у поље i-те врсте и j-те колоне таблице 1 ако је i-ти члан комисије решио j-ти задатак. у таблици укупно има $40 \times 26 = 1040$ јединица. С друге стране, ако има k задатака које су сви чланови решили, преосталих $30-k$ задатака је решило највише 19 њих, па јединица има највише $40k + 19(30-k) = 21k + 570$, одакле следи да је $k \geqslant 23$, тј. бар 23 задатка су сви решили. Од преосталих 7, сваки члан комисије је решио три, а трочлани скупови који одговарају решеним задацима чланова су различити. Али тих трочланих подскупова нема више од $\binom{7}{3} = 35$, контрадикција.

19. Ако $2 \mid n$ или $3 \mid n$, то је очигледно могуће.

Покажимо да у осталим случајевима није могуће. Нека је n непарно. Поделимо квадрат на јединичне квадрате и обојимо сваку парну врсту плаво, а сваку непарну црвено. Разлика црвене и плаве површине у квадрату $n \times n$ је n. С друге стране, разлика црвене и плаве површине у сваком 2×2 или 3×3 квадрату је $-3, 0$ или 3. Следи да n мора бити дељиво са 3.

20. Нека је O центар ротације, а A_1 једно од темена многоугла на максималном растојању од O. Круг са центром O и полупречником OA_1 садржи $\mathcal{M}$. При ротацији око O за 90°, A_1 се слика у A_2, A_2 у A_3, а A_3 у A_4; $A_1A_2A_3A_4$ је квадрат који је цео садржан у $\mathcal{M}$, па је и његов уписани круг, полупречника $\frac{OA_1}{\sqrt{2}}$ садржан у $\mathcal{M}$.

21. Двојицу агената зовемо *ортацима* ако се не прате међусобно. Ако неки агент прати 6 или мање других агената, избацивањем њих добијамо 10 агената који се не могу поређати у низ. Према томе, свако прати бар 7 агената. Аналогно, свако је праћен од стране бар 7 агената. Следи да сваки агент има највише једног ортака.

Посматрајмо произвољних 11 агената. Пошто ортаци образују парове, бар један од њих, рецимо x, нема ортака међу осталих 10. Поређајмо тих 10 агената у низ $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ тако да a_i прати a_{i+1} за $i = 1, \dots, 10$ ($a_{11} = a_1$). За свако i, или x прати a_i, или a_i прати x; притом x прати бар једног од те десеторице и праћен је од стране бар једног. Тако за неко i агент a_i прати x, а x прати a_{i+1}. Сада једанаесторицу агената можемо поређати у низ $a_1, \dots, a_i, x, a_{i+1}, \dots, a_{10}$.

22. Означимо $a_{ij} = 1$ ако је у пресеку i-те врсте и j-те колоне девојчица, а $a_{ij} = 0$ ако је дечак.

За $n = 1, 2$ тривијално одређујемо све a_{ij}. Такође, за $n = 3$, знајући a_{11} и a_{13} налазимо a_{12}; слично налазимо a_{21}, a_{23}, a_{32} и a_{22}.

За $n = 4$ знамо $a_{11}, a_{14}, a_{41}, a_{44}$. Даље, знајући $v_1 = a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}$, $k_1 = a_{11}+a_{21}+a_{31}+a_{41}$, $d_2 = a_{12}+a_{21}$ и $d_3 = a_{13}+a_{22}+a_{31}$, добијамо $a_{22} = d_3 - (v_1 + k_1) + (2a_{11} + a_{14} + a_{41} + d_2)$. Слично налазимо a_{23}, a_{32}, a_{33}. С друге стране, осталих 8 вредности није могуће одредити јер распоред у коме је $a_{12} = a_{24} = a_{43} = a_{31} = 1$ и $a_{13} = a_{34} = a_{42} = a_{21} = 0$ даје исте податке као распоред у коме је $a_{12} = a_{24} = a_{43} = a_{31} = 0$ и $a_{13} = a_{34} = a_{42} = a_{21} = 1$.

За $n = 5$ знамо четири угаоне вредности. Усредсређујући се на подквадрате 4×4 закључујемо да није могуће одредити вредност ни у једном другом пољу различитом од централног. С друге стране, централно поље се може одредити: знајући $a_{11} + a_{12} + a_{21}$, $a_{15} + a_{14} + a_{25}$, $a_{55} + a_{54} + a_{45}$ и $a_{51} + a_{41} + a_{52}$, налазимо $a_{13} + a_{31} + a_{35} + a_{53}$, а одатле и $a_{22} + a_{24} + a_{42} + a_{44}$; најзад, знајући збирове по великим дијагоналама налазимо a_{33}.

За $n \geqslant 6$, усредсређујући се на подквадрате 5×5, видимо да у општем случају није могуће одредити ниједну вредност осим угаоних.

23. Одговор је $k = n(4n + 3)$. У следећем примеру овај број се достиже. Дефинишимо

$$S_{i,j} = \{A_iA_{i+j+1}, A_{i+j}A_{i+2n+2}\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant 4n+3, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Скупови $S_{i,j}$ чине партицију S за коју се лако види да задовољава услове.

Претпоставимо да постоји тражена партиција на више од $n(4n+3)$ скупова. Тада је бар један од ових скупова једночлан, рецимо $S_i = \{d\}$. Нека са једне стране d има m темена, а са друге $4n + 1 - m$. Има укупно $m(4n + 1 - m) \leqslant 2n(2n + 1)$ дијагонала које секу d, па скупова нема више од $2n(2n + 1) + 1 \leqslant n(4n + 3)$, контрадикција.

24. Како је збир у сваком подскупу бар n и дели збир $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, смер "само ако" је тривијалан.

Нека је сада $\frac{n(n+1)}{2} = ms$ и $m \leqslant \frac{n+1}{2}$ (или, еквивалентно, $s \geqslant n$). Доказујемо индукцијом по n да је (за свако m) тражена подела могућа. За $n = 2m - 1$ и $n = 2m$ једина могућа подела је $\{2m - 1\} \cup \bigcup_{i=1}^{m-1} \{i, 2m - 1 - i\}$, односно $\bigcup_{i=1}^{m} \{i, 2m + 1 - i\}$.

Нека је $n \geqslant 4m - 1$. Довољно је поделити по индуктивној претпоставци скуп $\{1, 2, \dots, n - 2m\}$ на $m \leqslant \frac{n-2m+1}{2}$ подскупова са једнаким збировима и додати сваком подскупу по један од парова $\{n + 1 - i, n - 2m + i\}$, $i = 1, \dots, m$.

Нека је $2m < n < 4m - 1$ (и $n + 1 < s < 2n$). Разликујемо два случаја.

- Ако је s непарно, довољно је по индуктивној претпоставци поделити скуп $\{1,\dots,s-n-1\}$ на подскупове са збиром $s \geqslant s-n+1$ и додати сваком подскупу по један од парова $\{n,s-n\},\{n-1,s-n+1\},\dots,\{\frac{s+1}{2},\frac{s-1}{2}\}$.
- Ако је s парно, поделимо по индуктивној претпоставци скуп $\{1,\dots,s-n-1\}$ на подскупове са збиром $\frac{s}{2} \geqslant s-n-1$. Ови подскупови и једночлани подскуп $\{\frac{s}{2}\}$ у паровима образују $m-n+\frac{s}{2}$ подскупова са збиром s. Преосталих $n-\frac{s}{2}$ подскупова са збиром s су $\{i,s-i\}$, $i=s'+1,\dots,n$.

25. Претпоставимо супротно. Означимо дати број са $n=\overline{a_{24}a_{23}\dots a_1a_0}$. Ако је $a_i=a_j=a_k$ за неке различите i,j,k, онда је $10^i+10^j \equiv 10^i+10^k \equiv 10^j+10^k \equiv -n \pmod 7$, одакле је $10^i \equiv 10^j \equiv 10^k \equiv -\frac{n}{2} \pmod 7$. Како је низ $1,10,10^2,\dots,10^{24}$ периодичан са периодом 6, у њему се сваки остатак по модулу 7 (па тако и $-\frac{n}{2}$) појављује највише пет пута. Следи да се највише једна цифра може појавити више од двапут, а ни она не може више од пет пута. Али тада n може да има највише $8\cdot 2+5=21$ цифара, контрадикција.

26. Претпоставимо да је $x+y+1=p$ просто и $x^2+xy-y=px-p+1=k^2$. Тада $p \mid k^2-1$, па је $k \geqslant p-1$ и одатле $k-1 \geqslant p-2 \geqslant x$. Следи да је $k^2-1 \geqslant px > px-p$, контрадикција.

27. Како је $c \leqslant n-2$, важи $\frac{c}{d} \leqslant \frac{c}{c+1} \leqslant \frac{n-2}{n-1}$. Тако у случају да је $\frac{a}{b} \leqslant \frac{1}{n}$ имамо $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \leqslant \frac{n-2}{n-1}+\frac{1}{n} = 1-\frac{1}{n^2-n} < 1-\frac{1}{n^3}$. Аналогно радимо ако је $\frac{c}{d} \leqslant \frac{1}{n}$.

    Претпоставимо сада да су $\frac{a}{b},\frac{c}{d} > \frac{1}{n}$ и $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} > 1-\frac{n-1}{n}$. Тада је $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} > \frac{1}{n}\cdot\frac{n-2}{n} = \frac{n-2}{n^2}$, па је $bd < ac\cdot\frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c} < \frac{1}{4}(a+c)^2\cdot\frac{n^2}{n-2} \leqslant \frac{n^2(n-1)^2}{4(n-2)} < n^3$. Према томе, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \leqslant 1-\frac{1}{bd} < 1-\frac{1}{n^3}$.

    <u>*Напомена.*</u> Очигледно је доказана јача оцена од тражене. Најбоља оцена је $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \leqslant 1-\frac{1}{N}$, где је $N=[\frac{2n+1}{3}]([\frac{n+1}{3}][\frac{2n+1}{3}]+1) = [\frac{4n^3+15n+18}{27}]+\epsilon$, $\epsilon=[\frac{n+1}{9}]$ за $n \equiv 2 \pmod 3$ и $\epsilon = 0$ иначе.

28. Означимо $x^2-rx=a$. Тада је $b=x^3-rx=x(rx+a)-rx=rx^2+(a-r)x=(r^2-r+a)x+ra$, па је $b-ra=(r^2-r+a)x$. Како $b-ra, r^2-r+a \in \mathbb{Q}$ и $x \notin \mathbb{Q}$, мора бити $r^2-r+a = x^2-rx+(r^2-r)=0$. Решење ове квадратне једначине по x је ирационално ако и само ако њена дискриминанта $D=r(4-3r)$ није квадрат рационалног броја.

    Ставимо $r=2s^2$ за произвољан рационалан број $s<\sqrt{\frac{2}{3}}$. Тврдимо да је $\sqrt{D}=2s\sqrt{2-3s^2}$ ирационално. Претпоставимо супротно. Тада је $2-3s^2=t^2$ за неки рационалан број t. Постоји $n\in\mathbb{N}$ такво да су $ns=S$ и $nt=T$ цели бројеви и $3S^2+T^2=2n^2$. Покажимо да ова једначина нема нетривијалних целобројних решења (S,T,n). Ако је (S,T,n) решење и нзд$(S,T,n)=1$, онда $3 \mid 2n^2-T^2$, па $3 \mid n,T$, а тада $9 \mid 2n^2-T^2=3S^2$, па $3 \mid S$, те бројеви S,T,n нису узајамно прости, контрадикција.

29. Једно решење је $p=q=2$. Претпоставимо да је p непарно и $p^{q+1}+q^{p+1}=x^2$. Тада је $p^{q+1}=(x-q^{\frac{p+1}{2}})(x+q^{\frac{p+1}{2}})$. Ако су оба чиниоца $x\pm q^{\frac{p+1}{2}}$ дељиви са p, онда $p \mid 2q^{\frac{p+1}{2}}$, па мора бити $p=q$, али тада је $x^2=2p^{p+1}$, што је немогуће. Једина преостала могућност је $x-q^{\frac{p+1}{2}}=1$ и $2q^{\frac{p+1}{2}}+1=x+q^{\frac{p+1}{2}}=p^{q+1}$. И ово је немогуће за непарно q јер је тада $p^{q+1}\equiv 1$ и $2q^{\frac{p+1}{2}}+1 \equiv 3 \pmod 4$. Следи да је $q=2$. Тада добијамо $2^{\frac{p+3}{2}}=p^3-1=(p-1)(p^2+p+1)$. Међутим, p^2+p+1 је увек непарно и веће од 1, што је контрадикција.

30. Означимо $M=5^m-2^m$. Имамо $5^{nk}\equiv 2^k \equiv 5 \pmod M$, тј. $M \mid 5^{nk-1}-1$; аналогно важи $M \mid 2^{nk-1}-1$, па $M=5^m-2^m \mid 5^{nk-1}-2^{nk-1}$. Одавде следи да $m \mid nk-1$, па је $(m,n)=1$.

    <u>*Напомена.*</u> Позната је чињеница $(a^m-b^m,a^n-b^n)=a^{(m,n)}-b^{(m,n)}$ за $a,b\in\mathbb{Z}$, $(a,b)=1$ и $m,n\in\mathbb{N}$.

31. Одговор је $k = 6([\frac{n}{2}]+1)$ за $n \neq 4$ и $k = 24$ за $n = 4$.

Нека су $a_1, \ldots, a_n$ изабрани бројеви. За свако i постоји $m_i \in \mathbb{N}$ такво да је $n < m_i a_i \leqslant 2n$. Ако је $m_i a_i = m_j a_j$ за неке $i \neq j$, онда је нзс$(a_i, a_j) \leqslant m_i a_i \leqslant 2n$. Зато надаље претпостављамо да је $\{m_i a_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} = \{n+1, \ldots, 2n\}$. За $n \notin \{2, 4\}$ бројеви $2([\frac{n}{2}]+1)$ и $3([\frac{n}{2}]+1)$ су у скупу $\{n+1, \ldots, 2n\}$, па је њихов НЗС једнак $6([\frac{n}{2}]+1)$. То важи и за $n = 2$, док за $n = 4$ имамо $\min\{\text{нзс}(i,j) \mid 5 \leqslant i < j \leqslant 8\} = 24$.

Сада ћемо показати да за све $n < i < j \leqslant 2n$ важи нзс$(i,j) \geqslant 6([\frac{n}{2}]+1)$. Како је $j < 2i$, имамо нзс$(i,j) \geqslant 3i$. Притом је нзс$(i,j) = 3i$ само ако је $j = \frac{3}{2}i$ и i је парно, док је у супротном нзс$(i,j) \geqslant 4i > 4n$. Како је $2([\frac{n}{2}]+1)$ најмањи паран број већи од n, тврђење следи.

32. Конструисаћемо тражене бројеве индуктивно. За $n = 1$ тврђење је тривијално. Претпоставимо да природни бројеви $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ задовољавају $\varphi(a_1) > \varphi(a_2) > \cdots > \varphi(a_n)$. Ако је природан број x узајамно прост са $a_1 a_2 \cdots a_n$, онда је $\varphi(x a_i) = \varphi(x)\varphi(a_i)$, па следи да и низ $x a_1 < x a_2 < \cdots x a_n$ задовољава услов задатка. Претпоставимо да је $x a_1 > 4\varphi(x a_1)$. Тада постоји $l \in \mathbb{N}$ такво да је $\varphi(x a_1) < 2^{l-1} = \varphi(2^l) < 2^l < x a_1$, па добијамо низ са $n+1$ чланова $2^l, x a_1, \ldots, x a_n$ који задовољава услов задатка.

Још треба показати да можемо одабрати x на жељени начин. Познато је да производ $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{p_i - 1} = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \cdots)$ дивергира, где је p_i i-ти прост број. Заиста, развијајући производ $\prod_{i=1}^{m}(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \cdots)$ видимо да је он већи од $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{p_m}$, што може бити произвољно велико. Према томе, постоје прости бројеви $p_k < p_{k+1} < \cdots < p_m$ који не деле $a_1 a_2 \cdots a_n$ такви да је $\prod_{i=k}^{m} \frac{p_i}{p_i - 1} > 4$, па можемо узети $x = p_k p_{k+1} \cdots p_m$.