Задаци за самосталан рад

(припремио Душан Ђукић)

Алгебра

1. Реални бројеви a, b, c задовољавају $(a+b)(b+c)(c+a) = abc$ и $(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3) = a^3b^3c^3$. Доказати да је $abc = 0$.

2. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи $f(xy) \leq xf(y)$.

3. Дефинишимо $a_0 = 2013$ и $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n+1}$ за $n = 1, 2, \ldots$. Доказати да је $[a_{1000}] = 1013$.

4. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ реални бројеви у интервалу $[0, 1]$. Одредити највећу могућу вредност израза $x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_3) + \cdots + x_n(1 - x_1)$.

5. Колико пута функција $f(x) = \cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} \cdots \cos \frac{x}{2009}$ мења знак на интервалу $[0, \frac{2009\pi}{2}]$?

6. Ако су a, b, c позитивни бројеви са $abc \geq 1$, доказати да је $\frac{1+a}{1+b} + \frac{1+b}{1+c} + \frac{1+c}{1+a} \leq a + b + c$.

7. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ненегативни реални бројеви и нека је $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq \sqrt{k}$ за свако k. Доказати да је $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})$.

8. Постоје ли бројеви a, b, c различити од нуле такви да за свако $n > 3$ може да се нађе полином облика $x^n + \cdots + ax^2 + bx + c$ са тачно n (не обавезно различитих) целих нула?

Геометрија

9. Дат је ромб $ABCD$ и тачке M и N на дужима AC и BC редом тако да је $DM = MN$. Права DN сече AC у P, а права DM сече AB у R. Доказати да је $DP = PR$.

10. У четвороугао $ABCD$ уписан је круг са центром O, при чему је $OA = 5$, $OB = 6$, $OC = 7$ и $OD = 8$. Ако су M и N средишта дијагонала AC и BD редом, одредити однос OM/ON.

11. Нека су M и N редом средишта страница AB и AC троугла ABC, а D подножје висине из A. Описани кругови троуглова BDN и CDM секу се у тачки $P \neq D$. Доказати да права PD полови дуж MN.

12. Тачка M унутар конвексног четвороугла $ABCD$ је таква да су AMB и CMD једнакокраки троуглови са угловима код M једнаким $120°$. Доказати да постоји тачка N таква да су троуглови BNC и DNA једнакостранични.

13. Нека је P тачка унутар оштроуглог троугла ABC таква да је $\angle PAB = \angle PCA$ и $\angle PAC = \angle PBA$. Ако је D средиште дужи AB, доказати да је $\angle APD = \angle ACB$.

14. У троуглу ABC, симетрала угла код C сече страницу AB у C_1. Нормала из C_1 на праву BC сече описани круг троугла у тачки K (на супротној страни праве BC у односу на C_1). Нормала из C на AK сече AB у тачки L. Доказати да права KL садржи средиште лука AB (који не садржи C).

15. Означимо са O и I редом центре описаног и уписаног круга троугла ABC. Спољa приписани круг ω_a додирује продужетке страница AB и AC редом у K и M, а страницу BC у N. Претпоставимо да средиште P дужи KM лежи на описаном кругу троугла. Доказати да су тачке O, I и N колинеарне.

16. У троуглу ABC, симетрале унутрашњих углова код A и B секу наспрамне странице у D и E редом. Доказати да је $DE \leq (3 - \sqrt{8})(AB + BC + CA)$. Наћи углове троугла у коме важи једнакост.

Комбинаторика

17. Квадрат странице 2 подељен на јединичне квадрате може се нацртати цртањем три квадрата: два наспрамна угаона и велики квадрат. Колико је најмање квадрата потребно нацртати да би се добио квадрат странице n подељен на јединичне квадрате?

18. Из квадратне табле 2012×2012 исечено је једно јединично поље. Доказати да је остатак табле могуће поплочати L-троминима (тј. фигурама облика ).

19. Дато нам је 12 кутија и довољан број црвених, плавих и белих куглица. Желимо да ставимо по једну куглицу у сваку кутију тако да је, за сваку куглицу, бар једна од суседних исте боје. На колико начина се ово може учинити?

20. У једном кораку можемо да изменимо скуп $S \subset X = \{1, 2, \ldots, n\}$ на један од следећих начина: (i) убацимо 1 ако $1 \notin S$; (ii) избацимо n ако $n \in S$; или (iii) избацимо r и убацимо $r+1$ ако је r такво да $r \in S$ и $r+1 \notin S$. Претпоставимо да постоји низ од $2^n - 1$ корака у којем од скупа $\emptyset$ долазимо до скупа $\{n\}$, успут пролазећи кроз сваки подскуп скупа X тачно једном. Доказати да је $n+1$ степен двојке.

21. У унутрашњости конвексног 100-угла одабрано је k тачака, $2 \leq k \leq 50$. Доказати да се може одабрати $2k$ темена 100-угла тако да њима одређен $2k$-тоугао садржи свих k тачака у својој унутрашњости.

22. Могу ли се сви цели бројеви поделити у три дисјунктна скупа тако да, за свако $n \in \mathbb{Z}$, бројеви $n, n - 2^6$ и $n + 3^6$ леже у три различита скупа?

23. На тениском турниру учествује 14 играча и свака два играју тачно један меч. Тројку играча (a, b, c) зовемо *троуглом* ако је a победио b, b победио c и c победио a. Колико највише троуглова може бити на овом турниру?

24. Посматрајмо све подскупове скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ који не садрже два узастопна броја, и за сваки од њих израчунајмо његов производ елемената. Доказати да је збир квадрата ових производа једнак $(n+1)! - 1$.

Теорија бројева

25. Решити једначину $4^a + 5^b + 6^c = 7^d$ у скупу ненегативних целих бројева.

26. Наћи све природне бројеве k за које једначина $x(x+k) = y(y+1)$ има решења у скупу природних бројева.

27. За дати природан број n одредити нзд$\left(\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}\right)$.

28. Да ли постоји пермутација $(a_1, a_2, \ldots, a_{2013})$ бројева $1, 2, \ldots, 2013$ таква да је $a_i - a_j \neq a_j - a_k$ за све $1 \leq i < j < k \leq 2013$?

29. Функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ је одређена индуктивно са $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ и $f(n+1) = f(n+1-f(n)) + f(n - f(n-1))$ за $n \geq 2$. Наћи све n за које је $f(n) = 2^{20}$.

30. Наћи све природне бројеве n који се могу представити у облику $n = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab}$, где су a, b, c природни бројеви.

31. Дат је природан број n. Цео број $a > n^2$ је такав да се међу бројевима $a+1, a+2, \ldots, a+n$ налази садржалац сваког од бројева $n^2+1, n^2+2, \ldots, n^2+n$. Доказати да је $a > n^4 - n^3$.

32. Доказати да постоји бесконачно много парова различитих простих бројева (p, q) таквих да $p \mid 2^{q-1} - 1$ и $q \mid 2^{p-1} - 1$.

Решења

1. Претпоставимо да је $abc \neq 0$. Дељењем друге једнакости првом добијамо

$$(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) = a^2b^2c^2.$$

С друге стране, важи $x^2+y^2 \geq 2|xy| \geq xy+|xy|$, тј. $x^2-xy+y^2 \geq |xy|$, уз једнакост ако и само ако је $x=y$. Следи да је $(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2) \geq |ab|\cdot|bc|\cdot|ca| = a^2b^2c^2$, и да једнакост важи само ако је $a=b=c$. Међутим, тада из $8a^3 = (a+b)(b+c)(c+a) = abc = a^3$ следи $a=0$, па је опет $abc=0$.

2. Као прво, $f(0) \leq xf(0)$, тј. $(x-1)f(0) \geq 0$ за све x, одакле је $f(0)=0$.

Означимо $f(1)=A$ и $f(-1)=-B$. Из услова задатка је $f(x) \leq xf(1) = Ax$ и $f(-x) \leq xf(-1) = -Bx$ за све x. С друге стране, из $A = f(x\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x}f(x)$ и $-B = f(-x\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x}f(-x)$ за $x>0$ добијамо $Ax \leq f(x)$ и $-Bx \leq f(-x)$. Одавде следи $f(x)=Ax$ и $f(-x)=-Bx$ за $x>0$. При том из $f(1) \leq -1\cdot f(-1)$ добијамо $A \leq B$. Према томе,

$$f(x) = \begin{cases} Ax & \text{за } x \geq 0, \text{ и} \\ Bx & \text{за } x<0, \end{cases} \qquad \text{где је } A \leq B.$$

Докажимо да све овакве функције задовољавају услов задатка: (1) за $x,y \geq 0$ је $f(xy) = Axy = yf(x)$; (2) за $x,y<0$ је $xy \geq 0$ и $f(xy) = Axy \leq Bxy = yf(x)$; (3) за $x \geq 0 > y$ је $xy \leq 0$ и $f(xy) = Bxy \leq Axy = yf(x)$; и (4) за $x<0\leq y$ је $xy \leq 0$ и $f(xy) = Bxy = yf(x)$.

3. Из услова задатка је $a_{n+1} = a_n - 1 + \frac{1}{a_n+1}$, одакле је $a_{1000} = a_0 - 1000 + \sum_{n=0}^{999}\frac{1}{a_n+1}$. Одавде одмах следи да је $a_{1000} > 1013$; шта више, $a_n > 1013$ за $n \leq 999$, па је $a_{1000} - 1013 = \sum_{n=0}^{999}\frac{1}{a_n+1} < \frac{1000}{1013} < 1$.

4. Означимо дати израз са $I = I(x_1,\dots,x_n)$. Ако фиксирамо све промењиве осим x_i, I постаје линеарна функција по x_i, и према томе узима максималну вредност за $x_i=0$ или $x_i=1$. Овако можемо претпоставити без смањења општости да су сви $x_i \in \{0,1\}$.

Сабирак $x_i(1-x_{i+1})$ је једнак 1 за $(x_i,x_{i+1}) = (1,0)$, а у супротном је нула. Следи да је вредност I једнака броју парова узастопних чланова $(1,0)$ у низу $(x_1,x_2,\dots,x_n,x_1)$. Како су сви такви парови међусобно дисјунктни, њих може бити највише $[\frac{n}{2}]$, те је $I \leq [\frac{n}{2}]$. Ова вредност се достиже нпр. ако је $x_1 = x_3 = \cdots = 1$ и $x_2 = x_4 = \cdots = 0$.

5. Због непрекидности функције $f(x)$, она може да промени знак само тамо где узима вредност 0, а то су тачке $x_n = \frac{n\pi}{2}$ за $n = 0,1,2,\dots,2009$.

Функција $\cos\frac{x}{m}$ мења знак само у тачкама $x_{(2k+1)m}$, $k \in \mathbb{Z}$. То значи да је број косинуса у запису $f(x)$ који мењају знак у тачки x_n једнак броју непарних делилаца броја n. При том $f(x)$ мења знак у x_n ако и само је број тих делилаца непаран. Ако напишемо $n = 2^k n_1$, $2 \nmid n_1$, број непарних делилаца броја n једнак је броју свих делилаца броја n_1, а он је непаран ако и само ако је n_1 квадрат. Следи да $f(x)$ мења знак само у тачкама x_n за које је n или $n/2$ потпун квадрат. Таквих бројева n има тачно $[\sqrt{2009}] + \left[\sqrt{\frac{2009}{2}}\right] = 44+31 = 75$. Дакле, одговор је 75.

6. Дата неједнакост је еквивалентна са $3 \leq (1+a)+(1+b)+(1+c) - \frac{1+a}{1+b} - \frac{1+b}{1+c} - \frac{1+c}{1+a} = \frac{(1+a)b}{1+b} + \frac{(1+b)c}{1+c} + \frac{(1+c)a}{1+a}$. Међутим, ово одмах следи из неједнакости између средина:

$$\frac{(1+a)b}{1+b} + \frac{(1+b)c}{1+c} + \frac{(1+c)a}{1+a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{(1+a)b}{1+b}\cdot\frac{(1+b)c}{1+c}\cdot\frac{(1+c)a}{1+a}} = 3\sqrt[3]{abc} \geq 3.$$

7. Означимо $s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$. Дато нам је $s_k^2 \geq k$, а израз који треба оценити је

$$S = s_1^2 + (s_2-s_1)^2 + \cdots + (s_n - s_{n-1})^2 = 2s_1^2 - 2s_1s_2 + 2s_2^2 - 2s_2s_3 + \cdots + s_{n-1}^2 - 2s_{n-1}s_n + s_n^2.$$

По А-Г неједнакости, за свако $k = 1, \ldots, n-1$ важи $\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} s_k^2 - 2 s_k s_{k+1} + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} s_{k+1}^2 \geq 0$, уз једнакост ако је $\frac{s_k^2}{s_{k+1}^2} = \frac{k}{k+1}$ (приметите како смо изабрали коефицијенте!). Сабирањем ових неједнакости добијамо

$$S \geq (2-\sqrt{2}) s_1^2 + \left(2 - \frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) s_2^2 + \cdots + \left(2 - \frac{\sqrt{n-2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}\right) s_{n-1}^2 + \left(1 - \sqrt{\frac{n-1}{n}}\right) s_n^2.$$

Имајући у виду да је $s_k^2 \geq k$ и $2 - \sqrt{2} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4n}$, тражена неједнакост ће одмах следити ако докажемо да је $2 - \frac{\sqrt{k-1}+\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{4k^2}$, што се директно доказује.

8. Претпоставимо да за свако n постоји такав полином $P_n(x)$. По Вијетовим формулама, a, b, c су цели бројеви и производ нула полинома P_n је $\pm c$. Како се c може раставити на производ целих бројева различитих од ± 1 на само коначно много начина, неко разлагање ће се поновити, тј. постоје полиноми P_m и P_n $(m > n)$ чије се нуле разликују само у броју нула једнаких ± 1.

   Збирови реципрочних вредности нула P_m и P_n су једнаки $-\frac{b}{c}$, али они се разликују само у сабирцима једнаким ± 1; следи да чинилаца $x-1$ и $x+1$ у растављању количника $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ има једнак број, тј. $P_m(x) = (x-1)^d (x+1)^d P_n(x) = (x^2-1)^d P_n(x)$.

   Како је $(x^2-1)^d = x^{2d} - \cdots + (-1)^{d-1} d x^2 + (-1)^d$, упоређивањем коефицијената у P_m и $(x^2-1)^d P_n$ добијамо $c = (-1)^d c$ (одавде $2 \mid d$) и $a = (-1)^d a + (-1)^{d-1} dc = a - dc$, што је немогуће јер су $c, d \neq 0$.

9. Како је M тачка пресека симетрале угла DCN и странице DN, она лежи на описаном кругу $\triangle CDN$, тј. четвороугао $CDMN$ је тетиван. Сада је $\angle RMN = \angle DCN = 180^\circ - \angle RBN$, дакле B, R, M, N су на кругу. Осим тога, $180^\circ - \angle MPN = \angle CMN + \angle DNM = \angle CDN + \angle DCM = \angle CDN + \angle MCN = \angle CDM = \angle MBC$, па је и P на кругу $BRMN$. Сада из $\angle APR = \angle MBR = \angle ADM$ закључујемо да је P на описаном кругу $\triangle ADR$, и то (због $\angle DAP = \angle PAR$) у средишту лука DR, одакле је $DP = PR$.

10. Нека уписани круг додирује AB, BC, CD, DA редом у тачкама E, F, G, H, и нека су P, Q, R, S редом средишта дужи HE, EF, FG, GH. Четвороугао $PQRS$ је паралелограм, па PR и QS имају заједничко средиште K. Тачка P лежи на OA и $\triangle OAE \sim \triangle OEP$, одакле је $OA/OE = OE/OP$, тј. $OP = \frac{r^2}{OA}$, где је r полупречник уписаног круга. Аналогно је $OR = \frac{r^2}{OC}$, па је $OR/OA = OP/OC = \frac{OA \cdot OC}{r^2}$, тј. троуглови ORP и OAC су слични са коефицијентом сличности $\frac{OA \cdot OC}{r^2}$. Зато је и $OM = \frac{OA \cdot OC}{r^2} OK$; аналогно, $ON = \frac{OB \cdot OD}{r^2} OK$. Према томе, $\frac{OM}{ON} = \frac{OA \cdot OC}{OB \cdot OD} = \frac{48}{35}$.

11. Права PD је радикална оса кругова $k_1(BDN)$ и $k_2(CDM)$, па је довољно показати да средиште K дужи MN има једнаку потенцију у односу на оба круга.

    Нека кругови k_1 и k_2 поново секу праву MN у тачкама P и Q. Тада су $PBDN$ и $QCDM$ циклични трапези, па је $PB = DN = CN$ и $QC = DM = BM$, дакле $PBCN$ и $QCBM$ су паралелограми и $PN = MQ = BC$, тј. $PK = KQ$. Сада је потенција тачке K у односу на оба круга једнака $KP \cdot KN = KQ \cdot KM$.

12. Нека се дијагонале AC и BD секу у E. Ротацијом око M за 120°, троугао AMC се слика у троугао BMD, па је $AC = BD$ и $\angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \angle AEB = 120^\circ$, тј. $\angle AED = 60^\circ$.

    Посматрајмо тачку N на кругу AED такву да је $\triangle AND$ једнакостраничан. Због $\angle NAC = \angle NDB$ и $AC = DB$, троуглови ANC и DNB су подударни, па је $NB = NC$ и $\angle NBD = \angle NCA$, одакле су тачке B, C, E, N на кругу и $\angle BNC = \angle BEC = 60^\circ$, дакле и $\triangle BNC$ је једнакостраничан.

    Друго решење. Конструишимо једнакостраничне троуглове AND и $BN'C$ ка унутрашњости четвороугла. Директна изометрија $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{M,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{N,60^\circ}$ има обртни угао 180° и слика тачку A преко тачке D у C, па је то централна симетрија у односу на средиште K дужи AC. Слично, и изометрија $\mathcal{I}' = \mathcal{R}_{M,120^\circ} \circ \mathcal{R}_{N',60^\circ}$ је централна симетрија у односу на K (јер слика C преко B у A), одакле следи да је $N' \equiv N$.

13. Нека је Q тачка симетрична тачки P у односу на D. Због $\angle QBA = \angle PAB = \angle PCA$ и $\angle QAB = \angle PBA = \angle PAC$, троуглови QAB и PAC су слични, па је $\frac{AQ}{AP} = \frac{AB}{AC}$, што заједно са $\angle QAP = \angle BAC$ даје сличност троуглова AQP и ABC. Одавде је $\angle APD = \angle APQ = \angle ACB$.

14. Како је $\angle CKC_1 = 90^\circ - \angle BCK = 90^\circ - \angle LAK = \angle CLC_1$, тачке C_1, C, K, L леже на кругу. Сада је $\angle AKL = 90^\circ - \angle KLC = 90^\circ - \angle KC_1C = \angle C_1CB = \frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}\angle AKB$, па је KL симетрала угла AKB и пролази кроз средиште лука AB.

15. За $AB = AC$, тврђење је тривијално, па зато претпостављамо да је $AB \neq AC$, тј. $KM \nparallel BC$. Означимо са R полупречник описаног круга, а са I_a и r_a центар и полупречник ω_a.

    Због $AK = AM$, права AP је симетрала угла BAC, па је P средиште лука BC описаног круга. Тада је $PI = PI_a$, па је P центар круга $BICI_a$ над пречником II_a. Одатле је $PI_a = PB = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$. С друге стране, $\angle I_aKP = \angle I_aKP = \frac{\alpha}{2}$ и $\angle I_aPK = 90^\circ$, па је $PI_a = r_a \sin\frac{\alpha}{2}$. Одавде је $r_a = 2R$, тј. $I_aN = 2PO$. Како је $I_aN \parallel PO$, дуж PO је средња линија у троулу II_aN, дакле O је средиште дужи IN.

16. Нека права кроз средиште M дужи DE сече странице CB и CA у P и Q редом. Покажимо да је $DE \leq PQ$. Претпоставимо без смањења општости да је $CA \leq CB$. Лако се показује да је $\angle CDE > \angle CPQ$, па постоји тачка P' на затвореној дужи MP таква да је $\angle MP'D = \angle MEQ$. Тачке D, E, P', Q леже на неком кругу са центром O и полупречником r, при чему је $OM \perp DE$. Ако је N подножје нормале из O на $P'Q$, важи $\angle ONM = 90^\circ$, па је $ON \leq OM$ и одатле $DE^2 = 4(r^2 - OM^2) \leq 4(r^2 - ON^2) = P'Q^2 \leq PQ^2$.

    Израчунајмо сада PQ. Ако означимо $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, имамо да је $\frac{CE}{CA} = \frac{a}{a+c}$, $\frac{CD}{CB} = \frac{b}{b+c}$ и $\frac{PQ}{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{CE}{CA} + \frac{CD}{CB}\right)$, дакле $PQ = \frac{1}{2}\left(\frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{b+c}\right)$. Како је $(a+c)(2a+c) = 2a^2 + 3ac + c^2 \geq (3+\sqrt{8})ac$ и аналогно $(b+c)(2b+c) \geq (3+\sqrt{8})bc$, добијамо

$$DE \leq PQ \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2b+c}{3+\sqrt{8}} + \frac{2a+c}{3+\sqrt{8}}\right) = (3-\sqrt{8})(a+b+c).$$

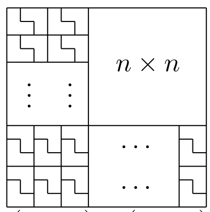
    Једнакост важи када је $c = a\sqrt{2} = b\sqrt{2}$, тј. када су углови $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

17. Нека је $n \geq 3$. Посматрајмо странице јединичних квадрата са по тачно једним крајем на страници великог квадрата. Оваквих дужи има $4(n-1)$, и сваки квадрат који нацртамо може да покрије највише две од тих дужи. Зато нам је потребно бар $2(n-1)$ квадрата.

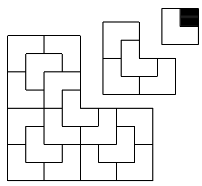
    Овај број се може достићи на следећи начин. Нацртајмо све квадрате страница $n-1, n-2, \ldots, [\frac{n}{2}]+1$ са једним теменом у темену великог квадрата. Још за $2 \mid n$ доцртајмо два квадрата странице $\frac{n}{2}$ са по једним теменом у наспрамним теменима великог квадрата. Овако смо нацртали укупно $2n-2$ квадрата који задовољавају услове.

18. Ако тврђење из задатка важи за таблу странице $n \geq 6$, онда важи и за таблу странице $n+6$. Ово следи из чињенице да се, ако се из квадрата странице $n+6$ исече квадрат странице n, остатак може покрити правоугаоницима 2×3, од којих се сваки састоји од два L-тримина.

    Остаје да покажемо тврђење за $n = 8$. Изрезано поље припада једном од угаоних квадрата 4×4. Остатак табле се поплочава као на слици, па се тврђење овако своди на случај $n = 4$. Слично сводимо случај $n = 4$ на тривијалан случај $n = 2$.



$(n+6) \times (n+6)$


8×8

    Сада тврђење за $n = 2012$ следи једноставном индукцијом.

19. Означимо са a_n број тражених распореда у n кутија. Ради краћег записа, куглицу у k-тој кутији зовемо "куглицом k". Ако има n кутија, куглице $n-1$ и n морају да буду исте боје. Разликујемо два случаја.

    (i) Куглице $n-2$ и $n-1$ су исте боје. Тада распоред куглица од 1 до $n-1$ задовољава услове, а боја куглице n је једнозначно одређена. Оваквих распореда има a_{n-1}.

(ii) Куглица $n-2$ није исте боје као $n-1$, али је исте боје као $n-3$. Тада распоред куглица од 1 до $n-2$ задовољава услове, а боју куглица $n-1$ и n можемо да одаберемо на два начина (исте су боје, и различите од куглице $n-2$). Зато оваквих распореда има $2a_{n-2}$.

Следи да је $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ за $n > 3$. При том је $a_2 = a_3 = 3$. Одавде директно израчунавамо $a_{12} = 2049$. Уопште, $a_n = 2^{n-1} + (-1)^n$.

20. У сваком кораку, збир елемената скупа S се повећава за 1 или смањује за n, дакле, повећава се за 1 по модулу $n+1$. Како се из празног скупа после 2^n корака поново добија празан скуп, следи да је $2^n \equiv 0 \pmod{n+1}$, тј. $n+1 \mid 2^n$, што значи да је $n+1$ степен двојке.

21. Означимо дати 100-угао са $\mathcal{P} = P_1P_2\dots P_{100}$. За $k = 2$ тврђење је тачно: ако су A_1, A_2 дате тачке, онда права сече неке две странице a и b многоугла $\mathcal{P}$; ове две странице одређују четвороугао који садржи обе тачке.

Претпоставимо да тврђење важи за неко k и нека је дато $k+1$ тачака $A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$. По индукцијској претпоставци, постоји $2k$-угао $\mathcal{P}_k = P_{i_1}P_{i_2}\dots P_{i_{2k}}$ $(i_1 < \dots < i_{2k})$ који садржи тачке $A_1, \dots, A_k$. Ако $\mathcal{P}_k$ садржи A_{k+1}, тврђење тривијално важи и за $k+1$. У супротном, A_{k+1} лежи у једном од највише $2k$ многоуглова које странице $\mathcal{P}_k$ одсецају од $\mathcal{P}$; нека је то (без смањења општости) многоугао одсечен страницом $P_{i_1}P_{i_2}$. Нека права $P_{i_1}A_{k+1}$ сече страницу P_jP_{j+1} 100-угла $\mathcal{P}$. Тада $(2k+2)$-угао $P_{i_1}P_jP_{j+1}P_{i_2}\dots P_{i_{2k}}$ садржи све тачке A_i, $i = 1, \dots, k+1$.

22. За дато n, бројеви $n-64, n, n+729$ припадају различитим подскуповима. По услову задатка за $n-64$ и $n+729$, добијамо да су $n-64, n-128, n+665$, односно $n+665, n+729, n+1458$, у различитим подскуповима. Следи да $n+665$ није у истом подскупу ни са $n-64$ ни са $n+729$, па мора да лежи у подскупу који садржи n. То значи да су сва три подскупа периодична по модулу 665.

Даље, $n+64$ и $n+729$ су у истом подскупу, па по услову задатка имамо да су $n-64, n, n+64$ у три различита подскупа; на исти начин, $n, n+64, n+128$ су у различитим подскуповима, што значи да су $n-64$ и $n+128$ у истом подскупу, тј. подскупови су периодични и по модулу 192. Како је $(192, 665) = 1$, закључујемо да сваки од три подскупа има период 1, што је немогуће.

23. Укупно има $\binom{14}{3} = 364$ тројки; пребројаћемо оне које нису троуглови. Означимо са a_i број победа i-тог играча; збир $a_1 + \dots + a_{14}$ је једнак $\binom{14}{2} = 91$. Ако тројка играча није троугао, онда је један од та три играча ("победник") победио друга два. Тако тројки које нису троуглови, а у којима је победник a_i, има тачно $\binom{a_i}{2}$. То даје укупно $S = \sum_i \binom{a_i}{2}$ тројки које нису троуглови. Број троуглова је максималан онда када је S минимално (уз услов $\sum a_i = 91$).

Како је $\binom{a_i-1}{2} + \binom{a_j+1}{2} = \binom{a_i}{2} + \binom{a_j}{2} - (a_i - a_j - 1)$ за $a_i - a_j > 1$, збир S је најмањи када се сви a_i разликују за највише 1, тј. када је међу њима по седам једнаких 6 и 7: тада је $S = 7\binom{6}{2} + 7\binom{7}{2} = 252$, па имамо $364 - 252 = 112$ троуглова.

Тај број се заиста може достићи, нпр. када је i-ти играч победио играче $i+1, \dots, i+6$ за $i = 1, 2, \dots, 14$ (индекси су по модулу 14). Тада по седам играча има 6 и 7 победа.

24. Означимо тражени збир са s_n. За $n = 1, 2$ директно проверавамо да је $s_n = (n+1)! - 1$. Нека је $n > 2$. Збир по оним подскуповима скупа $\{1, \dots, n\}$ који не садрже n једнак је s_{n-1}. Збир по подскуповима различитим од $\{n\}$ који садрже n (и не садрже $n-1$) једнак је $n^2 \cdot s_{n-2}$. Зато је $s_n = s_{n-1} + n^2 s_{n-2} + n^2$, и тврђење се доказује једноставном индукцијом.

25. За $c > 0$, по модулу 3 једначина се своди на $1 + 2^b + 0 \equiv 1$, тј. $2^b \equiv 0 \pmod 3$ што је немогуће. Дакле, $c = 0$. Ако је сада $a > 0$, лева страна је парна, а десна непарна, опет контрадикција, па мора да буде $a = 0$. Дата једначина се своди на $5^b + 2 = 7^d$.

Ако је $b > 1$, имамо $7^d \equiv 2 \pmod{25}$. Међутим, могући остаци 7^d при дељењу са 25 су само ± 7 и ± 1, па тада нема решења. Остаје једино случај $b \leq 1$, и тада као једино решење имамо $(a, b, c, d) = (0, 1, 0, 1)$.

26. Множењем са 4 и додавањем k^2 добијамо $k^2-1=(2x+k)^2-(2y+1)^2=a^2-b^2=uv$, где је $u=a-b$, $v=a+b$, тј. $2x=\frac{u+v}{2}-k$ и $2y=\frac{v-u}{2}-1$. Показаћемо да решење (x,y) у $\mathbb{N}$ постоји ако и само ако је $k=1$ или $k\geq 4$.

    За $k=1$ сваки пар (x,y) је тривијално решење. За $k=2$ и $k=3$ једначина постаје $a^2-b^2=3$, односно $a^2-b^2=8$, чије је једино решење $(a,b)=(2,1)$, односно $(3,1)$. У оба случаја је $y=0$, дакле тада немамо решења.

    За парно $k\geq 4$ довољно је узети $u=1$ и $v=k^2-1$, тј. $(x,y)=(\frac{k^2}{4}-\frac{k}{2},\frac{k^2}{4}-1)$.
    За непарно $k\geq 5$ узимамо $u=2$ и $v=\frac{k^2-1}{2}$ и добијамо $(x,y)=(\frac{k^2-4k+3}{8},\frac{k^2-9}{8})$.

27. Означимо тражени НЗД са d. По услову задатка, $d\mid n$. Претпоставимо да је $d>1$ и да је p прост делилац броја d. Нека је $n=p^k n_1$, $p\nmid n_1$. Ако је $n_1>1$, онда број $\binom{n}{p^k}=\prod_{i=1}^{p^k}\frac{p^k(n_1-1)+i}{i}$ није дељив са p, јер бројиоци разломака $\frac{p^k(n_1-1)+i}{i}$ након скраћивања нису дељиви са p, контрадикција. Према томе, $d=1$ ако n није степен броја p.

    За $n=p^k$ је $\binom{p^k}{m}=\frac{p^k}{m}\prod_{i=1}^{m-1}\frac{p^k-i}{i}$. Након скраћивања, бројиоци и имениоци разломака $\frac{p^k-i}{i}$ нису дељиви са p, па је степен p у канонском развоју $\binom{p^k}{m}$ једнак степену p у $\frac{p^k}{m}$. Следи да $p\mid\binom{p^k}{m}$ за $1\leq m<p^k$ и да $p^2\nmid\binom{p^k}{p^{k-1}}$, па је у овом случају $d=p$.

28. Доказаћемо индукцијом да за свако $n\in\mathbb{N}$ постоји пермутација бројева $1,2,\dots,n$ са траженим својством. За $n=1,2$ то је тривијално.

    Нека је $n=2m$, $m\in\mathbb{N}$. По индуктивној претпоставци постоји пермутација $(a_1,\dots,a_m)$ бројева $1,\dots,m$ са траженим својством. Покажимо да је тада $(b_1,\dots,b_n)=(2a_1,\dots,2a_m,2a_1-1,\dots,2a_m-1)$ жељена пермутација бројева $1,\dots,n$. Заиста, ако је $b_i-b_j=b_j-b_k$ за $i<j<k$, онда по конструкцији b_i,b_j,b_k не могу да буду сви парни или сви непарни, па следи да је b_i паран и b_k непаран, али тада $b_j=\frac{b_i+b_k}{2}$ није цео број.

    За $n=2m-1$ услов задовољава пермутација која се добије кад се из одговарајуће пермутације за $2m$ избрише елемент $2m$. Овим је индукција завршена.

29. Првих неколико вредности функције f су $1,2,2,3,4,4,4,5,6,6,7,8,8,8,8$. Доказаћемо индукцијом по n да важи (за $k\in\mathbb{N}$)

$$(1^\circ)\ \frac{n+1}{2}\leq f(n)\leq n \quad \text{и} \quad (2^\circ)\ f(n)=\begin{cases} f(n-2^k+1)+2^{k-1} & \text{за} \quad 2^k\leq n<2^{k+1}-1,\\ 2^k & \text{за} \quad n=2^{k+1}-1.\end{cases}$$

    За $n\leq 2$ ово је тривијално. Претпоставимо да важи за $1,2,\dots,n-1$ и да је $2^k+2\leq n\leq 2^{k+1}-2$. Из $\frac{x+1}{2}\leq f(x)\leq x$ за $x<n$ следи $n-f(n-1),n-1-f(n-2)\in[2^{k-1},2^k-1)$. Применом (2°) неколико пута добијамо

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-f(n-1))+f(n-1-f(n-2))\\ &= f(n-2^{k-1}-f(n-2^k))+f(n-2^{k-1}-1-f(n-2^k-1))\\ &= f(n-2^k+1-f(n-2^k))+2^{k-2}+f(n-2^k-f(n-2^k-1))+2^{k-2}\\ &= f(n-2^k+1)+2^{k-1}.\end{aligned}$$

    Одавде је $n\geq n-2^k+1+2^{k-1}\geq f(n)\geq\frac{n-2^k+2}{2}+2^{k-1}>\frac{n+1}{2}$, чиме је доказано и (1°). Најзад, ако је $2^k-1\leq n\leq 2^k+1$, користећи рекурентну формулу и (2°) директно израчунавамо f у тачкама $2^k-1,2^k,2^k+1,2^{k-1}+1,2^{k-1}+2$ и индукција је готова.

    Ако је $f(n)=2^{20}$, онда је $2^{20}\leq n\leq 2^{21}-1$, па је $f(n-2^{20}+1)=2^{19}$ или $n=2^{21}-1$. Настављајући овај поступак, налазимо да је $f(n)=2^{20}\iff 2^{21}-21\leq n\leq 2^{21}-1$.

30. Једначина из задатка је еквивалентна са $a^2+b^2+c^2=nabc$. За дато n, посматрајмо решење (a,b,c) у $\mathbb{N}$ са најмањим збиром $a+b+c$, и нека је $a\leq b\leq c$. Како је $(a,b,nab-c)$ такође решење те једначине (као квадратне по c), због $nab-c=\frac{a^2+b^2}{c}>0$ мора бити $\frac{a^2+b^2}{c}\geq c$, тј. $2b^2\geq a^2+b^2\geq c^2$. Одавде је $a^2+b^2+c^2<bc+bc+2bc\leq 4abc$, па је $n<4$.

    За $n=2$ нема решења. Заиста, на основу претходног би у најмањем решењу морало да буде $a=1$, бар један од b,c је паран, па $4\mid b^2+c^2+1$, што је немогуће.

    За $n=1$ и $n=3$ има решења: то су, на пример, редом $(3,3,3)$ и $(1,1,1)$.

31. Нека је $a_i(n^2+i)$ садржалац броја n^2+i међу бројевима $a+1,\dots,a+n$. Због $a>n^2$ је $a_1 \geq 1$. Приметимо да не може да важи $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ - у супротном би било $n-1 \geq a_n(n^2+n) - a_1(n^2+1) \geq a_1(n-1)$, што је немогуће. Зато је $a_i > a_{i+1}$ за неко i, а тада је $n-1 \geq a_i(n^2+i) - a_{i+1}(n^2+i+1) \geq a_i(n^2+i) - (a_i-1)(n^2+i+1) = n^2+i+1-a_i$, дакле $a_i \geq n^2-n+3$. То значи да је $a+n \geq (n^2-n+3)(n^2+i) > n^2(n^2-n+3)$, одакле следи $a > n^4-n^3$.

32. За $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, одаберимо произвољне просте делиоце $p \mid 2^{2^n}+1$ и $q \mid 2^{2^{n+1}}+1$. Поредак двојке по модулу p је 2^{n+1}, одакле $2^{n+1} \mid p-1$. Шта више, по Ојлеровом критеријуму је $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv (\frac{2}{p}) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = 1 \pmod{p}$, па $2^{n+1} \mid \frac{p-1}{2}$, тј. $2^{n+2} \mid p-1$. Аналогно, $2^{n+3} \mid q-1$.

   Сада очигледно $p \mid 2^{2^{n+1}}-1 \mid 2^{q-1}$ и $q \mid 2^{2^{n+2}}-1 \mid 2^{p-1}-1$.

   Друго решење. Користићемо неке познате особине циклотомичних полинома: *n-ти циклотомични полином* $\Phi_n(x) = \prod_{\substack{0\leq k<n\\(k,n)=1}} (x - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$ је моничан полином степена $\varphi(n)$ са целим коефицијентима који дели x^n-1. Показује се да, ако је $a\in\mathbb{Z}$ и p прост делилац $\Phi_n(a)$, онда или $p \mid n$, или је поредак $\delta_p(a)$ броја a по модулу p једнак n (дакле, $n \mid p-1$). При том, ако $p \mid n$, онда $p^1 \parallel \Phi_n(a)$. Одавде следи да, ако је $\Phi_n(a) > n$, онда $\Phi_n(a)$ има бар један прост делилац p са $\delta_p(a) = n \mid p-1$. За $n \geq 7$ је $\Phi_n(2) > n$.

   Посматрајмо произвољан прост број $p>7$ такав да је $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$. Број $\Phi_{p-1}(2) \geq p$ има бар један прост делилац q са $p-1 \mid q-1$, одакле $p \mid 2^{p-1}-1 \mid 2^{q-1}-1$. По Ојлеровом критеријуму је $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$, тј. $\delta_p(2) \neq p-1$, и зато је $q \neq p$. Како $q \mid \Phi_{p-1}(2) \mid 2^{p-1}-1$, пар (p,q) задовољава услове задатка.